

电子信息科学与工程类专业精品教材

信号检测与估计

(第三版)

Signal Detection and Estimation

Third Edition

© 张明友 编著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY <http://www.phei.com.cn>

电子信息科学与工程类专业精品教材

信号检测与估计

(第三版)

张明友 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

信号检测与估计是现代信息理论的一个重要分支。本书系统地讲述了信号检测与估计的理论及其应用。本书共分9章,首先介绍统计接收中信号检测与估计的基本理论;然后分别讨论高斯白噪声和高斯色噪声中信号的检测;接着介绍了序列检测、非参量检测和Robust检测,以及雷达中信号检测的过程;最后分别讲述了信号参量估计和波形估计,这些内容均属于现代检测与估计理论的范畴。所附全书的习题解答,是所述教材内容的补充和扩展。

本书为工科电子信息类专业信号检测与估计的导论性教材,取材注意结构的完整性和内容的典型性,注意理论联系实际和新概念、新理论的介绍,深入浅出,易于读者学习。

本书可供电子与通信学科各专业的高年级本科生和研究生使用,也可供从事电子与通信技术的广大科技人员做参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

信号检测与估计/张明友编著. —3版. —北京:电子工业出版社,2011.11

电子信息科学与工程类专业精品教材

ISBN 978-7-121-14722-7

I. ①信… II. ①张… III. ①信号检测—高等学校—教材②参考估计—高等学校—教材

IV. ①TN911.23

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第199868号

策划编辑:陈晓莉

责任编辑:陈晓莉

印 刷:

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×1092 1/16 印张:23 字数:646千字

印 次:2011年11月第1次印刷

印 数:3000册 定价:45.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

目前信息科技的迅猛发展已成为世界科技变革发生和发展的驱动力量。在雷达、通信、声呐、遥控遥测、图像处理、自动控制等各种各样的应用信息科技系统中,信息传输的可靠性和真实性已经成为核心问题。我们知道,信号是信息的载荷者和传送者。在信息的传输与交换过程中,都是通过信号这一物理实体来实现的。在信号产生和传输的过程中,必然受到各种干扰因素的影响,因而必须加以处理,才能提供给信息接收者使用。由于被传输的信号本身和各种干扰往往具有随机性,因此信号处理设备的基本任务是利用概率与统计的手段来检测信号(即从噪声干扰中判定某种信号是否存在)和估计携带信息的信号参量,这正是本教材研究的对象。由此可知,信号检测与估计理论就是借助于的统计学中假设检测的理论和信号统计估计的理论,解决信息传输系统问题,因而该理论具有广泛的应用性。

本教材是“信号检测与估计”信号的研究生课程教材,也适用于通信、电子工程等有关学科的本科高年级学生使用。在内容上,着重基本概念和基本方法的阐述,并尽量结合通信与雷达方面的应用实例,以便加深对问题的理解。当然,信号检测与估计的基本方法,同样适用于运用概率与统计信号处理技术的语音处理、图像处理、模式识别、生物工程,以及气象、天文等学科,因此本教材对这类专业的学生也有参考价值。

本教材是在 1994 年我们所编《信号检测与估计》(高等专科学校电子工科电子类规划教材)和 2005 年第二版的基础上并参考了最近几年国内外出版的有关书籍后加以修改和增订而成的。全书共分 9 章和两个附录。

第 1 章是统计接收中信号检测与估计的基本理论。主要介绍信号检测与估计理论的基本概念。由于检测与估计两个问题是密切相关的,所以理论将两者的基本概念和基本理论共同放在一起介绍,重点对信号检测和估计中涉及的各种最佳准则做了综合性的阐述。它是随后各章的导引,是全书的核心。

第 2 章是高斯信道中确知信号的检测。本章讨论高斯白噪声背景下的信号检测这一经典问题,重点讨论二元信号检测。由于这方面的信号检测的研究最为完善,其推导比较简单,便于由此掌握检测理论的基本方法,故从这里入手是理所当然的。

第 3 章是高斯色噪声中的信号检测。本章是在第 2 章讨论的加性高斯白噪声背景下的信号检测的基础上,拓展到高斯色噪声情况下信号的检测,并介绍一种基于相关函数的最佳变换——卡亨南—洛维展开,用于讨论在高斯色噪声中的检测。

第 4 章是序列检测。本章是针对固定样本检测的缺点提出来的。与固定样本检测相比,序列检测是一种试图解决信号检测时间与检测准确和可靠之间矛盾的一种方法,特别适用于雷达检测。

第 5 章是非参量检测。前几章讨论的参量检测大体上是以高斯分布的干扰为基础研究出来的,它要求完全掌握接收环境的统计特性,显得很苛刻。一旦环境改变,其检测性能将明显恶化。本章讨论的非参量检测则不要求精确知道输入数据的统计特性。它的特点是适应性强,对各类干扰下检测性能都比较好,尤其恒虚警率处理器性能好。其实质就是把未知统计特性(概率密度分布)的干扰变成概率密度函数已知的干扰。

第 6 章是稳健性(Robust)检测。本章的基本思想是寻找一个根据某种性能标准的最不

利分布函数,然后针对这一最不利密度函数,用参量检测法按照某一准则设计一种局部最佳检测器。其性能优于非参量检测,但比参量检测差一些。

第7章是雷达中信号检测的过程。本章主要介绍接收机中检测是否有信号存在的过程。重点介绍了多脉冲积累和恒虚警率(CFAR)处理器。从而避免了将这两部分内容单独列出两章来讨论,本章的另一个目的是将信号检测的概念与实际应用联系起来,以便加深对检测理论的理解。

第8章是信号参量估计。与前几章讨论的与信号检测不同,信号参量估计的功能是要从接收到的含噪声信号中尽可能正确地提取随机参量或未知参量。本章以随机信号幅度、相位、频率和时延的估计为例,介绍在白色高斯信道中参量信号估计的方法以及不同算法的估计器,此外,还以同时估计频率和时延为例,讨论了多参量估计法。

第9章是波形估计。第8章中讨论的信号参量估计,是假定信号参量在观测时间内是不变的。但在许多实际问题中信号参量本身就是一个随机过程,因此需要估计的是信号波形。本章可以看做是第8章中参量估计问题的拓展,此时,待估计量不再是单个或数个参量,而是一个或多个时间函数。例如,模拟通信系统的任务,是要在干扰背景下最佳地估计发送端的波形,而雷达数据处理系统的任务,是要根据带有测量误差的目标点迹数据来估计目标的航迹,它们都属于波形估计问题。功率谱估计是参量估计理论应用的一个重要而典型的方面,本来应当是本教材的一个重要内容,但考虑到大多数作者把这一内容纳入“数字信号处理”课程中,因而本教材不再涉及。

采用本教材进行教学时,有两种方案可供选择。其一,作为研究生主修课程,可用60学时左右主修本书内容;其二,作为本科生选修课程,可用40学时左右选修前三章以及第8章的前三节和第9章的前两节。编写过程中,我们已做了适当安排,使得这样取舍不至于产生任何衔接问题。学习本教材的读者,需要有“概率论”、“信号与系统”和“随机信号分析”等课程的基础。

应该说明,信号检测与估计解题难度大,推导很繁琐。在出版本书第一版和第二版后,读者纷纷来信要求给出题解。为此,搜集了国内外有关资料后,精选了60多道习题的解答列在附录B中。这批习题解答部分,实际上是教材所述内容的补充和扩展,有助于对本教材的学习和理解。

谨以本书献给已故向敬成教授。本书改编出版还了他一个心愿。

在本书出版之际,谨向毛自灿和王意青两位教授深表谢意,感谢他们在1990年和1994年两次共同出版该统编教材中付出的辛勤劳动。另外,还要感谢吕明教授,吕幼新教授,汪学刚教授,以及张伟研究员和郑小亮硕士等为本教材做了校正。

由于作者水平所限,错误和不当之处在所难免,真诚地希望读者给予批评和指正。

编著者

2011年11月于电子科技大学

目 录

第 1 章 统计接收中信号检测与估计的基本理论	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 假设检验的基本概念	(1)
1.2.1 基本检测模型	(2)
1.2.2 信号假设检测步骤	(3)
1.3 双择检测及其最佳准则	(4)
1.3.1 贝叶斯准则(Bayes Criterion)	(4)
1.3.2 派生贝叶斯准则	(11)
1.3.3 极大极小化准则(Maxmini criterion)	(13)
1.3.4 奈曼-皮尔逊准则(Neyman Pearson Criterion)	(15)
1.4 多元信号检测及其最佳准则	(17)
1.4.1 多择-贝叶斯准则	(17)
1.4.2 多择-最大后验概率准则	(18)
1.5 随机参量信号的检测	(20)
1.5.1 贝叶斯准则	(21)
1.5.2 奈曼-皮尔逊准则	(23)
1.6 误差的定义和分类	(27)
1.7 信号参量估计的性能	(28)
1.7.1 信号估计的基本概念	(28)
1.7.2 无偏性	(29)
1.7.3 一致性	(30)
1.7.4 充分性	(30)
1.7.5 优效性	(30)
1.7.6 克拉默-拉奥不等式	(31)
1.8 信号参量估计基本理论	(32)
1.8.1 经典估计	(33)
1.8.2 贝叶斯估计	(34)
1.8.3 最大后验估计(Maximum a posteriori estimation)	(37)
1.8.4 最大似然估计(Maximum likelihood estimation)	(39)
1.8.5 极大极小化估计(Maxmini estimation)	(42)
1.8.6 线性最小均方估计(Liner minimum variance estimation)	(44)
1.8.7 最小二乘估计(Least square estimation)	(45)
1.8.8 加权最小二乘估计	(46)
1.8.9 线性最小均方误差估计的递推算法	(47)
1.9 区间估计	(48)
1.9.1 置信区间	(48)
1.9.2 单个母体的区间估计	(49)
本章小结	(50)

习题一	(51)
第 2 章 高斯信道中确知信号的检测	(54)
2.1 概述	(54)
2.2 高斯白噪声下确知信号的检测	(56)
2.2.1 二元通信系统	(57)
2.2.2 在白色高斯信道中的一次观测结果	(57)
2.2.3 在白噪声信道中多次观测结果	(59)
2.2.4 最佳系统的检测性能	(65)
2.2.5 相参雷达系统	(68)
2.3 匹配滤波器理论	(70)
2.3.1 概述	(70)
2.3.2 线性滤波器的一种最佳准则——信噪比最大准则	(70)
2.3.3 白噪声背景下的匹配滤波器	(72)
2.3.4 色噪声背景下确知信号的匹配滤波器	(76)
2.3.5 匹配滤波器的有关性质	(77)
2.3.6 时变匹配滤波器	(79)
2.4 随机参量信号的检测	(78)
2.4.1 随机相位信号的检测	(81)
2.4.2 随机振幅信号的检测	(85)
2.4.3 随机相位和振幅信号的检测	(86)
2.4.4 随机频率信号的检测	(88)
2.4.5 随机到达时间信号的检测	(92)
2.5 信号的多脉冲检测	(93)
2.5.1 确知脉冲串信号的检测	(94)
2.5.2 随机相位脉冲串(非相参脉冲串)信号的检测	(96)
2.5.3 随机振幅随机相位脉冲串信号的检测	(99)
本章小结	(100)
习题二	(101)
第 3 章 高斯色噪声中的信号检测	(103)
3.1 概述	(103)
3.2 基于相关函数的一种最佳变换——K-L 展开	(103)
3.2.1 连续随机信号的 K-L 展开	(103)
3.2.2 离散随机信号的 K-L 展开	(107)
3.2.3 K-L 展开是最小均方误差意义下的一种最佳变换	(109)
3.3 平稳高斯色噪声中确知信号的检测	(110)
3.3.1 似然比计算和最佳处理器	(111)
3.3.2 检测系统性能	(114)
3.4 随机相位信号的检测	(116)
本章小结	(119)
习题三	(120)
第 4 章 序列检测	(121)
4.1 概述	(121)

4.2	瓦尔特序列检测	(122)
4.3	序列检测与固定样本检测的比较	(126)
4.4	序列检测在雷达中的实际应用	(128)
4.4.1	两步序列探测概率	(128)
4.4.2	有快速确认的序列检测	(128)
4.4.3	延迟确认的序列检测	(129)
4.4.4	序列检测的能量和时间要求	(129)
	本章小结	(129)
	习题四	(130)
第5章	非参量检测	(131)
5.1	概述	(131)
5.2	非参量检测中常用的公式和性能指标	(133)
5.2.1	常用的公式	(133)
5.2.2	非参量检测虚警概率和检测概率指标的计算	(136)
5.2.3	非参量检测的其他性能指标	(137)
5.3	非参量检测器原理	(139)
5.3.1	广义符号检测器	(139)
5.3.2	量化秩值求和检测	(146)
5.3.3	马恩-怀特奈(Man-Whitney)检验统计	(147)
5.3.4	秩值检测(rank tests)	(148)
5.3.5	几种不同类型的秩检测器	(150)
	本章小结	(152)
	习题五	(153)
第6章	稳健性(Robust)检测	(154)
6.1	概述	(154)
6.2	混合模型的 Robust 假设检测	(154)
6.2.1	Robust 似然比检验	(156)
6.2.2	污染的高斯噪声中有限样本确知信号的 Robust 检测	(159)
6.3	确知弱信号的渐近 Robust 检测	(162)
6.3.1	非线性相关检测器(NC 检测器)——局部最佳检测器	(162)
6.3.2	M 检测器	(164)
	本章小结	(165)
	习题六	(166)
第7章	雷达中信号检测的过程	(167)
7.1	概述	(167)
7.2	单样本检测概述	(168)
7.2.1	对一个数据样本设定门限	(169)
7.2.2	单样本检测的检测概率	(170)
7.2.3	单样本检测的例子	(171)
7.3	多样本检测概述	(172)
7.3.1	基于多个数据样本点的检测	(172)
7.3.2	多样本检测方案(表决法)	(173)

7.3.3	多样本(表决法)检测的例子	(174)
7.3.4	基于取总和的多样本检测	(175)
7.3.5	N 个样本检测的例子(总和法)	(175)
7.4	多脉冲积累	(176)
7.4.1	雷达脉冲的积累方法简述	(176)
7.4.2	相参积累	(176)
7.4.3	非相参积累	(177)
7.4.4	二进制积累器	(180)
7.4.5	累积积累器(批积累器)	(183)
7.4.6	反馈积累器	(183)
7.4.7	其他类型的积累器/检测器	(184)
7.5	两种实用的二进制检测器	(184)
7.5.1	指向检测器	(184)
7.5.2	滑窗检测器(积累器)	(185)
7.6	恒虚警率检测处理	(187)
7.6.1	概述	(187)
7.6.2	瑞利分布的参量型恒虚警率处理	(188)
7.6.3	非瑞利分布的参量型恒虚警率处理(双参量 CFAR)	(195)
7.6.4	时间平均 CFAR	(198)
7.6.5	非参量 CFAR	(199)
	本章小结	(199)
	习题七	(199)
第 8 章	信号参量估计	(201)
8.1	概述	(201)
8.2	在白色高斯信道中单参量信号估计	(203)
8.2.1	信号幅度估计	(205)
8.2.2	信号相位估计	(208)
8.2.3	信号频率估计	(211)
8.2.4	信号时延估计	(215)
8.3	多个信号参量的同时估计的方法和性能	(220)
8.3.1	估计方法	(221)
8.3.2	估计性能	(223)
8.4	高斯色噪声情况下的估计简介	(225)
8.4.1	非随机相位信号	(225)
8.4.2	随机相位信号	(228)
	本章小结	(229)
	习题八	(230)
第 9 章	波形估计	(232)
9.1	概述	(232)
9.2	连续随机过程的维纳滤波	(233)
9.2.1	非因果解	(234)
9.2.2	因果解(频谱因式分解法)	(236)

9.2.3 正交性·····	(240)
9.3 离散随机过程的维纳滤波·····	(241)
9.3.1 离散观测情况·····	(241)
9.3.2 平稳序列的因果和非因果维纳滤波器·····	(242)
9.3.3 白化滤波器·····	(245)
9.4 平稳序列的维纳预测器·····	(248)
9.4.1 预测器计算公式·····	(249)
9.4.2 离散因果和非因果平稳序列维纳预测器·····	(250)
9.5 标量卡尔曼滤波·····	(251)
9.5.1 概述·····	(251)
9.5.2 标量信号模型和观测模型·····	(252)
9.5.3 标量卡尔曼滤波算法·····	(253)
9.6 标量卡尔曼预测·····	(257)
9.7 矢量信号模型和观测模型·····	(259)
9.8 离散矢量卡尔曼滤波的信号模型·····	(263)
9.8.1 离散状态方程和观测方程 ^[17] ·····	(263)
9.8.2 矢量卡尔曼滤波和预测算法·····	(265)
9.8.3 利用标量卡尔曼滤波运算过渡到矢量卡尔曼滤波·····	(270)
9.9 用于雷达跟踪的卡尔曼滤波算法简介·····	(273)
9.10 常增益滤波方法·····	(277)
9.10.1 α - β 滤波·····	(277)
9.10.2 α - β - γ 滤波·····	(279)
本章小结·····	(280)
习题九·····	(281)
附录 A 弗雷德霍姆积分方程的解·····	(284)
A.1 第一类弗雷德霍姆积分方程的形式解·····	(284)
A.2 有理核的第一类弗雷德霍姆的积分方程的解·····	(285)
A.3 有理核的第二类弗雷德霍姆积分方程的解·····	(287)
A.4 有理核的弗雷德霍姆齐次积分方程的解·····	(288)
附件 B 习题解答·····	(289)
参考文献·····	(357)

第1章 统计接收中信号检测与估计的基本理论

1.1 引言

自然界和人类社会中信息的传输与交换,都是通过信号这一物理实体来完成的。信号是信息的载荷者和传送者。在信号产生和传输的过程中,必然受到各种干扰因素的影响,因而必须加以处理,才能提供给信息接收者使用。由于被传输的信号本身和各种干扰往往具有随机性,信号处理设备必须进行统计分析,而这个统计分析的基本任务是检测信号(即判定某种信号是否存在)和估计携带信息的信号参量。由此可知,信号检测与估计理论就是信号处理的统计理论,所要解决的问题是信息传输系统的基本问题,因而得到广泛的应用。

任何一个信息传输系统(即广义的通信系统),可以用香农(Shannon)提出的模型表示,如图1.1所示。在信息发送端,信息或消息通过变换和编码,这包括表示信息的物理量和数学格式的变换,再调制到信号源上,从而形成传输的信号。由于信道常常具有色散性,故调制过程本质上是使所传输的信号具有窄带性质,并与信道相匹配。信道不仅不可避免地要引入干扰,还会对信息产生畸变,因而在接收端输入的是被“污染”了的信号。信号处理设备的任务,是要最大限度地从接收信号中提取信息源的信息,以供信息接收者使用。

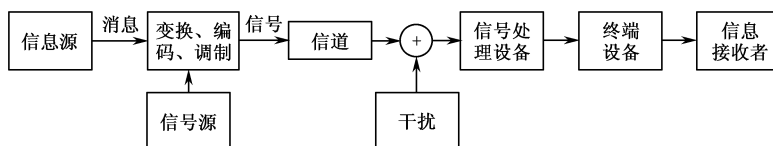


图 1.1 信息传输系统的香农模型

香农模型是一个高度概括的信息传输模型,通信系统、遥测系统、遥感系统、生物信息传输系统都可以看做它的特例。

信号接收问题所研究的主要问题,就是从接收到的信号与噪声的混合物中取得信息。其中能获得最大信息量的接收机就是最佳接收机。

本章中,我们将从信息论的基本观点及统计判决的观点借助于统计学中假设检验的理论,来研究信号的接收问题。首先导出目前常用的各种统计判决准则,然后讨论信号检测与信号估计的基本理论。

1.2 假设检验的基本概念

信号统计检测理论可借助于统计学中假设检验的理论。在统计学中,假设检验(test of hypothesis)是利用搜集到的数据对某个总体分布的信号源输出事先做出的统计假设,按照某种设计好的方法进行检测,判断此假设是否正确。这种信号统计检测理论适用于许多信号情况,本节从简单的检测理论问题入手,讨论假设检验的基本概念。

1.2.1 基本检测模型

信号是携带信息的工具,为了传输不同的信息,信号应具有两个或两个以上的状态。信号检测中的统计判决就是统计学中的假设检验,检验就是信号检测系统所做的统计判决过程,而假设则是被检验对象的可能出现的状态。假设检验的结果可以用各假设成立与否的概率 $P(D_i/H_j)$ 或与之有关的指标来描述,而这些指标与信号和噪声的统计特性及所采用的准则有关。

1. m 元信号统计检测概念

信号混叠干扰后,使观测信号变为随机信号,一般地构成 n 维随机矢量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$,各假设 H_j 下其统计特性用概率密度函数 $p(\mathbf{x}|H_j)$ 来描述^①。如果把整个观测空间 \mathbf{D} 划分为 m 个子空间 \mathbf{D}_i , ($i=0, 1, \dots, m-1$), 则观测随机矢量 $(\mathbf{x}|H_j)$ 将以一定的概率落在观测空间 \mathbf{D} 的某一个空间 \mathbf{D}_i , ($i=0, 1, \dots, m-1$) 内。当观测随机矢量 $(\mathbf{x}|H_j)$ 落在 \mathbf{D}_i 子空间时,则判决假设 H_j 成立,称为假设检验。

根据上述描述, m 元信号统计检测理论的基本模型如图 1.2 所示。图 1.3 示出 m 元信号检测的判决域。在图 1.3 中将构造的一个统计量 (Statistics) 的取值区域划分为接收域 (acceptance region) 和拒绝域 (rejection region)。从而确定了一种判决方法: 若统计量落入接收域, 就接收假设 H_j , 若统计量落入拒绝域, 就拒绝假设 H_j 。

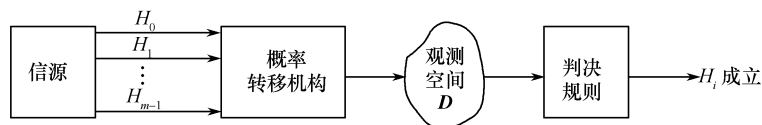


图 1.2 m 元信号检测模型

2. 二元信号统计检测概念

在二元信号情况,信源有两种可能的输出信号,分别记为假设 H_0 和假设 H_1 。在噪声干扰背景下,信源的输出信号经概率转移机构以一定的概率映射到整个观测空间 \mathbf{D} 中,生成观测量 $(\mathbf{x}|H_0)$ 和 $(\mathbf{x}|H_1)$ 。当根据判决规则将观测空间 \mathbf{D} 划分为 D_0 和 D_1 两个判决域后,观测量

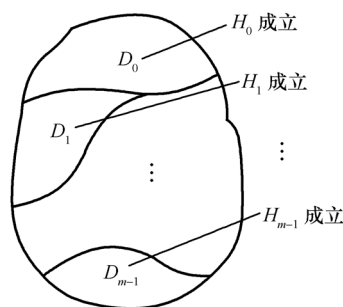


图 1.3 m 元信号检测的判决域

$(\mathbf{x}|H_0)$ 可能落在 D_0 域,从而判决假设 H_0 成立; $(\mathbf{x}|H_0)$ 也可能落在 D_1 域,从而判决假设 H_1 成立。类似地,观测量为 $(\mathbf{x}|H_0)$ 时,若落在 D_1 域,则判决假设 H_1 成立;若落在 D_0 域,则判决假设 H_0 成立。图 1.4(a) 和 (b) 示出当 $m=2$ 时的二元信号统计检测理论的基本模型。由图 1.2 和图 1.4 可见,它由 4 部分组成。

模型的第一部分是信源,它输出一种特定的信号。对于简单的二元信号检测,信源的输出是两种信号之一。把信源的输出称为假设,并记 H_0 和 H_1 [见图 1.4(b)]。对于更一般的情况,输出可能是 m 个假设 H_0, H_1, \dots, H_{m-1} 中的一个 (见图 1.3)。前者称之为二元信号检测,后者称之为 M 元信号检

^① 为简便起见,下面常将 $p(\mathbf{x}|H_j)$ 表示成 $p(\mathbf{x})$, $(\mathbf{x}|H_j)$ 表示成 \mathbf{x} 。

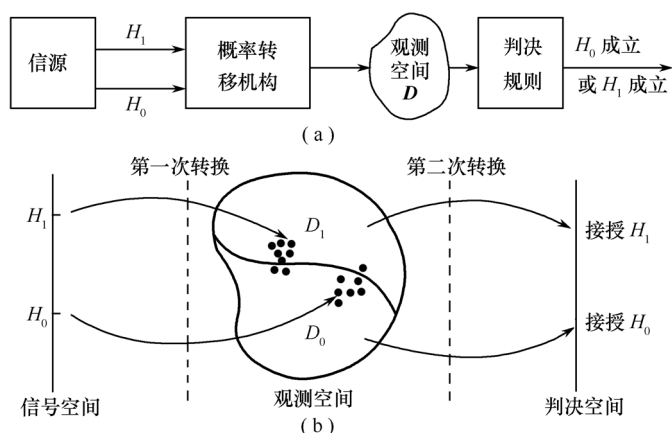


图 1.4 二元信号检测模型

测。一些典型的信源如下。

① 二元数字通信系统中:信源由符号“0”和“1”组成。当认为信源输出“1”时,用假设 H_1 表示;认为信源输出“0”时,用假设 H_0 表示。该输出信号经发送、传输、接收和判决之后,其判决的可能结果只有“0”或“1”两种状态。

② M 元数字通信系统:信源的 m 个不同的输出分别用假设 H_0, H_1, \dots, H_{m-1} 来表示它们。

③ 雷达系统中:对特定的区域进行观测并判定该区域是否存在目标,可能的结果是“有目标”或“无目标”。用 H_1 表示目标存在, H_0 表示目标不存在。

模型的第二部分是概率转移机构。它是在信源输出的其中一个假设为真的基础上, $m=2$ 时,把噪声干扰背景中的假设 $H_j, (j=0,1)$ 为真的信号以一定的概率关系映射到观测空间中。如果没有噪声干扰,信源输出的某一种确知信号将映射到观测空间中的某一点,但在噪声干扰的情况下,它将以一定的概率映射到整个观测空间;而映射到某一点附近的概率决定于概率密度函数 $p(\mathbf{x}|H_j), (j=0,1)$ 。

模型的第三部分是观测空间 D 。观测空间 D 是在信源输出不同信号状态下,在噪声干扰背景中,由概率转移机构所生成的全部可能观测量的集合。 $m=2$ 时,观测量可以是一维的随机观测信号 $(x|H_j)$,也可以是 n 维的随机观测矢量 $(\mathbf{x}|H_j), (j=0,1)$ 。

模型的第四部分是判决规则。观测量落入观测空间后,就可以用来推断哪一个假设成立是合理的,即判决信号属于哪种状态。 $m=2$ 时,为此需要建立一个判决规则,以便使观测空间中的每一个点对应着一个相应的假设 $H_j, (j=0,1)$ 。判决结果就是选择假设 H_0 成立,还是选择假设 H_1 成立。图 1.4(b) 示出了信号模型中二次转换和信号空间、观测空间和判决空间示意图。

1.2.2 信号假设检测步骤

由图 1.2 和图 1.4 可知,假设检验的步骤是:①提出统计假设;②构造一个统计量;③将统计量的取值区域分为接受域和拒绝域。再根据选定的判决规则,做出判决(decision)。接收机的质量应该根据判决结果来判定。

如前所述,双择检测问题实质上是对输入空间 \mathbf{x} (一般为 n 维空间)划分为区域 D_1 和 D_0 。

如果 $x \in D_1$, 则判决 H_1 为真; 如果 $x \in D_0$, 则判决 H_0 为真。

对于双择一假设检验问题, 观测样本可能是在信源输出 H_1 为真或是在 H_0 为真的情况下得来。显然, 只有这两种可能, 因此, 就双择一假设检验的判决而言, 共有 4 种可能的情况出现:

- ① 实际是 H_0 假设为真, 判决为 H_0 假设, 即假设为 H_0 , 检验结果是在 D_0 域;
- ② 实际是 H_0 假设为真, 判决为 H_1 假设, 即假设为 H_0 , 检验结果是在 D_1 域;
- ③ 实际是 H_1 假设为真, 判决为 H_0 假设, 即假设为 H_1 , 检验结果是在 D_0 域;
- ④ 实际是 H_1 假设为真, 判决为 H_1 假设, 即假设为 H_1 , 检验结果是在 D_1 域。

在以上四种情况中, 1) 与 4) 正确判决, 2) 与 3) 是错误判决, 为了分析与比较判决的统计性能, 有必要定义各种判决的判决概率:

若定义 H_0 假设为真但判为 H_1 假设的错误是第一类错误, 第一类错误的错误概率用 $P(D_1 | H_0) = \int_{D_1} p(x | H_0) dx$ 表示之, 称为虚警概率 P_{fa} ;

相应地, 可定义 H_1 假设为真但判为 H_0 假设的错误是第二类错误, 第二类错误的错误概率用 $P(D_0 | H_1) = \int_{D_0} p(x | H_1) dx$ 表示之, 称为漏警概率 P_m ;

H_1 为真, 判为 H_1 的正确判决的概率用 $P(D_1 | H_1) \left[P(D_1 | H_1) = \int_{D_1} p(x | H_1) dx \right]$ 表示之, 称为检测概率 P_d ;

H_0 为真, 判为 H_0 的正确判决的概率用 $P(D_0 | H_0)$ 表示之。

1.3 双择检测及其最佳准则

现在来集中研究判决理论的最简单情况——双择检测问题。它是从观测样本可能是在 H_1 为真或是在 H_0 为真的情况下做出双择假设检验。应用到“信号有无”的双择假设检验问题中, 这两个假设表示为

$$H_0: x(t) = s_0(t) + n(t) \quad (1-1)$$

$$H_1: x(t) = s_1(t) + n(t)$$

此时, 信息发端只有两种状态, 对应于两种假设 H_1 和 H_0 。在数字通信中, $s_1(t)$ 可能代表“1”码的波形, $s_0(t)$ 代表“0”码的波形。在雷达中, $s_1(t)$ 代表有雷达回波信号, $s_0(t)$ 代表无回波信号。 $x(t)$ 称为观测波形, $n(t)$ 为噪声信号。设 $P(H_0)$ 和 $P(H_1)$ 分别表示假设 H_0 和 H_1 的先验概率。由于在双择检测问题中, 两个假设只能有一个为真, 且必有其中一个为真, 因而有

$$P(H_1) = 1 - P(H_0) \quad (1-2)$$

1.3.1 贝叶斯准则(Bayes Criterion)

双择检测的基本问题是如何决定区域 D_1 和 D_0 的划分, 使判决在某种意义下为最佳。贝叶斯准则就是规定 D_1 和 D_0 的划分, 应使平均风险为最小。

在实际中, 虚警和漏报引起的后果严重性并不一定相同。有时漏报一次后果严重, 如雷达的漏报可能会造成严重后果, 而虚警一次后果并不很严重。这时, 希望尽可能不漏报, 虚警多一点, 还是允许的。而有些情况恰恰相反, 因此在考虑虚警和漏报引起的后果严重性时, 应将两类错误分别加权后再来计算两者的平均错误概率。

在两种假设中,上述一种判决的后果和另一种判断的后果是不同的,常赋予每一可能的后果一个代价。首先定义 c_{ij} 表示假设 H_j 为真,却判决假设 H_i 成立的代价。即 i 表示检验结果, j 表示原来假设。在双择检测情况下, i 和 j 只能为 0 或 1。例如,在雷达中, c_{10} 表示本来无信号而判为有信号的代价,即虚警代价。而 c_{01} 表示漏报代价, c_{00} 和 c_{11} 表示正确判断的代价,通常假定正确判断的代价为零。

具体地说,对于二元假设检验的代价因子见表 1.1。一般情况下,假定错误判决的代价因子大于正确判决的代价因子,即满足 $C_{ij|i \neq j} > C_{jj}$ 。

表 1.1 二元假设检验的代价因子

判 决	假 设	
	H_0	H_1
H_0	C_{00} (还可用于 $H_0 H_0$ 或 $D_0 H_0$ 表示)	C_{01} (还可用于 $H_0 H_1$ 或 $D_0 H_1$ 表示)
H_1	C_{10} (还可用于 $H_1 H_0$ 或 $D_1 H_0$ 表示)	C_{11} (还可用于 $H_1 H_1$ 或 $D_1 H_1$ 表示)

在信号检测理论中,通常采用博弈论中的术语将加权因子称为“代价函数”,而将加权后的错误概率称为“风险”。

对于 H_j 为真而判 H_i 成立, $i, j = 0, 1$ 的情况,判决概率 $P(H_i | H_j)$ (常用 $P(D_i | H_j)$ 表示),代价因子 c_{ij} ,于是在 H_j 为真时判决所付出的代价 $R(H_j)$ (简写成 R) 为

$$R = \sum_{i=0}^1 c_{ij} P(D_i | H_j) \quad j = 0, 1 \quad (1-3)$$

考虑到假设 H_j 出现先验概率 $P(H_j)$,则判决所付出的总平均代价(又称总平均风险)为

$$\bar{R} = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 c_{ij} P(H_j) P(D_i | H_j) \quad (1-4)$$

在二元假设检验中,已知 H_1 为真的条件下,做出判决的平均代价称为假设 H_1 下的条件代价,记为 R_1 ,有

$$R_1 = P(D_0 | H_1) c_{01} + P(D_1 | H_1) c_{11} \quad (1-5a)$$

同样,已知 H_0 为真的条件下,作为判决的平均代价称为假设 H_0 下的条件代价,记为 R_0 ,有

$$R_0 = P(D_0 | H_0) c_{00} + P(D_1 | H_0) c_{10} \quad (1-5b)$$

由于事先并不知道 H_1 或 H_0 为真,因而总平均代价,即平均风险(average risk)应等于各条件代价按其先验概率进行平均,即

$$\bar{R} = P(H_0) R_0 + P(H_1) R_1 = P(H_0) [P(D_0 | H_0) c_{00} + P(D_1 | H_0) c_{10}] + P(H_1) [P(D_0 | H_1) c_{01} + P(D_1 | H_1) c_{11}] \quad (1-6a)$$

所谓贝叶斯准则,是在假设 H_j 的先验概率 $P(H_j)$ 已知,各种判决代价因子 c_{ij} 赋定的情况下,要求这样地确定判决区域 D_0 和 D_1 ,使式(1-6a)中平均风险 \bar{R} 达到极小。这种极小化的风险称为贝叶斯风险。

下面将要说明,贝叶斯准则可以化为似然比准则,因而它是似然比准则的特例。由于这里仅研究双择检测,有 $P(D_0 | H_1) = 1 - P(D_1 | H_1)$ 和 $P(D_0 | H_0) = 1 - P(D_1 | H_0)$ 。将这些关系式代入式(1-6a),则有

$$\bar{R} = P(H_1) c_{01} + P(H_0) c_{00} + P(H_0) (c_{10} - c_{00}) P(D_1 | H_0) - P(H_1) (c_{01} - c_{11}) P(D_1 | H_1) \quad (1-6b)$$

式中, $P_d = P(D_1 | H_0) = \int_{D_1} p(\mathbf{x} | H_1) d\mathbf{x}$, $P_{fa} = P(D_1 | H_0) = \int_{D_1} p(\mathbf{x} | H_0) d\mathbf{x}$, 而 $p(\mathbf{x} | H_0)$

$= p(x_1, x_2, \dots, x_n | H_0)$ 和 $p(\mathbf{x} | H_1) = p(x_1, x_2, \dots, x_n | H_1)$ 分别表示假设 H_0 和 H_1 条件下接收波形样本的 n 维条件概率密度函数, 称为似然函数。将它们代入式(1-6b), 则得到用似然函数表示的平均风险表达式

$$\bar{R} = P(H_1)c_{01} + P(H_0)c_{00} + \int_{D_1} \{P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(\mathbf{x} | H_0) - P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(\mathbf{x} | H_1)\} d\mathbf{x} \quad (1-7)$$

贝叶斯准则要求选择判决区域 D_1 , 使上式 \bar{R} 达到极小。由于式(1-7)中前两项与判决区域 D_1 的选择无关, 因而要求第三项积分式达到最小。由于被积函数可能为正, 也可能为负, 为了使积分达到最小, 只要选择区域 D_1 使被积函数总为负或零就能达到。因此, 选择 H_1 的区域 D_1 应满足

$$P(H_1)(c_{01} - c_{11})p(\mathbf{x} | H_1) \geq P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(\mathbf{x} | H_0) \quad (1-8)$$

上式通过简单代数运算, 得到贝叶斯判决规则为

$$\frac{p(\mathbf{x} | H_1)}{p(\mathbf{x} | H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} \quad (1-9)$$

不等号左边是两个转移概率密度函数(又称似然函数)之比, 称为似然比函数(Likelihood ratio function), 记为 $\Lambda(\mathbf{x})$ 。于是, 上述判决规则变为

$$\Lambda(\mathbf{x}) \triangleq p(\mathbf{x} | H_1)/p(\mathbf{x} | H_0) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} \triangleq \Lambda_0 \quad (1-10)$$

由此可见, 贝叶斯意义下的最佳判决系统变为计算似然比 $\Lambda(\mathbf{x})$ 的系统。将 $\Lambda(\mathbf{x})$ 与一门限 Λ_0 比较, 如 $\Lambda(\mathbf{x}) \geq \Lambda_0$, 判 H_1 为真; 反之, 则判 H_0 为真。也就是说, 贝叶斯准则可以化为似然比准则, 其门限值 Λ_0 应按式(1-10)由代价因子[若 $(c_{10} - c_{00})$ 大, 则虚警引起的损失大, 反之, $(c_{01} - c_{11})$ 大, 则漏警引起的损失大]和各假设的先验概率 $[P(H_0)$ 和 $P(H_1)]$ 决定。

综合考虑上述的三个因素: 判决概率 $P(D_i | H_j)$, 先验概率 $P(H_j)$, 判决的代价因子 c_{ij} , 由三者就可以求出平均代价 \bar{R} 。

为了进一步说明似然比准则的物理概念, 在图 1.5 所示的 n 维输入空间 \mathbf{X} 上表示似然函数。对于空间中的每一点 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, 似然函数 $p(\mathbf{x} | H_1)$ 和 $p(\mathbf{x} | H_0)$ 具有确定的数值, 图中点的密度形象地表示似然函数的大小。显然, $p(\mathbf{x} | H_1)$ 较大的区域应判 H_1 为真, 而 $p(\mathbf{x} | H_0)$ 较大的区域应判 H_0 为真。根据式(1-10), 判决规则应为: 如果 $p(\mathbf{x} | H_1) \geq \Lambda_0 p(\mathbf{x} | H_0)$, 则该点属于区域 D_1 , 反之, 属于 D_0 。区域 D_1 和 D_0 的分界面满足方程式 $\Lambda(\mathbf{x}) = \Lambda_0$ 。

根据式(1-10)所示的似然比检验的判决表示式, 可画出贝叶斯最佳检测器的框图, 如图 1.6 所示。似然比函数 $\Lambda(\mathbf{x})$ 是观测量 $(\mathbf{x} | H_1)$ 与 $(\mathbf{x} | H_0)$ 的统计描述—概率密度函数 $p(\mathbf{x} | H_1)$ 与 $p(\mathbf{x} | H_0)$ 的比值; 似然比检测门限 Λ_0 使检测性能——平均风险 \bar{R} 达到最小。图 1.6(a) 和

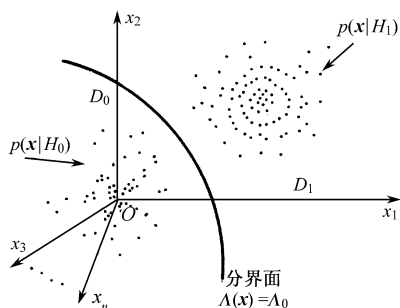


图 1.5 似然比检测的信号空间表示法示意图

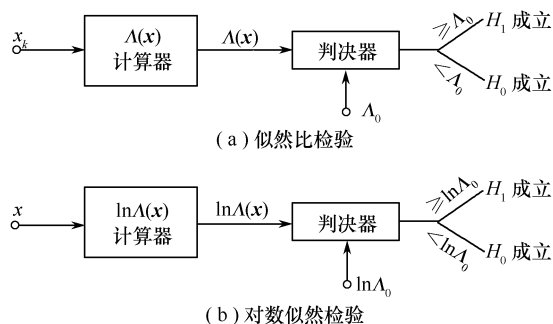


图 1.6 二元信号检测原理框图

图 1.6(b) 分别示出似然比检验框图和对数似然比检验实现框图。应当指出, $\Delta(\mathbf{x})$ 通常是观测矢量 \mathbf{x} 的非线性函数, 而检测判决本身更是一个非线性过程, 因而最佳检测处理器总是非线性的。检测判决本身是一个非线性过程, 所以整个系统仍然是非线性的。

综上所述, 通信与测量系统的基本任务是在噪声背景下检测信号的存在, 并估计信号的参量。在统计学上, 都是属于统计决策问题, 希望所做出的判决, 平均看来引起的信息损失最小。

首先, 用 s 表示传输系统发送端的真实状态, 即信号空间的元素。它可能表示信号的存在与否, 例如, 数字通信系统中一个特殊的码元, 雷达目标的距离或电话的波形等。对于检测问题, s 可能有 n 个状态, 用 s_1, s_2, \dots, s_n 表示。对于参量估计问题, s 一般有无限多个状态, 例如, 一个实数区间 $[a, b]$ 。为了讨论方便起见, 先假定 s 仅有 n 个状态, 且每个状态发生的概率为 $P(s_i)$, 称为先验概率。

类似地, 用 x 表示观测结果, 即输入空间的元素。由于信道存在噪声干扰, x 与 s 一般是不同的。设 x 有 m 种状态, 表示为 x_1, x_2, \dots, x_m 。由于噪声的随机性, m 应为无限个, 但为方便起见, 暂时假定 m 是有限的。定义 $P_{ij} = P(x_i | s_j)$, 它表示发送端状态为 s_j 条件下观测结果为 x_i 的概率。于是得到如下条件概率矩阵:

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{m1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1-11)$$

为了完整描述判决过程, 还需了解由于判决错误所引入的损失。用 d_k 表示认定发送端为 s_k 的判决, 即判决空间 D 的元素, 用 c_{ki} 表示当 s_i 为真而判决为 d_k 引入的损失或代价。于是得到如下损失矩阵(或称为代价矩阵):

$$\begin{matrix} & d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1-12)$$

统计判决的实质, 是寻求一种最佳的判决规则 $\{d_k\}$, 使决策引入的平均代价达到极小, 这种决策过程称为贝叶斯(Bayes)判决。给定式(1-11)和式(1-12)中的两个矩阵及先验概率, 即可求出最佳判决规则, 具体求解方法将在下面讨论。

【例 1.1】 当发送端真实状态仅有两种时, 即 $s_1: s(t) = s_1(t)$ 和 $s_0: s(t) = s_0(t)$, 则统计判决问题变为双择检测问题。例如, 二元数字通信中码元的检测, 雷达中对特定距离单元判定信号的存在与否, 都是双择检测的实例, 此时, 最佳接收机的任务, 是根据输入信号 $x(t)$, 判定 $s_1(t)$ 或 $s_0(t)$ 哪一个存在。在统计学上, 这相当于判决两个假设 H_1 和 H_0 之一为真的问题, 这两个假设表示为

$$\left. \begin{aligned} H_0: x(t) &= s_0(t) + n(t) \\ H_1: x(t) &= s_1(t) + n(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

由此可知, 在双择检测问题中, s 的两种状态可理解为两种假设, 假设 H_1 对应于发送端状态为 s_1 , 假设 H_0 对应于发送端状态为 s_0 。于是, 双择检测问题实质上就是二元假设检验问题。与一般决策问题的符号相同, d_1 表示做出假设 H_1 为真的判决, d_0 表示做出假设 H_0 为真

的判决。假定观测结果 x 仅有 m 种状态,即 $x_i (i=1,2,\dots,m)$ 。于是,在双择检测情况下,条件概率矩阵式(1-11)变为

$$\begin{array}{c} s \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m \\ \begin{array}{c} H_1 \\ H_0 \end{array} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{m1} \\ p_{10} & p_{20} & \cdots & p_{m0} \end{bmatrix} \end{array} \quad (1-14)$$

代价矩阵式(1-12)变为

$$\begin{array}{c} d_1 \quad d_0 \\ \begin{array}{c} H_1 \\ H_0 \end{array} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{01} \\ c_{10} & c_{00} \end{bmatrix} \end{array} \quad (1-15)$$

如果已知接收端输入为 x_i ,而做出的判决为 d_1 ,则平均代价显然为

$$r(d_1|x_i) = c_{11}P(H_1|x_i) + c_{10}P(H_0|x_i) \quad (1-16)$$

式中,根据贝叶斯定理有

$$P(H_j|x_i) = \frac{p(x_i|H_j)P(H_j)}{\sum_k P(H_k)p(x_i|H_k)} \quad (1-17)$$

注意,式(1-17)中 $P(H_j)$ 为假设 H_j 发生的先验概率, $P(H_j|x_i)$ 称为 x_i 已知条件下 H_j 发生的后验概率。同样,如果做出的判决为 d_0 ,则平均代价为

$$r(d_0|x_i) = c_{01}P(H_1|x_i) + c_{00}P(H_0|x_i) \quad (1-18)$$

上面两式中, $r(d_0|x_i)$ 与 $r(d_1|x_i)$ 表示已知输入 x_i 条件下,判决为 d_0 与 d_1 的平均代价(也称为条件代价),贝叶斯准则要求总平均代价即平均风险达到最小,总平均代价定义为上述条件代价对所有 x_i 再平均。显然,只要每次判决都根据低的条件代价给出,即对于特定输入 x_i ,如 $r(d_1|x_i) \leq r(d_0|x_i)$,判为 d_1 ;如 $r(d_1|x_i) > r(d_0|x_i)$,判为 d_0 ,则总能保证平均风险为最小。

应用式(1-16)~式(1-18)可以证明, $r(d_1|x_i) \leq r(d_0|x_i)$ 等效于

$$\Lambda(\mathbf{x}) \triangleq \frac{p(x_i|H_1)}{p(x_i|H_0)} \geq \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} \triangleq \Lambda_0 \quad (1-19)$$

式中, $\Lambda(\mathbf{x})$ 为假设 H_1 和 H_0 成立的条件下,接收端为 x_i 的条件概率之比,简称似然比。于是,判决过程变为求出特定输入的似然比,然后与一门限 Λ_0 比较。如果 $\Lambda(\mathbf{x})$ 大于或等于 Λ_0 ,判决假设 H_1 为真,反之,则判假设 H_0 为真。 Λ_0 值由代价矩阵式(1-15)及两种假设的先验概率决定。对于 x_i 仅有 m 种可能值的情况, $\Lambda(\mathbf{x})$ 由条件概率矩阵式(1-14)给出的 p_{i1} 和 p_{i0} 之比得到。

【例 1.2】 作为双择检测问题的特例,现在研究在加性噪声背景下测量只能为 1V 或 0V 的直流电压。这类似于二进制信号通过有噪声的信道后的检测问题。假定加性噪声 $n(t)$ 服从均值为零、方差为 σ^2 的正态分布。此时,两个假设为

$$H_0 : x(t) = n(t), \quad H_1 : x(t) = 1 + n(t)$$

如果我们仅根据 $x(t)$ 的一次测量值 x 做出判决,这意味着输入空间是一维的。即使这样, x 的可能取值也是无限多个,不能简单应用例 1.1 的结果。此时,式(1-14)的条件概率矩阵应改为条件概率密度函数,如

$$\begin{array}{c} s \quad x \\ \begin{array}{c} H_1 \\ H_0 \end{array} \begin{bmatrix} p(\mathbf{x}|H_1) \\ p(\mathbf{x}|H_0) \end{bmatrix} \end{array} \quad (1-20)$$

假设 H_1 出现的先验概率为 $P(H_1)=P$, H_0 出现的先验概率为 $P(H_0)=Q$ 。由于已知噪声统计特性为高斯分布,因而式(1-20)中两种条件概率密度函数易于求出,并示于图 1.7 中。图中

$$p(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-x^2/(2\sigma^2)]$$

$$p(x|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(x-1)^2/(2\sigma^2)]$$

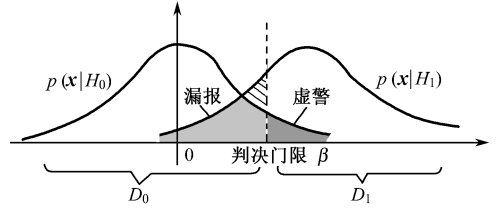


图 1.7 例 1.2 中的条件概率密度函数及虚警和漏报概率图示

当假设 H_0 为真而判决为 d_1 ,即本来无信号而判为有信号,称为虚警。虚警发生的概率表示为 $P(D_1|H_0)$,虚警引入的损失称为虚警代价,记为 c_f 。当假设 H_1 为真而判决为 d_0 ,即当有信号时判为无信号,称为漏报。漏报概率表示为 $P(D_0|H_1)$,漏报引入的损失称为漏报代价,记为 c_m 。如果认为正确的判决没有损失,则代价矩阵式(1-15)可写为

$$\begin{matrix} & d_1 & d_0 \\ \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & c_m \\ c_f & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1-21)$$

根据与例 1.1 相同的思路,如果已接收到 \mathbf{x} ,选择假设 H_1 的条件代价为

$$r(d_1|\mathbf{x}) = 0 \cdot P(H_1|\mathbf{x}) + c_f P(H_0|\mathbf{x}) \quad (1-22)$$

显然,上式是 \mathbf{x} 的函数。同样,选择假设 H_0 的条件代价为

$$r(d_0|\mathbf{x}) = c_m P(H_1|\mathbf{x}) + 0 \cdot P(H_0|\mathbf{x}) \quad (1-23)$$

判决的平均风险 \bar{R} 应当等于上述条件代价对所有 \mathbf{x} 再平均。自然,如果对每个 x 值,都选择 $r(d_1|\mathbf{x})$ 和 $r(d_0|\mathbf{x})$ 中之较小值作为判决标准,就能保证平均风险达到最小。

由于 x 不是离散的随机变量,贝叶斯定理式(1-17)可写为

$$P(H_i|x) = \frac{P(H_i)p(x|H_i)dx}{\sum_k P(H_k)p(x|H_k)dx} \quad (1-24)$$

式中, $p(x|H_i)dx$ 为假设 H_i 条件下, x 处于区间 $[x, x+dx]$ 内的概率。显然,如果 $p(x|H_i)$ 为有限值且连续(后一项并不是必要条件),上式分子分母中的 dx 可以消去。

应用与例 1.1 相似的步骤,可以证明: $r(d_1|x) \leq r(d_0|x)$ 等效于

$$\Lambda(x) \triangleq \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \geq \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} = \frac{Qc_f}{Pc_m} \triangleq \Lambda_0 \quad (1-25)$$

式中, $\Lambda(x)$ 为似然比, Λ_0 为似然比门限。如 $\Lambda(x) \geq \Lambda_0$, 判 H_1 为真;反之,判 H_0 为真。

对于本例的情况, $\Lambda(x)$ 极易计算。因为

$$p(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-x^2/(2\sigma^2)]$$

$$p(x|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(x-1)^2/(2\sigma^2)]$$

则根据式(1-25)有

$$\Lambda(x) = \exp[(2x-1)/(2\sigma^2)] \quad (1-26)$$

于是,判决规则变为:如果

$$\exp[(2x-1)/(2\sigma^2)] \geq \Lambda_0$$

则判为有信号,否则判为无信号。这一判决规则可写为下列常见形式

$$\exp[(2x-1)/(2\sigma^2)] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0 \quad (1-27)$$

上式经简单运算得

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{1}{2} + \sigma^2 \ln \Lambda_0 \triangleq \beta \quad (1-28)$$

式(1-26)~式(1-28)画成图形示于图 1.8。该图表明,对于这个例子,贝叶斯判决变成将测量值 x 本身直接与门限 β 比较。如 $x \geq \beta$,即在区域 D_1 判决有信号;反之,如果 $x < \beta$,即在区域 D_0 判决无信号。从本例可以看出,双择检测的实质是对输入空间进行对分,即划分成 D_1 和 D_0 两个区域,当 $x \in D_1$ 或 $x \in D_0$ 时,分别做出 d_1 或 d_0 的判决。贝叶斯准则给出了这种划分的原则:使平均风险达到极小。

根据图 1.7 和图 1.8,极易计算虚警概率和漏报概率

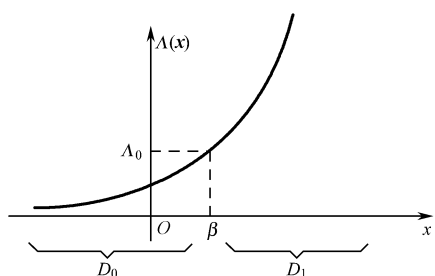


图 1.8 例 1.2 中的似然比图形

$$\left. \begin{aligned} P(D_1|H_0) &= \int_{D_1} p(x|H_0) dx \\ P(D_0|H_1) &= \int_{D_0} p(x|H_1) dx \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

在假设 H_0 或 H_1 为真的条件下判决为 d_1 或 d_0 所引入的平均代价也可称为条件代价,用 r_0 和 r_1 表示

$$r_0 = c_{10} P(D_1|H_0) = c_f P(D_1|H_0) \quad (1-30a)$$

$$r_1 = c_{01} P(D_0|H_1) = c_m P(D_0|H_1) \quad (1-30b)$$

但它们不同于式(1-16)和式(1-18)所定义的条件代价 $r(d_1|x_i)$ 和 $r(d_0|x_i)$,后者以已知 x_i 为条件,而 r_0 和 r_1 则分别以已知 H_0 和 H_1 是真为条件。于是,平均风险也可表示为条件代价 r_0 和 r_1 对先验概率再平均

$$\bar{R} = Pr_1 + Qr_0 \quad (1-31)$$

贝叶斯准则就是使上式的平均风险 \bar{R} 达到极小的检测准则。这里要说明一点:利用两种条件代价表达式都可以得到相同的平均风险 \bar{R} 。究竟选用哪一种,视解决问题方便与否而定。

【例 1.3】 在例 1.2 中,虽然式(1-11)矩阵中的观测状态 x_i 有无限多个,但发送端真实状态 s_i 的数目为 2,因而是双择检测问题。但在很多情况下, s_i 可能有 m 个状态,例如,发送端可能发送 m 个不同的字母,或者 m 个可能的码字,这相当于信号空间有 m 个元素。这样的问题便属于多择检测或称为多元假设检验问题。

如果发送端真实状态 s 和对它的判决 d 都有不可数无限多个,即信号空间与判决空间都有不可数无限多个元素,则问题变为参量估计问题。此时,发送端的信号可取决于在一个区间内取值的参量 α ,因而信号可表示为 $s(t, \alpha)$ 。例如, α 可表示雷达目标的距离,它可以取雷达威力区内的任意值。关于参量估计问题,将在本章最后一节详细讨论。现仅用本例说明参量估计与检测问题之间的紧密关系。

本例仍然讨论例 1.2 中在噪声背景下测量直流电压的问题,但被测电压 α 不再只取两个数值,而是具有某一概率密度函数 $p(\alpha)$ 的随机变量,因而可以在某个区间上取任意数值。为简单起见,本例中假定 $p(\alpha)$ 为零均值,方差为 β^2 的高斯分布。与例 1.2 一样,设背景噪声的分布仍是零均值,方差为 σ^2 的高斯分布,则 α 已知条件下 x 的条件概率密度函数 $p(x|\alpha)$ 可写为

$$p(x|\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(x-\alpha)^2/(2\sigma^2)] \quad (1-32)$$

关于代价,由于 α 不再仅取离散值,因而用式(1-12)的代价矩阵来指定代价不再适用。

此时,不仅 α 可取不可数无限多个数值,而且 d 也可取不可数无限多个数值。为方便起见,用 $\hat{\alpha}$ 表示对 α 的估计值, $\hat{\alpha}$ 实际上是对 α 做出的判决,相当于检测情况下的 d_i 。于是,代价只能用 α 和 $\hat{\alpha}$ 的一个函数来表示。这个问题将在后面详细讨论。现在我们暂时选用误差 $(\alpha - \hat{\alpha})$ 的平方来表示代价函数,即 $C(\alpha, \hat{\alpha}) = (\alpha - \hat{\alpha})^2$ 。这样做的合理性在于,估计误差越大,代价越大,而且是以平方关系随误差增大。

根据条件概率乘法公式,在已得到观测值 x 的条件下, α 的后验概率密度函数为

$$p(\alpha|x) = \frac{p(\alpha)p(x|\alpha)}{p(x)} = \frac{1}{2\pi\beta\sigma p(x)} \exp[-\alpha^2/(2\beta^2)] \exp[-(x-\alpha)^2/(2\sigma^2)] \quad (1-33)$$

式中, $p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x|\alpha)p(\alpha)d\alpha$, 它与 α 无关。式(1-33)经过简单运算,可得

$$p(\alpha|x) = \text{常数} \cdot \exp[-(\alpha - cx)^2/(2c\sigma^2)] \quad (1-34)$$

式中, $c = \beta^2/(\beta^2 + \sigma^2)$ 。于是,在观测值 x 已知条件下,将 α 判决为 $\hat{\alpha}$ 的条件代价为

$$R(\hat{\alpha}|x) = E_a(\alpha - \hat{\alpha})^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha - \hat{\alpha})^2 p(\alpha|x) d\alpha$$

以总平均代价,即平均风险为条件代价 $R(\hat{\alpha}|x)$ 对所有可能的 x 再平均,即

$$\bar{R} = \int_{|x|} R(\hat{\alpha}|x) p(x) dx = \int_{|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha - \hat{\alpha})^2 p(\alpha|x) p(x) d\alpha dx \quad (1-35)$$

α 的最佳估计 $\hat{\alpha}$ 应使式(1-35)的平均风险为最小,由此出发即可解出 $\hat{\alpha}$ 。这种使平均风险 \bar{R} 达到最小的估计称为贝叶斯估计。

1.3.2 派生贝叶斯准则

1.3.1 节中讨论的贝叶斯准则是信号统计检测理论中的通用检测准则。在对各假设的先验概率 $P(H_j)$ 和各种判决的代价因子 c_{ij} 作某些约束的情况下,会得到它的派生准则。本节讨论二元信号下,贝叶斯准则的几种重要的派生准则。

1. 最小平均错误概率准则

应用 1.3.1 节所述的贝叶斯平均风险最小的判决规则类似的分析方法,可以得到最小平均错误概率准则,它是把虚警和漏报等同看待的,因此是一种理想观察者准则。由于贝叶斯判决准则需要同时知道两种假设的先验概率和各个代价因子。在很多情况下,代价因子很难估计。例如,雷达应用情况下漏报的代价就很难事先确定。在二元通信中,也很难事先确定“0”码判为“1”码或“1”码判为“0”码的代价。在这种情况下,可以采用最小错误概率准则和最大后验概率准则。

将最小平均错误概率准则与贝叶斯准则对比,对二元通信问题,前者常常假定正确判断不付出代价,而两类错误的代价相等,即

$$c_{00} = c_{11} = 0, \quad c_{01} = c_{10} = 1 \quad (1-36)$$

此时,由式(1-6)所得平均风险 \bar{R} 与平均错误概率 P_e 相等

$$\bar{R} = P(H_0)P(D_1|H_0) + P(H_1)P(D_0|H_1) = P_e \quad (1-37)$$

因此,当两类错误代价相等时,平均风险 \bar{R} 最小就意味着平均错误概率最小。也就是说,最小平均错误概率准则是贝叶斯准则的特例,因而也是似然比准则的特例。于是由式(1-10),判决规则变为

$$\Lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = \Lambda_0 \quad (1-38)$$

从式(1-38)可看出,判决过程并不要求知道代价因子,因而可以把它用于不知道代价因子或两种错误代价因子相等的情况。

由于最小错误概率准则是似然比准则的特例,其构成框图仍与图 1.6 一致,不同点仅是 Λ_0 。按式(1-38)选择,它仅与先验概率有关。

2. 最大后验概率准则

最大后验概率准则是从信息论的观点来研究最佳判决系统,其出发点是,在已经得到观测矢量 \mathbf{x} 的条件下,比较假设 H_1 和 H_0 的后验概率。用 $P(H_0|\mathbf{x})$ 表示已知观测矢量 \mathbf{x} 条件下假设 H_0 的后验概率,用 $P(H_1|\mathbf{x})$ 表示 H_1 的后验概率。显然,后验概率应当与先验概率 $P(H_0)$ 和 $P(H_1)$ 不同,这反映了获得观测矢量 \mathbf{x} 后(即实验后)所获得的信息。容易想象,对应于较大后验概率的那个假设更可能出现,于是,最大后验概率准则表示为

$$P(H_1|\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} P(H_0|\mathbf{x}) \quad (1-39)$$

为了进一步得出最大后验概率准则的判决规则,可根据概率乘法定理写出后验概率表达式

$$P(H_1|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)P(H_1)}{p(\mathbf{x})}$$

由于 \mathbf{x} 是一个多维连续随机变量, $p(\mathbf{x})$ 与 $p(\mathbf{x}|H_1)$ 均为无穷小量,因而可写成 $p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ 和 $p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x}$ 。代入上式并消去分子分母中 $d\mathbf{x}$, 则得

$$P(H_1|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)P(H_1)}{p(\mathbf{x})} \quad (1-40)$$

$$\text{同样} \quad P(H_0|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_0)P(H_0)}{p(\mathbf{x})} \quad (1-41)$$

将式(1-40)和式(1-41)代入式(1-39),则判决规则变为

$$p(\mathbf{x}|H_1)P(H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} p(\mathbf{x}|H_0)P(H_0) \text{ 或 } p(\mathbf{x}|H_1)/p(\mathbf{x}|H_0) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} P(H_0)/P(H_1) \quad (1-42)$$

不等式(1-42)的左边和右边分别是在已经获得观测量 \mathbf{x} 的条件下,假设 H_1 和假设 H_0 为真的概率,称为后验概率。因此,按最小平均代价的贝叶斯准则在 $c_{10} - c_{00} = c_{01} - c_{11}$ 的条件下,就成为最大后验概率准则(maximum a posteriori probability criterion)。

显然,式(1-42)正好与式(1-38)相同,说明最大后验概率准则与最小错误概率准则一致,因而它们的实现方法也完全一致。它们是贝叶斯准则的同一特例,只不过提出问题的方法不同而已。有的作者把这两种准则称为理想观察者准则。

【例 1.4】 为了说明贝叶斯准则和最大后验概率准则的应用,现举一多次测量的例子。设 x_1, x_2, \dots, x_n 是统计独立的、且方差为 σ^2 的高斯随机变量。在假设 H_1 下其均值为 a_1 , 在假设 H_0 下均值为 a_0 , 因而在两种假设下它们的联合概率密度函数可写为

$$p(\mathbf{x}|H_k) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a_k)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (k = 0, 1) \quad (1-43)$$

于是,似然比等于

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} = \exp\left[\frac{(a_1 - a_0)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n(a_1^2 - a_0^2)}{2\sigma^2}\right]$$

如果 $\Lambda(\mathbf{x}) \geq \Lambda_0$, 则选择假设 H_1 , 反之则选择假设 H_0 。 Λ_0 根据所选的最佳准则,按式(1-10)或式(1-38)计算。由于指数函数是单调函数,上式两边取对数不但不影响原来的判决,反而

给计算带来方便。于是,容易得到

$$m_x = \sum_{i=1}^n (x_i/n) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \beta \quad (1-44)$$

式中, m_x 是样本平均值, $\beta = \frac{(a_1 + a_0)}{2} + \frac{\sigma^2 \ln \Lambda_0}{n(a_1 - a_0)}$ 为判决门限。在本例中,划分判决区域 D_0 和 D_1 的界面是 n 维空间中的一个平面,其方程可写为

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\beta \quad (1-45)$$

为了说明随着测量次数 n 的增加,判决的错误概率越小这一物理概念,进一步分析本例的两种错误概率。由于统计量 m_x 是 n 个高斯随机变量的线性组合,因而它也是高斯分布的,在假设 H_1 和 H_0 下其均值分别为 a_1 和 a_0 ,方差为 σ^2/n ,即

$$p(m_x | H_k) = (2\pi\sigma^2/n)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(m_x - a_k)^2}{2\sigma^2/n}\right] \quad (k = 0, 1) \quad (1-46)$$

因而两种错误概率可写为

$$P(D_1 | H_0) = \int_{\beta}^{+\infty} p(m_x | H_0) dm_x = \text{erfc}\left[\frac{\beta - a_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right] \quad (1-47)$$

$$P(D_0 | H_1) = 1 - \int_{\beta}^{+\infty} p(m_x | H_1) dm_x = 1 - \text{erfc}\left[\frac{\beta - a_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right] = \Phi\left[\frac{\beta - a_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right] \quad (1-48)$$

式中, $\Phi(x)$ 为标准正态累积分布,即

$$\Phi(x) \triangleq \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-y^2/2] dy \quad (1-49)$$

而

$$\text{exfc}(x) \triangleq \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-y^2/2] dy = 1 - \Phi(x) \quad (1-50)$$

称为误差函数。当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\beta \rightarrow (a_1 + a_0)/2$, 如 $a_1 > a_0$, 则显然有 $P(D_1 | H_0) \rightarrow 0$, $P(D_0 | H_1) \rightarrow 0$ 。由此可看出,随着观测次数的增加,判决的错误概率可以降低。

1.3.3 极大极小化准则(Maxmini criterion)

要采用贝叶斯准则,除了给定各种判决的代价因子 c_{ij} 外,还必须知道假设 H_0 和假设 H_1 为真的先验概率 $P(H_0)$ 和 $P(H_1)$ 。当预先无法确定各个假设的先验概率 $P(H_j)$ 时,就不能应用贝叶斯准则。现在要讨论的极大极小化准则是在已经给定代价因子 c_{ij} , 但无法确定先验概率 $P(H_j)$ 的条件下的一种信号检测准则。该准则的含义是,在上述条件下可以避免可能产生的过分大的代价,使极大可能代价极小化,所以称为极大极小化准则。因此,极大极小化准则是在先验概率未知,风险函数为已知的情况下采用的一种判决准则。

在实际工程中,例如,在雷达观测中,敌机出现或不出现的先验概率是很难确定的。在博弈中,也是很难正确估计对方出某牌的先验概率。这时,一种合理的办法是使可能出现的最大风险达到极小,这就是极大极小化准则。

为了说明极大极小化准则,还是从例 1.2 这种根据一次观测做出判决的例子入手。在例 1.2 中,已假定 $c_{11} = c_{00} = 0$ 。如果先验概率 $P(H_1)$ 已知,则可采用贝叶斯准则,此时根据式(1-28),判决规则为

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{1}{2} + \sigma^2 \ln \left[\frac{c_{10}}{c_{01}} \cdot \frac{1 - P(H_1)}{P(H_1)} \right] = \beta \quad (1-51)$$

根据式(1-6),贝叶斯风险为

$$\bar{R} = c_{10} \cdot P(D_1|H_0)[1 - P(H_1)] + c_{01}P(D_0|H_1)P(H_1) \quad (1-52)$$

在本例中,令 $c_{10}=1, c_{01}=2$,利用例 1.2 中式(1-29)可以计算出虚警概率 $P(D_1|H_0)$ 和漏报概率 $P(D_0|H_1)$,从而根据式(1-52)计算出 \bar{R} 随 $P(H_1)$ 变化的曲线,如图 1.9 曲线 A 所示。由于采用贝叶斯准则,门限值 β 与先验概率 $P(H_1)$ 有关,因而 $P(D_1|H_0)$ 和 $P(D_0|H_1)$ 也与先验概率有关。当 $P(H_1) \rightarrow 0$ 时,根据式(1-10)中 $\Lambda_0 \rightarrow \infty, P(D_1|H_0) \rightarrow 0$,由式(1-52)可知 $\bar{R} \rightarrow 0$ 。同理,当 $P(H_1) \rightarrow 1$ 时, $\Lambda_0 = 0, P(D_0|H_1) \rightarrow 0$,也有 $\bar{R} \rightarrow 0$ 。所以, \bar{R} 随 $P(H_1)$ 变化曲线,应在区间 $[0, 1]$ 内某点达到极值,这就是最大的贝叶斯风险。本例中,当 $P(H_1) = 0.4$ 时达到最大贝叶斯风险,其值为 0.42。

综上所述,如果先验概率 $P(H_1)$ 未知,一般说来就无法使用贝叶斯准则。一种可能的办法是先猜测先验概率为 $\hat{P}(H_1)$,在此基础上使用贝叶斯准则,确定门限 Λ_0 ,从而相应地确定错误概率 $P(D_1|H_0)$ 和 $P(D_0|H_1)$ 。也就是说,所讨论的极大极小化准则,是在已经规定代价因子 c_{ij} ,但无法确定先验概率 $P(H_j)$ 条件下制定的一种准则。它的“最佳”含义是在上述条件下可以避免可能产生的过分大的代价,使极大可能代价极小化。在本例中,假定 $\hat{P}(H_1) = 0.2$ 。当真实 $P(H_1)$ 值等于猜测值 $\hat{P}(H_1)$ 时,平均风险 \bar{R} 应等于贝叶斯风险,其值如图 1.9 中 M 点所示,它应在曲线 A 上。但当真实 $P(H_1)$ 值与猜测值 $\hat{P}(H_1)$ 不一致时,其平均风险 \bar{R} 可根据式(1-52)算出,显然它是 $P(H_1)$ 的线性函数。于是, \bar{R} 随 $P(H_1)$ 变化的曲线应当是过 M 点的一条直线。现在把贝叶斯风险曲线 A 记为 $\bar{R}_{\min}[P(H_1)]$,把 $P(H_1)$ 与猜测值 $\hat{P}(H_1)$ 不一致时的平均风险记为 $\bar{R}[\hat{P}(H_1), P(H_1)]$ 。由于贝叶斯风险是最小风险,显然有

$$\bar{R}[\hat{P}(H_1), P(H_1)] \geq \bar{R}_{\min}[P(H_1)] \quad (1-53)$$

例如,在图 1.9 中,设真实先验概率 $P(H_1) = 0.3$,则此时的贝叶斯风险如图上所标的 O 点所示;猜测值 $\hat{P}(H_1) = 0.2$,而 $P(H_1) = 0.3$ 时的平均风险如图上所标的 N 点所示,由上式

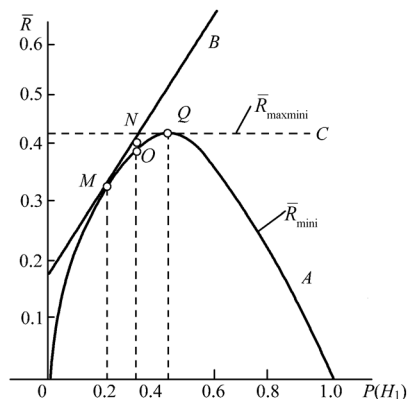


图 1.9 极大极小化解实例

A: 贝叶斯风险;

B: 一个特定判决门限的风险: $\hat{P}(H_1) = 0.2$

C: 极大极小化风险。

可知, N 点处于 O 点的上方。于是, $\bar{R}[\hat{P}(H_1), P(H_1)]$ 对 $P(H_1)$ 的变化曲线应当是在 $\hat{P}(H_1)$ 点处与曲线 A 相切的一条直线,如图 1.9 中的直线 B 所示。

从图 1.9 中的实例可以看出,当 $P(H_1) \leq 0.35$ 时,未知先验概率情况下的风险仅略大于贝叶斯风险,但当 $P(H_1) > 0.4$ 以后,其风险将大大增加,也就是说,最大可能的风险将大大高于最大贝叶斯风险。为了使最大可能的风险极小化,可令 $\hat{P}(H_1) = 0.4$,即工作于最大贝叶斯风险处,如图 1.9 中的 Q 点所示。此时,无论真实的 $P(H_1)$ 等于多少,其风险将在曲线 C 上变化,总等于最大贝叶斯风险 0.42,这就满足了极大极小化准则。从该例中可看出,使最大风险极小化的极大极小化准则,等效于选择最不利的先验概率 $P(H_1)$,使贝叶斯风险极大化。当然,这种做法是保守的,但它可避免由于错误估计

$P(H_1)$ 而带来的更大风险。

综上所述,极大极小化准则的本质在于,当假设 H_1 和 H_0 的先验概率未知时,寻求最大可能风险的极小化,等效于从贝叶斯解中寻求最不利的先验概率。为此,应当寻求式(1-52)对 $P(H_1)$ 的极值,这又等效于求解 $d\bar{R}/dP(H_1) = 0$ 。由于式(1-52)中 $P(D_1|H_0)$ 和 $P(D_0|H_1)$ 均为 $P(H_1)$ 的复杂的函数,在数学上求解十分困难。为了求出极大极小化解,假定事先已给定 $\hat{P}(H_1)$,因而式(1-52)中 $P(D_1|H_0)$ 和 $P(D_0|H_1)$ 也相应确定了。于是式(1-52)变为在 $\hat{P}(H_1)$ 点处与曲线 A 相切的直线方程。直线方程的斜率可用 $d\bar{R}/dP(H_1)$ 表示,仅当 $P(H_1)$ 等于最不利先验概率时, $d\bar{R}/dP(H_1) = 0$ (注意,此时两种错误概率均应看做常数)。对式(1-52)求导,有

$$d\bar{R}/dP(H_1) = -c_{10}P(D_1|H_0) + c_{01}P(D_0|H_1) = 0 \quad (1-54)$$

由式(1-55),极大极小化解可写为

$$c_{10}P(D_1|H_0) = c_{01}P(D_0|H_1) \quad (1-55)$$

它表示两类错误的平均代价相等,即两种假设下的条件代价 r_0 和 r_1 相等。

将式(1-55)代入式(1-52),可求出极大极小化准则的风险为

$$\bar{R} = c_{10}P(D_1|H_0) = c_{01}P(D_0|H_1) \quad (1-56)$$

由于极大极小化准则是选择最不利先验概率的贝叶斯准则,因而也可看做似然比准则的特性,其实现框图与图 1.6 相同,但要注意 $\Delta_0 = P(H_0)c_{10}/P(H_1)c_{01}$ 中 $P(H_0)$ 和 $P(H_1)$ 应选为最不利先验概率。

【例 1.5】 二元通信系统通常采用如下代价因子

$$c_{00} = c_{11} = 0, c_{10} = c_{01} = 1$$

对于这种系统,如果采用极大极小化准则,即由式(1-55),极大极小化代价的条件为

$$P(D_1|H_0) = P(D_0|H_1)$$

即两类错误的概率相等。由式(1-56),极大极小化风险为

$$\bar{R} = \frac{1}{2}[P(D_1|H_0) + P(D_0|H_1)] \quad (1-57)$$

即等于平均错误概率。由式(1-57)还可看出,本例情况下的最不利先验概率为

$$P(H_1) = P(H_0) = 1/2$$

1.3.4 奈曼-皮尔逊准则(Neyman Pearson Criterion)

由上述讨论可以看到,使用贝叶斯准则要知道各假设的先验概率 $P(H_j)$,并对每种可能的判决赋予代价因子 c_{ij} 。在先验概率不知道的情况下,可使用极大极小化准则。但在有些情况下,如雷达信号检测,要知道先验概率和指定代价都是很困难的。这时不能再使用最大后验概率准则或极大极小化准则,而必须使用既不包括先验概率,也不估计代价的最佳准则。那么如何分割样本空间呢? 奈曼-皮尔逊提出,按照给出预定的虚警概率划分空间,而且以虚警概率相同,漏报概率最小为最佳准则。这个准则可表述为:在给定虚警概率 $P(D_1|H_0)$ 约束条件下,使检测概率 $P(D_1|H_1)$ 达到最大。在雷达系统中,由于虚警造成干扰,并使计算机过载,必须限制虚警次数足够小。同时,希望检测概率尽可能大,以便及早可靠地发现目标。因而在雷达系统中,几乎无例外采用奈曼-皮尔逊准则。

在数学上,奈曼-皮尔逊准则可表示为:在 $P(D_1|H_0) = \alpha$ 的约束条件下使检测概率 $P(D_1|H_1)$ 达到极大,或使漏报概率 $P(D_0|H_1)$ 达到极小的检验。这是一个有约束条件的变

分问题,其解的必要条件是应用拉格朗日(Largrange)乘子 $\mu(\mu>0)$ 构造的新的目标函数

$$Q = P(D_0 | H_1) + \mu P(D_1 | H_0) \quad (1-58)$$

达到极小。另一方面,在平均风险表达式(1-6)中,如果令 $c_{00} = c_{11} = 0, P(H_0)_{c_{10}} = \mu, P(H_1)_{c_{01}} = 1$, 则贝叶斯准则应使平均风险

$$\bar{R} = P(D_0 | H_1) + \mu P(D_1 | H_0) \quad (1-59)$$

达到极小。显然,式(1-58)与式(1-59)完全相同,因而,奈曼-皮尔逊准则就是当 $P(H_0)_{c_{10}} = \mu, P(H_1)_{c_{01}} = 1$ 条件下的贝叶斯准则,从而也是似然比准则的特例。此时,根据式(1-10),有

$$\Lambda_0 = P(H_0)_{c_{10}} / P(H_1)_{c_{01}} = \mu$$

于是,判决规则可写为

$$\Lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \mu \quad (1-60)$$

同样,应用奈曼-皮尔逊准则的最佳接收机仍如图 1.6 所示。应当指出,当 $\mu=1$ 时,奈曼-皮尔逊准则变为直接比较两种假设下的似然函数 $p(x|H_1)$ 和 $p(x|H_0)$, 这就是所谓最大似然准则。这种准则是奈曼-皮尔逊准则的特例,也应用于不知道先验概率和代价因子的场合。

【例 1.6】 仍然讨论例 1.2 中的问题,但采用奈曼-皮尔逊准则。此时,要求根据一次观测数据 x , 在 $P(D_1 | H_0) = 0.1$ 的条件下,最佳地对如下两个假设做出判决

$$H_0 : s = 0, \quad H_1 : s = 1$$

本例中,假定加性噪声服从均值为零、方差 $\sigma^2 = 2$ 的高斯分布,于是似然函数为高斯函数,即

$$p(x|H_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{4}\right)$$

$$p(x|H_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[\frac{-(x-1)^2}{4}\right]$$

似然比为

$$\Lambda(x) = p(x|H_1) / p(x|H_0) = \exp\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

若

$$\exp\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) \geq \Lambda_0$$

则判决 H_1 为真,反之判决 H_0 为真。上述判决式等效于

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{1}{2} + 2\ln\Lambda_0 = \beta$$

对于奈曼-皮尔逊准则,门限 Λ_0 或 β 的选择应满足虚警概率的约束条件,即

$$P(D_1 | H_0) = 0.1 = \int_{D_1} p(x|H_0) dx = \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{4}\right) dx = \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)$$

从而算出 $\beta=1.8$ 。于是判决规则为: $x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 1.8$ 。此时检测概率为

$$P(D_1 | H_1) = \int_{D_1} p(x|H_1) dx = \int_{1.8}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{-(x-1)^2}{4}\right) dx = 0.285$$

综合上所述,上述各种准则可归纳为:(1)计算似然比 $\Lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}$; (2)根据不同的

准则计算出门限值 Λ_0 (其中,贝叶斯准则由代价和先验概率决定,最大后验概率准则由先验概率决定,奈曼-皮尔逊准则由虚警概率决定),最后做出判决:

$$\begin{cases} \Lambda(x) > \Lambda_0 & \text{判决目标存在} \\ \Lambda(x) < \Lambda_0 & \text{判决无目标} \end{cases}$$

1.4 多元信号检测及其最佳准则

上节所述双择检测问题中信息传输系统发送端的真实状态是二元的,即 $s = (s_0, s_1)$ 。但在实际工程中,常常存在发送端的真实状态是多元的情况。例如,通信中可能不是使用二进制,而是使用四相码,这时 $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ 。在雷达中,要判定目标处于 m 个距离单元中哪一个单元,也属于 m 元信号检测问题,或称多择检测问题。显然,双择检测问题是多元信号检测问题当 $m=2$ 时的特殊情况。由于发送端的 m 个状态 $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ 可看做 m 个假设 H_1, H_2, \dots, H_m ,而由于噪声等随机因素的影响,判决哪一个假设为真是一个统计学问题,因而多元信号检测问题实质上是多元假设检验问题。此时,信号空间和判决空间的元素均为 m 个。因而对 m 元假设检验,总共有 m^2 种可能的判决情况,其中正确判决 m 种,错误判决 $m^2 - m = m(m-1)$ 种。考虑到多元信号检测的实际应用,下面仅介绍多元信号检测的贝叶斯准则和最大后验概率准则。

1.4.1 多择—贝叶斯准则

与双择检测情况一样,可以采用贝叶斯准则,使判决的平均风险达到极小。在多元信号检测的情况,仍然假定 m 个假设中只能有且必有一个假设为真,因而

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_m) = 1 \quad (1-61)$$

设 c_{ij} 是 H_j 假设为真而选择了 H_i 的代价,于是,平均风险可写为

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} P(D_i | H_j) P(H_j) \quad (1-62)$$

式(1-62)是代价因子 c_{ij} 对所有假设与所有判决的统计平均,双择检测情况下的平均风险表达式(1-6)显然为其特例。贝叶斯准则是使式(1-62)的平均风险达到极小的最佳判决准则。

应用与例 1.1 和例 1.2 相似的步骤,可以得出多元假设的贝叶斯检验规则。如果已知接收端输入矢量为 \mathbf{x} ,而做出的判决是 H_i 为真,则与判决 D_i 相联系的条件代价为

$$c_i = \sum_{j=1}^m c_{ij} P(H_j | \mathbf{x}) \quad (1-63)$$

式中, $P(H_j | \mathbf{x})$ 表示给定 \mathbf{x} 后 H_j 为真的条件概率,亦称假设 H_j 的后验概率。应当指出,式(1-63)所示的条件代价,是双择检测下定义的条件代价式(1-18)和式(1-63)在多元信号检测情况下的推广。与双择检测情况类似,只要每次判决都是在已知输入矢量 \mathbf{x} 条件下选取条件代价 c_i 最小的假设 H_i ,必能保证式(1-62)的平均风险达到极小。于是,贝叶斯检验变为将与每个假设 H_i 相联系的条件代价 c_i 进行比较,取其最小者作为判决的结果。根据条件概率乘法公式,我们有

$$P(H_j | \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | H_j) P(H_j)}{p(\mathbf{x})} \quad (1-64)$$

式中, $p(\mathbf{x} | H_j)$ 是假设 H_j 为真条件下 \mathbf{x} 的概率密度函数,即似然函数; $p(\mathbf{x})$ 为输入矢量 \mathbf{x} 的先验密度函数。于是,式(1-63)可写为

$$c_i = \sum_{j=1}^m \frac{c_{ij} p(\mathbf{x} | H_j) P(H_j)}{p(\mathbf{x})} \quad (1-65)$$

它是贝叶斯平均代价的可变项。由于 $p(x)$ 与假设无关,按贝叶斯准则要求式(1-63)达到最小,因而选择 c_i 最小等效于选择

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^m c_{ij} p(x | H_j) P(H_j) \quad (1-66a)$$

最小。于是,应当使满足

$$\lambda_i = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \quad (1-66b)$$

的 x 划归 D_i 域,并判 H_i 成立。即当满足 $\lambda_i \neq \lambda_j, j=1, 2, \dots, m$, 但 $i \neq j$ 时,判 H_i 成立。可见,贝叶斯检验变为计算式(1-66a)的 λ_i ,并判决 λ_i 为最小的那个假设 H_i 为真。显然,双择检测贝叶斯检验表达式(1-8),是式(1-66a)的特例。

1.4.2 多择一最大后验概率准则

与双择情况一样,应用多择一贝叶斯准则,需要同时知道各假设的先验概率和各种错误的代价。如果并不知道代价因子,则可采用多择最大后验概率准则。此时,假定 $c_{ii}=0, c_{ij}=1 (i \neq j)$,即正确判决无代价,各种错误的代价相等并为 1,则贝叶斯准则的式(1-66a)变为

$$\lambda_i = \sum_{j=1, j \neq i}^m P(H_j) p(x | H_j) \quad (1-66c)$$

判决设备的作用是在 λ_i 中选择其最小值 $\lambda_k = (\lambda_i)_{\min}$,即 $\lambda_i - \lambda_k \geq 0 (i \neq k)$,这等效于寻求 λ_k ,以满足

$$\lambda_i - \lambda_k = P(H_k) p(x | H_k) - P(H_i) p(x | H_i) \geq 0 \quad (1-67)$$

即对所有的 $i \neq k$ 有

$$P(H_k) p(x | H_k) \geq P(H_i) p(x | H_i) \quad (1-68)$$

于是,选择 λ_i 最小值,相当于选择 $p(H_i) p(x | H_i)$ 的最大值。根据式(1-64),这又相当于选择 $P(H_i | x) p(x)$ 的最大值。由于 $p(x)$ 与假设无关,因而结论是:选择 λ_i 最小值等效于选择后验概率 $P(H_i | x)$ 的最大值。由此可知,当代价为 $c_{ij}=1 (i \neq j)$ 和 $c_{ii}=0$ 时,贝叶斯准则便蜕化为最大后验概率准则。此时,相应的判决设备将计算各假设的后验概率,并选其最大值,如图 1.10 所示。应当指出,这里叙述的 m 元信号检测情况下的最大后验概率准则,是 1.4.2 节中二元信号情况的自然推广。

如果不仅不知道各种错误的代价 c_{ij} ,也不知道各假设的先验概率,则无法使用最大后验概率准则。此时,可行的办法是假定各假设先验概率相等,即 $P(H_i)=1/m$ 。于是,根据式(1-64),使 $P(H_i | x)$ 最大,等效于使似然函数 $p(x | H_i)$ 最大。这时判决准则变为最大似然准则,相应的判决设备称为最大似然最佳检测器,如图 1.11 所示,在 m 元通信系统中,常常采用这一准则。

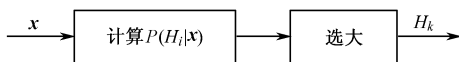


图 1.10 最大后验概率最佳检测器

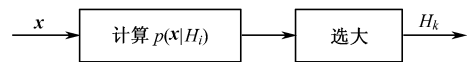


图 1.11 最大似然最佳检测器

m 元假设检验可以用于参量仅有 m 种可能取值时的参量估计问题。例如,测量雷达至目标的距离,可以把目标的可能距离分成 m 个单元,并判定某个单元是否有目标,从而实现目标距离的粗略估计。但是,一般来说,参量估计问题与多元假设检验不同,此时,发送端可能的状态是无限多个,判决结果也是无限多个。尽管如此,参量估计问题可看成是多元假设检验的拓

展,因而本节中所述的概念可以很自然地应用到参量估计。

【例 1.7】 根据 n 维输入矢量 \mathbf{x} 设计一种最佳检测器,对下述四种假设做出判决: H_1 —均值为 1; H_2 —均值为 2; H_3 —均值为 3; H_4 —均值为 4。各假设下的条件概率密度函数是高斯的,方差为 σ^2 ,假定所有假设的先验概率相等,且 $c_{ij}=1(i \neq j), c_{ii}=0$ 。

根据上述代价因子和先验概率的假定,此时贝叶斯准则蜕化为最大似然准则,即选择 $p(\mathbf{x}|H_i)$ 最大的假设 H_i 可使平均风险达到极小。

与例 1.4 式(1-43)相似, n 维观测矢量 \mathbf{x} 的各假设下的似然函数可写为

$$p(\mathbf{x}|H_k) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - k}{\sigma}\right)^2\right] \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

式中 $s_k = \begin{cases} 1, k=1 & (\text{假设 } H_1) \\ 2, k=2 & (\text{假设 } H_2) \\ 3, k=3 & (\text{假设 } H_3) \\ 4, k=4 & (\text{假设 } H_4) \end{cases}$

在选择最大似然函数时,公有的常数项 $(1/2\pi\sigma_n^2)^{n/2}$ 可以消去而不予考虑。而且,式中的指数运算是相同的,指数中的分母 $2\sigma_n^2$ 也是相同的。这样选择最大似然函数等价于选择

$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - k}{\sigma}\right)^2$ 的最小值,又因为

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - k}{\sigma}\right)^2 = \frac{E}{\sigma^2} - \left(\frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i k - \frac{n}{\sigma^2} k^2\right)$$

式中, $E = \sum_{i=1}^n x_i^2$ 与假设 H_k 无关,判决规则变为选择上式右端括号部分的最大值,即

$$\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i k - k^2$$

为最大的假设 H_k 。因而,判决规则为

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i - 1, & \quad \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n x_i - 4 \\ \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n x_i - 9, & \quad \frac{8}{n} \sum_{i=1}^n x_i - 16 \end{aligned}$$

于是选择假设 H_1 成立的判决规则由求解下列联立方程获得

$$\begin{cases} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k - 1 \geq \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n x_k - 4 \\ \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k - 1 \geq \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n x_k - 9 \\ \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k - 1 \geq \frac{8}{n} \sum_{k=1}^n x_k - 16 \end{cases}$$

并选择其中最大者所对应的假设 H_k 。若选择假设 H_1 成立,即 $p(\mathbf{x}|H_1)$ 最大,则等价地有 $\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k - 1$ 最大,等效于 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq 1.5$ 。这相应于将统计量 $m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, 即样本均值与门限值 1.5 比较,如上式成立,则选择假设 H_1 。同样可证明,判决各假设为真的区域应做如下划分

$$D_1 : m_x \leq 1.5$$

$$D_2 : 1.5 < m_x \leq 2.5$$

$$D_3 : 2.5 < m_x \leq 3.5$$

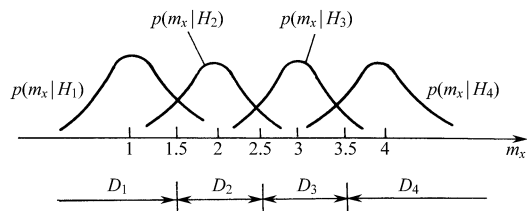
$$D_4 : m_x > 3.5$$

根据概率论中的推导, 高斯随机变量之和的分布仍然是高斯的, 因而 m_x 在各假设下的分布 $p(m_x | H_k)$ 均是高斯的, 且其方差为 σ^2/n , 其均值分别为 1, 2, 3, 4。于是

$$p(m_x | H_k) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(m_x - k)^2\right], \quad k = 1, 2, 3, 4$$

并示于图 1.12 上, 判决区域 D_k 也一并示出。

从图 1.12 还可看出, m 元假设检验的实质是把输入空间划分成 m 个区域, 并在各区域判决相应的假设为真。并可求出各判决概率 $p(D_i | H_j)$ 为



$$p(D_i | H_j) = \int_{D_i} p(D_i | H_j) dD_i, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

最小至均错误概率为

$$p_e = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 p(D_i | H_j) \quad (j \neq i)$$

图 1.12 例 1.7 各假设下统计量 m_x 的分布函数和判决区域图示

1.5 随机参量信号的检测

在前面所述的二元和 m 元信号检测问题中, 在此之前考虑的假设是简单假设, 即每种假设下的信号波形都认为是确知的。但在实际工程问题中, 常常需要研究信号参量未知或信号参量为随机变量时的检测问题。例如, 雷达的回波信号, 不仅是信号有、无的问题, 而且在有信号存在的情况下, 其初相角、幅度、频率、到达时间等参量一般来说也都是不确定的。对于这种情况, 原则上可以给每个未知参量的所有可能取值规定一个假设。例如, 在雷达中, 在假设 H_1 下 (即目标存在条件下) 目标回波可写为

$$s(t; A, \theta, t_0, f) = A \Re[s(t - t_0) e^{j(2\pi ft + \theta)}] \quad (1-69a)$$

式中, 目标回波幅度 A , 回波到达时间 t_0 , 回波初始相位 θ 和回波频率 f 都可能是未知的或随机的, 无法事先预言其取值。通常, 假定这些未知量为具有这类分布规律的随机变量, 称为随机参量。为了与前面讲的简单假设相区别, 称这种含有随机参量的假设为复合假设。其似然函数同一个或多个未知参量有关。因此, 当接收信号含有未知参量时, 最佳检测系统的设计中就要求把简单假设检验的概念做进一步推广, 使其适用于多参量信号检测的情况。于是, 在假设 H_i 下的观测信号可表示为

$$H_i : x_k = s_i(t_k; A, \theta, t_r, f) + n_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1-69b)$$

这样, n 维观测矢量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的统计特性不仅与观测噪声 $n_k, k = 1, 2, \dots, n$ 的统计特性有关, 而且受信号的未知参量控制。例如, 通常假定回波相位 θ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布。幅度 A 的分布随目标的特性而异。一般来说, 在假设 H_j 下信号可写为

$$s(t; \mathbf{a}) = s(t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (1-69c)$$

式中, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$ 表示随机参量矢量。例如, 在雷达回波情况下, α_1 可以表示相位 θ , α_2 表示回波幅度 A 等。由此可知, 假设 H_j 下的信号是一个信号集, 其中随机参量可以取所研究范围内的任何值, 称这样的假设 H_j 是一个复合假设。

应当指出, 可以用多元假设检验解决随机参量信号的检测问题, 这时, 只要将随机参量矢量 α 的每个可能取值形成一个假设 $H_j (j=1, 2, \dots)$, 则可用多元假设检验判决信号的存在并确定随机参量矢量 α 。这相当于同时检测信号并估计其参量。但是, 当随机参量的取值连续分布在很宽的范围时, 假设 H_j 的数量将会很大, 因而求解十分复杂。在许多实际情况下, 随机参量的数值本身无关紧要, 例如, 雷达回波的初相我们并不关心, 而关心的仅是回波存在与否, 这时面临的问题就是复合假设检验问题。

在下面的讨论中为简单起见, 设假设 H_0 下信号不具有随机参量, 即假设 H_0 仍为前面所述的简单假设检验。简单假设检验是解决单个确知信号的存在问题, 而复合假设检验是解决依赖于—组参量的一个信号集的存在问题。在复合假设检验问题中, 发送端的状态 s 可能有无限多个, 在这里, s 取决于随机参量矢量 α 的取值。但在接收端, 只需判决有无信号存在, 而无须估计 α 的具体数值, 因而有别于参量估计问题。从决策理论上讲, 此时信号空间元素虽有无限多个, 但判决空间元素只有两个: D_0 和 D_1 。

在本节中, 我们仅讨论双择检测中的复合假设检验问题, 而且仅讨论假设 H_1 为复合假设, H_0 为简单假设的情况。事实上, 下面的分析方法可以直接应用于多元复合假设检验问题, 其中每一个假设都可以是复合假设。与简单假设检验问题一样, 研究复合假设检验问题也从贝叶斯准则入手。

1.5.1 贝叶斯准则

设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$ 表示与假设 H_1 有关的随机参量矢量, $p(\alpha)$ 表示随机参量矢量 α 的 m 维联合先验概率密度。对于代价因子, 因 H_0 是简单假设, 而 c_{00} 和 c_{10} 与 α 无关。但在假设 H_1 下, c_{01} 和 c_{11} 可能是 α 的函数, 即对于不同的参量代价可能不同, 因而可写成 $c_{01}(\alpha)$ 和 $c_{11}(\alpha)$ 。

由于信号参量的随机性, 在假设 H_1 下的输入矢量 x 的条件分布密度依赖于随机参量的取值, 即假设 H_1 下的似然函数可表示为 $p(x|\alpha, H_1)$ 。由于 H_0 是简单假设, 其似然函数仍可写为 $p(x|H_0)$ 。

在双择检测情况下, 平均风险表达式(1-6)对复合假设检验仍然适用, 但在求假设 H_1 下的条件代价时, 需对随机参量 α 再平均。于是有

$$\begin{aligned} \bar{R} = & P(H_0)c_{00} \int_{D_0} p(x|H_0) dx + P(H_0)c_{10} \int_{D_1} p(x|H_0) dx + \\ & P(H_1) \int_{D_0} \int_{(\alpha)} p(x|\alpha, H_1) p(\alpha) c_{01}(\alpha) d\alpha dx + \\ & P(H_1) \int_{D_1} \int_{(\alpha)} p(x|\alpha, H_1) p(\alpha) c_{11}(\alpha) d\alpha dx \end{aligned} \quad (1-70)$$

式中, \int_{D_0} 和 \int_{D_1} 表示 n 维输入矢量在判决区域内的 n 重积分, $\int_{(\alpha)}$ 表示 m 维随机参量矢量在可能的取值范围内的 m 重积分。由于

$$\left. \begin{aligned} \int_{D_0} p(x|H_0) dx &= 1 - \int_{D_1} p(x|H_0) dx \\ \int_{D_0} p(x|\alpha, H_1) dx &= 1 - \int_{D_1} p(x|\alpha, H_1) dx \end{aligned} \right\} \quad (1-71)$$

将式(1-71)代入式(1-70),得到平均风险表达式为

$$\bar{R} = P(H_0)c_{00} + P(H_1) \int_{\{\alpha\}} p(\alpha)c_{01}(\alpha)d\alpha + \int_{D_1} \{P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0) - P(H_1) \int_{\{\alpha\}} p(x|\alpha, H_1)p(\alpha)[c_{01}(\alpha) - c_{11}(\alpha)]d\alpha\} dx \quad (1-72)$$

贝叶斯准则要求寻求判决区域 D_1 , 使式(1-72)的平均风险 \bar{R} 达到极小。由于式(1-72)中前两项与 D_1 的选择无关, 因而选择 D_1 使 \bar{R} 极小, 就等效于选择 D_1 使第三项中被积函数在该区域内总为负或零。设正确判断的代价总小于错误判断的代价, 即有

$$c_{10} - c_{00} > 0, c_{01}(\alpha) - c_{11}(\alpha) > 0$$

于是第三项中被积函数两项均为正函数。这样, 判决规则变为

$$\frac{P(H_1) \int_{\{\alpha\}} p(x|\alpha, H_1)p(\alpha)[c_{01}(\alpha) - c_{11}(\alpha)]d\alpha}{P(H_0)(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 1$$

上式又可等效地写为

$$\frac{\int_{\{\alpha\}} p(x|\alpha, H_1)p(\alpha)[c_{01}(\alpha) - c_{11}(\alpha)]d\alpha}{(c_{10} - c_{00})p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \quad (1-73)$$

式中, 左边部分称为代价似然比。式(1-73)是比简单假设条件下的似然比判决式(1-10)更为广泛的判决规则。如果令式(1-73)中 $p(\alpha)$ 为 δ 函数, 则假设 H_1 变为简单假设, 式(1-73)便蜕化为式(1-10)。

如果代价函数同未知参量 α 无关, 即 $c_{01}(\alpha) = c_{01}, c_{11}(\alpha) = c_{11}$, 则判决规则变为

$$\frac{\int_{\{\alpha\}} p(x|\alpha, H_1)p(\alpha)d\alpha}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} \quad (1-74)$$

由于

$$p(x|\alpha, H_1)p(\alpha) = p(x, \alpha|H_1)$$

且

$$\int_{\{\alpha\}} p(x, \alpha|H_1)d\alpha = p(x|H_1)$$

则式(1-74)所示判决规则变为

$$\Lambda(x) \triangleq \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} \quad (1-75)$$

式(1-75)与简单假设下的贝叶斯判决规则式(1-10)在形式上完全一致。但要注意两点。第一, 只有当先验密度函数 $p(\alpha)$ 已知, 且代价函数与参量无关时, 复合假设检验才具有与简单假设检验相同的似然比检验形式。第二, 在复合检验时的似然比 $\Lambda(x)$, 是对所有可能参量 α 取平均而求得。为了进一步说明这一点, 我们应用式(1-74)和式(1-75), 有

$$\Lambda(x) = \frac{\int_{\{\alpha\}} p(x|\alpha, H_1)p(\alpha)d\alpha}{p(x|H_0)} = \int_{\{\alpha\}} \Lambda(x|\alpha)p(\alpha)d\alpha \quad (1-76a)$$

式中

$$\Lambda(x|\alpha) = p(x|\alpha, H_1)/p(x|H_0) \quad (1-76b)$$

表示在给定参量 α 条件下(即简单假设下)的似然比。由式(1-76)可知, 复合假设下的似然比 $\Lambda(x)$, 是给定参量 α 条件下的似然比对 α 的平均, 因而称为平均似然比。

在复合假设情况下, 漏报概率只能对给定的参量 α 求出, 记为

$$P(D_0|\alpha, H_1) = \int_{D_0} p(x|\alpha, H_1)dx \quad (1-77a)$$

因而漏报概率是随机参量矢量 α 的函数。如果 H_0 是简单假设,虚警概率仍可写为

$$P(D_1|H_0) = \int_{D_1} p(x|H_0) dx \quad (1-77b)$$

以上讨论的是复合假设条件下的贝叶斯检验。它不仅要求知道代价函数和两种假设的先验概率,还要求知道随机参量的先验密度函数 $p(\alpha)$ 。如果仅知道代价函数,而不知道先验概率 $P(H_0)$ 及 $P(H_1)$ 和先验密度函数 $p(\alpha)$,则可利用与 1.3.3 节简单假设下极大极小化准则相似的方法,寻求贝叶斯风险达到最大值时的先验概率和先验密度函数。对于特定的先验概率 $P(H_1)$,使贝叶斯风险 R_{\min} 达到极大值的先验密度函数 $p(\alpha)$,称为参量 α 的最不利分布。有时,最不利分布 $p(\alpha)$ 可以通过观察由经验确定,因为对于大量的问题极难用理论计算确定。一旦先验密度函数 $p(\alpha)$ 已知,则可按 1.3.3 节的办法寻求最不利先验概率和极大极小化风险。

与简单假设情况类似,如果代价函数和先验概率均不知道,则应采取奈曼-皮尔逊准则。

1.5.2 奈曼-皮尔逊准则

如果假设 H_1 是复合假设, H_0 是简单假设,则根据式(1-77a)和式(1-77b),第一类错误(即虚警)概率 $P(D_1|H_0)$ 与随机参量矢量 α 无关,而第二类错误(即漏报)概率 $P(D_0|\alpha, H_1)$ 是 α 的函数。奈曼-皮尔逊准则要求这样来选择判决区域 D_0 和 D_1 : 在 $P(D_1|H_0)$ 给定条件下使平均检测概率达到极大,亦即使平均漏报概率达到极小。平均检测概率可写成

$$E[P(D_1|\alpha, H_1)] = \int_{(\alpha)} P(D_1|\alpha, H_1) p(\alpha) d\alpha = \int_{D_1} \int_{(\alpha)} p(x|\alpha, H_1) p(\alpha) d\alpha dx \quad (1-78)$$

如果随机参量矢量的先验分布 $p(\alpha)$ 未知,则无法计算平均检测概率或平均漏报概率。于是,即使采用奈曼-皮尔逊准则,也无法避开随机参量的先验分布 $p(\alpha)$ 未知的问题。为了解决这一问题,下面分几种情况予以研究。

一种最简单的情况是,在给定 $P(D_1|H_0)$ 条件下,不论 α 为何值,判决区域 D_0 和 D_1 的划分,总可以使 $P(D_0|\alpha, H_1)$ 达到最小。也就是说,对于某一特定问题,如果存在一种奈曼-皮尔逊检验,可用同一种判决区域的划分使 $P(D_1|\alpha, H_1)$ 达到最大而与 α 无关,则这个检验应对一切 α 值为最佳,因而对任何先验分布 $p(\alpha)$ 均为最佳。这种检验称为一致最大势^①检验。此时,不知道 $p(\alpha)$ 一点不影响判决过程。

【例 1.8】 作为一致最大势检验的例子,设观测矢量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的每个分量 x_i 为独立的具有方差 σ^2 的高斯随机变量,在假设 H_0 下其均值为零,在 H_1 下其均值为 $a > 0$ 。与例 1.4 式(1-43)一样,两种假设下的联合概率密度函数可写为

$$p(x|H_0) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\sum_{i=1}^n x_i^2 / (2\sigma^2)\right]$$

$$p(x|\alpha, H_1) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 / (2\sigma^2)\right]$$

注意,这里的不同点在于假设 H_1 下的均值 a 为随机变量矢量。与例 1.4 一样,对任意给定 α 值,最佳判决等效于计算观测样本的平均值,即

$$m_x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$$

^① 在统计学上,检验概率称为检验的热,虚警概率称为检验的尺度。

并与门限值 β 比较, 如果 $m_x \geq \beta$, 则判决 H_1 为真; 反之, 判决 H_0 为真。根据例 1.4 有

$$P(D_1|H_0) = \int_{\beta}^{+\infty} p(m_x|H_0) dm_x$$

式中, $p(m_x|H_0)$ 为零均值, 方差为 σ^2/n 的高斯分布。从上式可知, 门限值 β 完全由虚警概率 $P(D_1|H_0)$ 决定, 从而划分判决区域 D_0 和 D_1 的界面(参看例 1.4)

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\beta$$

也仅由 $P(D_1|H_0)$ 决定, 而与假设 H_1 下的真实均值 α 无关。由此可知, 这种检验的最佳判决与假设 H_1 下的先验分布 $p(\alpha)$ 无关, 从而是一致最大势检验。

在一般情况下, 一致最大势检验不存在, 对于不同的参量 α , 最佳地划分判决区域 D_0 和 D_1 的界面不同。例如, 如果已知本例中的随机参量 α 可能为正, 也可能为负, 就不存在一致最大势检验, 这在参考文献[21]中有详细讨论。在这种情况下, 一种可能的办法是, 事先选择一种合理的先验概率密度函数 $p(\alpha)$, 使得平均漏报概率

$$E[P(D_0|\alpha, H_1)] = \int_{\{\alpha\}} P(D_0|\alpha, H_1) p(\alpha) d\alpha = \int_{D_1} \int_{\{\alpha\}} p(x|\alpha, H_1) p(\alpha) d\alpha dx \quad (1-79)$$

达到极小。

应用与 1.5.1 节类似的方法可以证明, 对于给定的虚警概率 $P(D_1|H_0)$, 使平均漏极概率 $E[P(D_0|\alpha, H_1)]$ 达到极小的最佳判决, 等效于计算式(1-76a)的平均似然比 $\Lambda(x)$, 式中 $p(\alpha)$ 为所选定的先验分布, 然后与门限 Λ_0 比较, 如果 $\Lambda(x) \geq \Lambda_0$, 则选择 H_1 , 反之, 选择 H_0 。

如果选择一种合理的先验分布 $p(\alpha)$ 非常困难, 这时, 我们所能做的是, 在所有先验 $p(\alpha)$ 中, 找到某个 $w(\alpha)$, 使式(1-79)中的平均漏报概率达到最大。 $w(\alpha)$ 称为奈曼-皮尔逊准则下的最不利先验分布。应用这个分布的好处在于, 可以证明, 不管真实先验分布 $p(\alpha)$ 如何, 其平均漏报概率不可能超过使用最不利分布得到的漏报概率。这个命题类似于 1.3.3 节中的极大极小化准则, 但不同之处在于这里不是涉及代价函数和两个假设的先验概率, 而仅涉及参量 α 的先验分布。

当先验分布 $p(\alpha)$ 未知, 且不存在一致最大势检验的情况下, 另一种有效的办法是采用最大似然原理。此时, 先对 α 进行最大似然估计, 即求出满足关系式 $p(x|\hat{\alpha}, H_1) \geq p(x|\alpha, H_1)$ 的 $\hat{\alpha}$, 作为 α 的估计量; 然后把复合假设检验作为 α 已知的简单假设检验来处理, 即用广义似然比准则进行信号检测, 广义似然比写为

$$\Lambda(x) \triangleq \frac{\max_{\alpha} p(x|\alpha, H_1)}{p(x|H_0)} = \frac{p(x|\hat{\alpha}, H_1)}{p(x|H_0)} \quad (1-80)$$

应当指出, 应用最大似然原理, 把 $\hat{\alpha}$ 当做真实的 α , 由于不存在一致最大势检验, 检测的结果可能不是最佳的, 但一般接近于最佳。

【例 1.9】 在二元参量信号的统计检测中, 两个假设下的正态分布的信号分别为

$$H_0: x \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2), \quad H_1: x \sim \mathcal{N}(m, \sigma_n^2)$$

式中, 均值 m_x 是信号的参量。这样, 假设 H_0 是简单的, 而假设 H_1 是复合的。试建立 m_x 具有不同特性参量情况下的最佳信号检测方法。

解: 由观测信号知, 假设 H_0 下 x 的概率密度函数和假设 H_1 下 x 的条件概率密度函数(似然函数)分别为

$$p(x | H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p(x | m_x; H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

① 假定已知参量 m_x 的概率密度函数 $p(m_x)$ 为

$$p(m_x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{m_x}^2} \right)^{1/2} \exp\left[-\frac{m_x^2}{2\sigma_{m_x}^2}\right], \quad -\infty < m_x < +\infty$$

则似然比函数为

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x | m_x; H_1) p(m_x) dm_x}{p(x | H_0)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_n^2}\right) \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{m_x}^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_x^2}{2\sigma_{m_x}^2}\right) dm_x}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2\pi(\sigma_n^2 + \sigma_{m_x}^2)} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_{m_x}^2)}\right)}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)} \\ &= \left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \sigma_{m_x}^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2 \sigma_{m_x}^2}{2\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \sigma_{m_x}^2)}\right) \end{aligned}$$

若似然比检测门限为 Λ_0 , 则其自然对数并化简得判决表示式为

$$x^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{2\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \sigma_{m_x}^2)}{\sigma_{m_x}^2} \left[\ln\Lambda_0 + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sigma_{m_x}^2}{\sigma_n^2}\right) \right]$$

这样, 判决准则确定后, 门限 Λ_0 就定了, 上式可成为假设 H_1 成立, 还是假设 H_0 成立的判决了。

② 假定 $m_{x_0} \leq m_x \leq m_{x_1}$, 但不知其概率密度函数 $p(m_x)$ 。这里把 m_x 看作是取值在 $m_{x_0} \leq m_x \leq m_{x_1}$ 范围的未知信号参量。于是在取 m_x 为某个值的条件下, 采用奈曼-皮尔逊准则来建立其判决表示式。似然比为

$$\Lambda(x) = \exp\left[\frac{x^2}{2\sigma_n^2} - \frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_n^2}\right] = \exp\left[\frac{2m_x x - m_x^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

于是, 判决准则为

$$m_x - \frac{m_x^2}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \sigma_n^2 \ln\Lambda_0$$

现分为几种情况来讨论。

若 $m_{x_0} > 0$, 即 m_x 仅取非负值, 则判决规则为

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2 \ln\Lambda_0}{m_x} + \frac{m_x}{2} \triangleq \gamma^+$$

式中, γ^+ 表示信号参量 $m_x > 0$ 时检验统计量的检测门限, 其值本身可正可负。在这种情况下, 检测门限 γ^+ 决定于

$$\int_{\gamma^+}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}\right) dl = \alpha$$

的约束条件, 判决域划分如图 1.13(a) 所示。

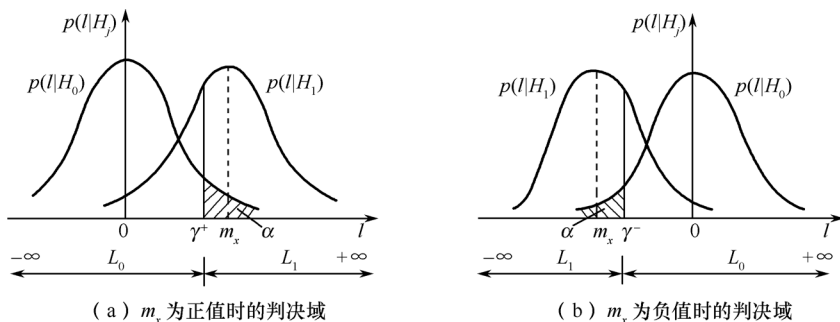


图 1.13 m_x 的正负与判决域划

若 $m_{x_1} < 0$, 即 m_x 仅取负值, 则判决规则为

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2 \ln \Lambda_0}{|m_x|} + \frac{|m_x|}{2} \triangleq \gamma^-$$

式中, γ^- 表示信号参量 $m_x < 0$ 时检验统计量的检测门限, 其值本身可正可负。在这种情况下, 检测门限 γ^- 决定于

$$\int_{-\infty}^{\gamma^-} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma_n^2}\right) dl = \alpha$$

的约束条件, 判决域划分如图 1.13(b) 所示。

上述结果表明: 若 m_x 仅取非负值, 即 $m_{x_0} > 0$, 则判决规则与 m_x 无关, 上述检验为一致最大功效检验, P_d 最大; 若 m_x 仅取负值, 即 $m_{x_1} < 0$, 上述检验也是一致最大功效检验, P_d 最大。若 m_x 仅取可正可负, 即 $m_{x_0} < 0, m_{x_1} > 0$, 则一致最大功效检验不存在。

当一致最大的功效检验存在时, 其检验性能与已知参量的检验一样好; 当一致最大功效检验不存在时, 若仍采用上述检验规则, 那么由于实际 m_x 的符号未知而可能带来极大的损失 (P_d 可能很小)。

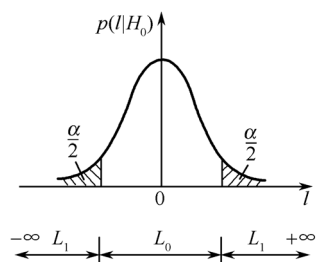


图 1.14 双边检测的判决域

③ 当一致最大功效不存在时, 可采用如图 1.14 所示的双边检验, 即将 α 等分在两边, 判决规则为

$$|x| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma$$

虽然双边检验比均值 m_x 假定为正确时的单边检验差, 但是比均值 m_x 假定错误时单边检验要好得多, 因此也不失是一种好的折中方法。

④ 当一致最大功效检验不存在时, 也可以采用广义似然比检验。将似然函数 $p(x|m_x, H_1)$ 对 m_x 求偏导, 并令结果等于零, 即

$$\left. \frac{\partial \ln p(x|m_x, H_1)}{\partial m_x} \right|_{m_x = \hat{m}_{xML}} = 0$$

解得单次观测的最大似然估计为 $\hat{m}_{ML} = x$, 代入广义似然比检验中, 得

$$x^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 2\sigma_n^2 \ln \Lambda_0 \triangleq \gamma^2 \quad \text{即} \quad |x| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma$$

可见这正是前面讨论过的双边检验。

1.6 误差的定义和分类

在统计学中,随机变量的性质不能靠子样本数据来精确确定。从有限个观察样本只能得到所研究参量的估计值。

参量估计就是利用样本数据来估计某些特定的参量(或称参数)。有两种参量估计的方法:点估计和区间估计。在点估计中,通常是寻求一估计量(或称估计子),它将给出待定参量的单个估计量,这一估计方法叫点估计。在区间估计中,我们确定的是待定参量可能位于的某个区间。这样一种区间估计方法叫做置信区间估计。

为了衡量各种估计的性能,需对估计的性质做若干定义。因为选择不同的最佳估计准则,得到的估计误差就不同。因此,我们在讨论信号参量估计理论之前首先介绍误差的定义、分类和信号参量估计性能,然后再讨论信号估计的基本理论中至关重要的各种最佳估计准则的选择等内容。

设 $\{x(t)\}$ 是一个与未知参量 α 有关的随机信号, x_1, x_2, \dots, x_n 是可以利用的随机样本数据。如果 n 个样本的某函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可以用来估计参量 α ,则称该样本函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是参量 α 的一个估计量,记做 $\hat{\alpha} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,用 $\hat{\alpha}$ 去估计参量 α 的方法称为点估计。

例如,考虑由信号 s 加零均值高斯白噪声 w_i 组成的观测样本 x_i 为

$$x_i = s + w_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

由于观测样本中的白噪声 w_i 的均值为零,所以信号 s 的一个可能估计是样本均值即

$$\hat{s}(x_1, x_2, \dots, x_n)/n = \bar{x}$$

因此 s 的估计量为

$$\hat{s} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)/n$$

因此,根据子样值计算的参量估计,其精度可由如下定义的均方误差来描述

$$\text{均方误差} = E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2] \quad (1-81)$$

式中, $\hat{\alpha}$ 是 α 的估计量。展开式(1-81),得

$$\begin{aligned} E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2] &= E\{[(\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}]) + (E[\hat{\alpha}] - \alpha)]^2\} \\ &= E[(\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}])^2] + 2E[(\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}])(E[\hat{\alpha}] - \alpha)] + E[(E[\hat{\alpha}] - \alpha)^2] \end{aligned}$$

上式的中间一项有等于零的因子,即

$$E[(\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}])(E[\hat{\alpha}] - \alpha)] = E[\hat{\alpha}] - E[\hat{\alpha}] = 0$$

因此,均方误差可以简化为

$$\text{均方误差} = E[(\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}])^2] + E[(E[\hat{\alpha}] - \alpha)^2] \quad (1-82)$$

其中,式(1-82)第一部分是描述误差中随机部分的方差项,即

$$\text{Var}[\hat{\alpha}] = E[(\hat{\alpha} - E[\hat{\alpha}])^2] = E[\hat{\alpha}^2] - E^2[\hat{\alpha}] \quad (1-83)$$

第二部分是描述误差中系统部分的偏差(又称系统误差)项的平方,即

$$b^2[\hat{\alpha}] = E[(E[\hat{\alpha}] - \alpha)^2] \quad (1-84)$$

因此,均方误差是估计的方差和偏差的平方两项之和,即

$$E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2] = \text{Var}[\hat{\alpha}] + b^2(\hat{\alpha}) \quad (1-85)$$

一般来说,估计的误差与被估计参量使用相同的工程单位比较方便。因此,取式(1-83)

到式(1-85)的正平方根,就能做到这一点。式(1-83)的平方根是估计的标准差,称为标准误差(或称随机误差),其表达式为

$$\text{标准误差} = \sigma[\hat{\alpha}] = \sqrt{E[\hat{\alpha}^2] - E^2[\hat{\alpha}]} \quad (1-86)$$

式(1-84)的平方根直接确定了偏差(系统误差),即

$$\text{偏差} = b(\hat{\alpha}) = E[\hat{\alpha}] - \alpha \quad (1-87)$$

式(1-85)的平方误差之和的平方根,称为均方根误差,即

$$\text{均方根误差} = \sqrt{E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2]} = \sqrt{\sigma^2[\hat{\alpha}] + b^2(\hat{\alpha})} \quad (1-88)$$

为了方便起见,常将估计误差归一化,即用被估量除以误差,因此分别得:

$$\text{归一化标准误差} = \epsilon_r = \frac{\sigma[\hat{\alpha}]}{\alpha} = \frac{\sqrt{E[\hat{\alpha}^2] - E^2[\hat{\alpha}]}}{\alpha} \quad (1-89a)$$

$$\text{归一化偏差} = \epsilon_b = \frac{b(\hat{\alpha})}{\alpha} = \frac{E[\hat{\alpha}]}{\alpha} - 1 \quad (1-89b)$$

$$\text{归一化均方误差} = \epsilon = \frac{\sqrt{\sigma^2[\hat{\alpha}] + b^2[\hat{\alpha}]}}{\alpha} = \frac{\sqrt{E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2]}}{\alpha} \quad (1-89c)$$

1.7 信号参量估计的性能

1.7.1 信号估计的基本概念

所谓估计理论通常是对以下三种情况而言:

第一种情况是指根据观测样本直接对观测样本的各类统计特性做出估计。例如,对样本的均值,均方差,各阶矩,相关函数,直至观测样本的概率密度函数等做出的估计。这种情况适合于总体分布函数的形式未知,总体分布不能由有限个参量唯一地决定,需估计总体分布的某些数字特征(如均值、方差),称为非参量估计(nonparametric estimation)。

第二种情况是根据观测样本,对观测样本中的信号中未知的待定参量做出估计。这种情况适合于总体分布的函数形式已知,但分布中包含一些未知参量,要估计这些参量的真值,称为参量估计(parametric estimation)。参量估计又分为点估计(point estimation)和区间估计(interval estimation)。点估计的答案是参量真值的一个点,区间估计的答案是参量真值的一个可能区域。

上述两种情况的估计中,被估计参量在观测时间内一般不随时间变化,故属于静态估计,这是本章和第8章讨论的内容。

第三种情况则是根据观测样本对随时间变化的信号做出其波形估计。也就是说,对被估计的是随机过程或非随机的未知过程做出估计,其中信号的波形、参量是随时间变化的,称其为波形估计。它属于动态估计。这将在第9章中进行介绍。

已知信号检测的模型可用图1.5来表示,其中包括二次概率转换和一个 n 维的观测空间。对于信号估计来说情况要复杂一些。首先是信源发出的信号可能包含有 m 个独立的参量(例如,幅度、频率、相位、时延等),因此信号空间应该用 m 维的参量空间来表示。它经过信道传输后混进了噪声,形成 n 维观测空间,这就是第一个概率转换。然后接收机要根据不同的估计准则将观测空间内的各点(即接收到的波形样值)进行估值。由于信号参量可能有 m 个,因此估值空间

也应该是 m 维的。这就是第二次概率转换。因此信号参量估计的模型可用图 1.15 表示。

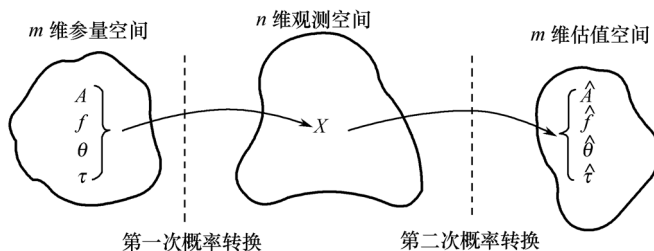


图 1.15 信号估计模型

如果信号只有一个参量未知或是随机变化的,而其他参量均为确知,则图 1.15 内的参量空间和估计空间都将是变化一维的,因此可用一根直线来代替。粗看起来,这时与信号检测的模型图 1.4 相同,实际上它们有着本质的区别。因为即使是多元信号检测,它的信号状态是有限的,因此在单一参量空间内只有个别的点存在。但是在信号估计时要考虑到信号参量的连续变化,因此它在单一参量空间内就是连续的一根直线,相应的估计空间也是如此。另外,在信号检测时可以做到判决结果与原来的假设完全相同,但在信号估计时却做不到其估计结果与真值完全相符,只能说尽量接近。因此即使是单一参量的信号估计也要比信号检测问题复杂些。但是它们之间又有许多相似之处,例如都要用到信源和信道的统计特性,并且都可以利用后验概率或似然函数作为检测或者估值的有用工具等。因此信号估计也可采用各种类似于信号检测中所命名的准则,但是可从图 1.15 与图 1.2 和图 1.4 相比得知,除了参量空间与信号检测不同外,还有一个区别就是在信号检测中由于信号的状态是有限的,而信号估计中信号状态是无限的,因此在定义能反映无限多个估计的代价函数等内容上是有区别的。

通常,按照某种估计准则,首先利用随机信号的一个样本数据构造估计量(或称估计值)每次所得的估计值都可能不同,也就是说,估计量是观测量的函数,而观测量是随机变量,所以信号参量的估计量是一个随机变量。既然估计量是随机变量,它就具有均值、方差等统计数字特征,可以利用这些特征对估计的性能进行比较、评价。为便于衡量随后将讨论的各种估计的性能。就需要先研究估计性能的若干标准,主要有无偏性、一致性,充分性和优效性。

1.7.2 无偏性

在对接收信号的参量进行多次观测后, n 维观测矢量 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 由 n 个随机变量构成,由 \mathbf{x} 构成的某个参量 α 的估计量 $\hat{\alpha}$ 也是一个随机变量。首先要考虑估计值应分布在真值附近,因此需考虑其均值问题。若一个估计量 $\hat{\alpha}$ 的均值等于待估计参量的真值,即对所有 α 恒有

$$E[\hat{\alpha}] = \alpha \quad (1-90)$$

则称 $\hat{\alpha}$ 为 α 的无偏估计量,若 α 满足关系式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\alpha}] = \alpha \quad (1-91)$$

则称 $\hat{\alpha}$ 为渐近无偏估计。“渐近”一词是指样本数 n 趋向无限大时的极限性能。

若式(1-90)不成立,则 $\hat{\alpha}$ 是 α 的一个有偏估计量,而且

$$b[\hat{\alpha}] = E[\hat{\alpha}] - \alpha \quad (1-92)$$

式中, $b[\hat{\alpha}]$ 称为偏差。

由此可见,估计量的无偏性保证估计值分布在被估计参量的均值附近,是估计量应具有的一种良好性质。

1.7.3 一致性

当用以构成一种估计量 $\hat{\alpha}$ 的观测样本数 n 增大时,估计量的密度函数在真值附近越来越集中,即方差越来越小。具体地说,当 $n \rightarrow \infty$ 时,估计量 $\hat{\alpha}$ 的估计值趋向于参量真值 α ,则称 $\hat{\alpha}$ 为参量 α 的一致估计量。所以,若 $\hat{\alpha}$ 是一致估计量,则对于任意小正数 δ ,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\alpha} - \alpha| > \delta) = 0 \quad (\text{对所有 } \delta > 0) \quad (1-93)$$

可见, $\hat{\alpha}$ 依概率收敛于 α 。

估计的一致性是与极限性能相联系的,仅当样本数 n 很大时才适用。

若随着样本数 n 增加,估计均方误差的极限等于零,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2] = 0 \quad (1-94)$$

则称 $\hat{\alpha}$ 是均方一致的。若 $\hat{\alpha}$ 是无偏的,则

$$E[\epsilon] = E[\hat{\alpha} - \alpha] = E[\hat{\alpha}] - E[\alpha] = 0$$

估计误差 ϵ 是零均值的,均方误差 $E[\epsilon^2] = E[(\hat{\alpha} - \alpha)^2]$ 就是 ϵ 的方差。式(1-94)表明,随着样本数 n 的增加,一致估计量估计误差的方差减小并趋于零。

式(1-93)定义的简单一致性和式(1-94)定义的均方一致性是常用的两种一致性定义,二者并无矛盾。实际上,常用式(1-94)来检验估计量是否具有 consistency。

1.7.4 充分性

设未知参量的估计量 $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(x)$ 。希望 $\hat{\alpha}(x)$ 含有 x 中有关参量 α 的尽可能多的信息,这就引出充分估计量的定义。

如果存在观测矢量 x 的一个估计量 $\hat{\alpha}(x)$,使得似然函数 $p(x/\alpha)$ 分解成

$$p(x|\alpha) = p(\hat{\alpha}) \cdot h(x) \quad h(x) \geq 0 \quad (1-95)$$

式中 $p(\hat{\alpha})$ 为 α 已知条件下估计量 $\hat{\alpha}$ 的概率密度,函数 $h(x)$ 与 α 无关,则称 $\hat{\alpha}(x)$ 是 α 的一个充分估计量。

充分估计量的意义是:没有别的估计量可以提供比充分估计量更多的有关参量 α 的信息,或者说,估计量 $\hat{\alpha}(x)$ 体现了含在观测数据 x 中有关参量 α 的全部有用信息。这一事实就是充分估计量这一名词的由来。

1.7.5 优效性

一个无偏估计量的均值等于参量真值。但仅用无偏来评价是不完全的,因为即使一个无偏估计量,其方差可能很大,这时估计误差可能很大,因此还需要估计其均方误差。也就是说,如果估计量的方差越小,则它取其均值附近数值的概率就越大。因此总希望估计量的方差尽可能小,所以优效估计量就是具有最小方差的估计量。最小方差由下面将讨论的克拉默-拉奥(Cramer-Rao)不等式给出。要求被估计量 $\hat{\alpha}$ 不能低于克拉默-拉奥限。

若一个估计量是优效估计量,则它必定是充分估计量。然而,若优效估计量不存在,充分

估计量仍然可以存在。因此,与优效性相比,充分性是受限较少的一种性质。

以上 4 点就是评价估计量时经常采用的性能标准。

1.7.6 克拉默-拉奥不等式

一个估计量最基本的特征体现在偏差和方差上。精确地表示均方误差往往是困难的。在这些情况下,希望得到均方误差可能达到的一个下限。正是克拉默-拉奥不等式给出了估计的均方误差下限,也就是说,与其他的估计量的估计性能比较时,可以寻求间接方法,即确定任一偏差估计量方差的下限,此下限就是有效估计量的均方误差,实际的估计均方误差不可能再低于它。

克拉默-拉奥不等式适用于估计非随机参量的情况。对于随机参量的估计,类似的不等式也存在。在此,仅讨论对一个未知非随机参量的估计情况。

定理:令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为一样本矢量, $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})$ 是 \mathbf{x} 的条件概率密度函数。若 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 是一个无偏估计量,且 $\partial p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})/\partial \boldsymbol{\alpha}$ 存在,则

$$\text{Var}[\hat{\boldsymbol{\alpha}}] = E[\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}]^2 \geq \frac{1}{E\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})\right]^2} \quad (1-96)$$

$$\text{式中} \quad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) = K(\boldsymbol{\alpha})(\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}) \quad (1-97)$$

且 $K(\boldsymbol{\alpha})$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的某个不包含 \mathbf{x} 的正函数。

证明:由假设条件知

$$E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}] = \boldsymbol{\alpha} \text{ 或 } E[\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}] = 0$$

因此,有

$$E[\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}) p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0$$

上式两边对 $\boldsymbol{\alpha}$ 求偏微分,有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} E[\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}] &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}) p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} [(\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}) p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})] d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (1-98)$$

式(1-98)给出

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} [(\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}) p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})] d\mathbf{x} = 0$$

另一方面,由复合函数的求导法可得

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) = \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) \right] p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) \quad (1-99)$$

由于 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})$ 是条件密度函数,故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{x} = 1 \quad (1-100)$$

将式(1-99)与式(1-100)代入式(1-98),得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} [\ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})] p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) (\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{x} = 1$$

利用 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) = \sqrt{p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})} \cdot \sqrt{p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})}$, 上式可改写成

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\ln p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) \sqrt{p(\mathbf{x}|\mathbf{a})}] [(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) \sqrt{p(\mathbf{x}|\mathbf{a})}] \right] d\mathbf{x} = 1 \quad (1-101)$$

根据 Schwartz 不等式得

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)h(y)dy \right]^2 \leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(y)dy \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(y)dy \right] \quad (1-102)$$

当 $g(y)$ 和 $h(y)$ 线性相关时,即

$$h(y) = kg(y) \quad (1-103)$$

时,不等式取等号。将式(1-101)两端平方,并改写为式(1-102)的形式,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \ln p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) \right]^2 p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) d\mathbf{x} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^2 p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) d\mathbf{x} \geq 1$$

或等价地有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^2 p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) d\mathbf{x} \geq \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \ln p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) \right]^2 p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) d\mathbf{x}} \quad (1-104)$$

而且,只有当式(1-97)成立时,上式才取等号。注意到 $E[\hat{\mathbf{a}}] = \mathbf{a}$, 于是有

$$\text{Var}[\hat{\mathbf{a}}] = E[\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^2 p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) d\mathbf{x} \quad (1-105a)$$

$$\text{和} \quad E \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \ln p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) \right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \ln p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) \right]^2 p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) d\mathbf{x} \quad (1-105b)$$

综合式(1-104)与式(1-105)可直接得式(1-96)。式(1-96)称为克拉默-拉奥不等式,该式的右端便是无偏估计量 $\hat{\mathbf{a}}$ 的均方差下限。即克拉默-拉奥不等式。式(1-96)表明,任何无偏估计量的均方差不可能小于一个特定的下限,这个下限取决于似然函数 $p(\mathbf{x}|\mathbf{a})$ 。

1.8 信号参量估计基本理论

在参量估计问题中,发送端的真实状态取决于 m 个待估计参量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 而每个参量 α_i 的取值范围可能充满一个区间,因而信号空间是一个 m 维空间。在信息接收端,要求同时判定(或估计)这 m 个参量的数值,因而判决空间也是一个 m 维空间。例如,在雷达问题中, α_1 可能代表雷达回波到达时间 t_0 , α_2 代表多普勒频率 f_d , 估计这些参量,就可以向我们提供目标距离和径向速度的信息。在模拟通信、估计运动目标轨迹等问题中,需要估计并恢复原始的波形,这也是参量估计问题,不过这时估计的参量是时变的。为了区分这两种情况,我们把时变参量的估计问题统称为波形估计,这将在本书的第9章中讨论。

在参量估计问题中,观测波形在观测时间 $[0, T]$ 内可表示为

$$x(t) = s(t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) + n(t) \quad (1-106)$$

式中, $s(t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 表示信号波形,它依赖于 m 个待估计的未知参量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 。这些待估参量可能是随机变量,也可能是未知的确定量。但无论属于哪种情况,我们总假定待估参量在观测时间 $[0, T]$ 内是不随时间变化的。为方便起见,用参量矢量 \mathbf{a} 表示这些待估参量

$$\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$$

式(1-106)中, $n(t)$ 表示信道引入的加性噪声。式(1-106)本身表明,在参量估计问题中,已经确定了信号 $s(t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 存在,从而估计其参量。也就是说,先通过假定已判定了信号存在,才谈得上参量估计问题。当然,在参量仅可能取有限个数值的特殊情况下,可以用多元假

设检验同时解决检测与参量估计问题。但在一般情况下,参量估计问题是根据 $[0, T]$ 时间内的观测矢量 \mathbf{x} ,它可能是观测波形 $\mathbf{x}(t)$,也可能是其有限维采样矢量 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$,按照某种准则对参量矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 进行估计。

现在的问题是,如何最佳地利用观测矢量 \mathbf{x} 来构成估计量呢?这就牵涉到“最佳”的含义是什么?从什么标准来说是“最佳”的?随着所选定的“最佳”准则的不同,最后得到的估计误差也会不一样,目前存在着各种不同的构成估计量的方法,如贝叶斯估计,最大后验概率估计,最大似然估计等。这些正是本节所讨论的内容。

1.8.1 经典估计

求估计量最直观的方法是矩法,由统计学家皮尔逊(Pearson)引入的一种求参量 $\boldsymbol{\alpha}$ 点估计方法。根据辛钦大数定律,如果研究对象的总体(称为母体) ξ 的数学期望有限,那么用于组成母体 ξ 的 n 个子样 $\xi_i (i=1, 2, \dots, n)$ 所提供的信息去估计 ξ 的分布函数中的未知参量 $\boldsymbol{\alpha}$ 时,可以用子样矩来估计母体的矩

$$\hat{\mu}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^r \quad (1-107)$$

式中, $\hat{\mu}_r$ 表示母体 ξ 的 r 阶原点矩 μ_r 的估计量, μ_r 定义为

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r p(x) dx \quad (1-108)$$

例如,母体 ξ 的数学期望 μ 的估计量 \hat{a} 为

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \mu_\xi \quad (1-109)$$

即用子样的均值 μ_ξ 作为母体 ξ 的数学期望的估计量。同样,母体方差的估计量为

$$\hat{a}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu_\xi)^2 \quad (1-110)$$

我们的目的是要利用个体特征来对母体的特征进行推断,因而从母体中抽取子样必须是随机的,即子样 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是相互独立的随机变量。其次,子样必须有代表性,即 ξ_i 和母体 ξ 具有相同的分布。于是,若母体 ξ 的分布密度函数为 $p(\mathbf{x})$,则 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的 n 维联合分布密度为 $\prod_{i=1}^n p(x_i)$ 。

现设 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})$ 为母体 ξ 的概率密度函数,其中 \mathbf{x} 为变元, $\boldsymbol{\alpha}$ 为参量,这里暂时假定仅有一个未知参量。为估计母体分布密度函数的参量 $\boldsymbol{\alpha}$,需要构造子样的函数 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$,使 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 在某种意义上最佳地接近真实的 $\boldsymbol{\alpha}$ 值。称 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 为参量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的估计量,求 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 的方法就是前面提到的参量的点估计法。

由此可知,矩法求估计量的优点是不需要事先知道母体的分布规律,因而简便且适用面广。这一优点类似于检测问题中的非参量法。但如果已经知道了母体的分布规律,使用矩法并不利用这一信息,当然不能得到最好的效果。

【例 1.10】 设某种灯泡寿命 $x \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$,其中 μ_1, σ^2 都是未知的。今随机取得4只灯泡,测得寿命(以小时计)为1502,1453,1367,1650。试用矩法估计 μ_1 和 σ^2 。

解:因为 μ_1 为全部灯泡的平均寿命, \bar{x} 为样本的平均寿命,很自然地会想到用样本平均值来估计 μ_1 ,同样,以样本方差 $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ 来估计总体方差 σ^2 ,由

$$\bar{x} = \frac{1}{4}(1502 + 1453 + 1367 + 1650) = 1493$$

$$s^2 = \frac{1}{4}[(1502 - 1493)^2 + (1453 - 1493)^2 + (1367 - 1493)^2 + (1650 - 1493)^2] \\ = 10551.75$$

得 μ_1 及 σ^2 的估计值分别为 1493(小时)及 10551.75(小时)。但是必须注意,对于样本的不同实现,估计量是不同的。

【例 1.11】 设母体 x 服从拉普拉斯分布,即其概率密度函数为

$$p(x; \mu, \beta) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\beta}\right), \quad -\infty < x < +\infty$$

其中, $-\infty < \mu < +\infty, \beta > 0$ 均未知,求 μ 及 β 的矩估计。

解: 因为

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2\beta} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\beta}\right) dx = \mu \\ E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2\beta} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\beta}\right) dx = 2\beta^2 + \mu^2$$

由矩法,可令

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \mu, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 2\beta^2 + \mu^2$$

由此解得 μ 及 β 的矩估计为

$$\bar{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\beta} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \hat{\mu}^2\right)/2} = s/\sqrt{2}$$

式中

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

1.8.2 贝叶斯估计

贝叶斯估计是在信号估计中应用最广泛的一种方法。它与贝叶斯检测一样,也是为了使平均风险最小化,因此贝叶斯估计可称为最小风险估计。

设输入矢量的分布密度为 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\alpha}$ 为待估参量矢量, $\boldsymbol{\Omega}$ 为参量空间。假定信号 $s(t; \boldsymbol{\alpha})$ 仅取决于参量矢量 $\boldsymbol{\alpha}$, 因而可认为信号空间与参量空间重合, 都是一个 m 维空间。求参量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的点估计, 可看做根据接收机输入端 n 个观测值, 即输入空间 \mathbf{X} 中的一点 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 对未知参量 $\boldsymbol{\alpha}$ 采取一种决定或决策。将可能采取的全部决策所组成的集合称为决策空间, 或判决空间, 记为 D_0 。显然, 对于双择假设检验, 决策空间元素只有两个: D_0 ——判决假设 H_0 为真; D_1 ——判决假设 H_1 为真。对于 m 元假设检验, 决策空间元素有 m 个。对于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的点估计, 是要寻求 m 个标量估计量 $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_m$, 因而决策空间是一个 m 维空间, 并与参量空间重合, 即 $D = \boldsymbol{\Omega}$ 。由此可知, 对未知或随机参量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 做出估计, 实质上是对输入空间 \mathbf{X} 中的每一个点 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 在决策空间 D 中寻求一点 $d \in D$ 与之对应。也就是寻找输入样本 x_1, x_2, \dots, x_n 的一个函数 $d(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $d \in D$, 称为决策函数, 使决策在某种意义上达到“最佳”。在参量估计问题中, $d(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可写为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

在研究信号检测时已强调,应用贝叶斯准则必须预先知道各类假设的先验概率 $P(H_i)$ 及各种判决的代价因子 c_{ij} 。应用贝叶斯估计准则,也必须知道信号参量的先验分布密度函数 $p(\alpha)$,以及对每一对 $(\alpha, \hat{\alpha})$ 定义的代价函数 $C(\alpha, \hat{\alpha})$ 。常用代价函数 $C(\alpha, \hat{\alpha})$ 描述估计误差所造成的不良后果。由于估计量 $\hat{\alpha}$ 与真实参量 α 可能不同,一般要引入损失,因而代价函数 $C(\alpha, \hat{\alpha})$ 为非负函数。代价函数的选择,应当反映问题的实际情况,也要考虑便于数学处理。对于单参量估计的情况,一般选用的代价函数与估计误差 $\epsilon = \alpha - \hat{\alpha}$ 有关。即 $C(\alpha, \hat{\alpha}) = C(\alpha - \hat{\alpha})$,而且误差越大,代价越大。这种考虑在很多场合下是合理的,例如,炮瞄雷达测距误差越大,炮火的命中率越低,从而增加了我方付出的代价。图 1.16 给出了常用的几种一维形式的代价函数。图 1.16(a) 表示误差绝对值代价函数,记为 $C(\alpha, \hat{\alpha}) = |\alpha - \hat{\alpha}|$ 。此时,代价随误差绝对值线性变化。图 1.16(b) 表示误差平方代价函数,记为 $C(\alpha, \hat{\alpha}) = (\alpha - \hat{\alpha})^2$ 。这种代价函数随误差增加而更快增大,且由于数学处理方便,因而应用更为广泛。图 1.16(c) 所示的代价函数正比于相对误差的平方,记为 $C(\alpha, \hat{\alpha}) = [(\alpha - \hat{\alpha})/\alpha]^2$ 。图 1.16(d) 表示均匀代价函数,记为 $C(\alpha, \hat{\alpha}) = K$ (当 $|\epsilon| > \Delta$ 时); $C(\alpha, \hat{\alpha}) = 0$ (当 $|\epsilon| \leq \Delta$ 时)。例如,在雷达应用的某些场合,小于某个门限值的误差几乎不带来任何后果,而大于这个门限值的误差可能意味着完全丢失目标,因而其后果的严重性几乎完全一样。

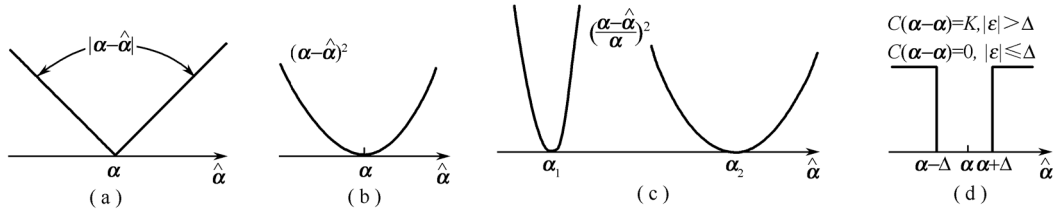


图 1.16 几种常用代价函数 $C(\alpha, \hat{\alpha})$

一旦确定了代价函数和先验分布函数,则可求出总平均代价或平均风险(也称为贝叶斯风险函数)

$$\bar{R} = \int_{\{x\}} \int_{\{\alpha\}} C(\alpha, \hat{\alpha}) p(x, \alpha) d\alpha dx = \int_{\{x\}} \left[\int_{\{\alpha\}} C(\alpha, \hat{\alpha}) p(\alpha | x) d\alpha \right] p(x) dx \quad (1-111)$$

所谓贝叶斯估计,就是选择估计矢量 $\hat{\alpha}$,使平均风险 \bar{R} 达到极小。由于式(1-111)中的内积分及 $p(x)$ 均为非负的,所以使平均风险 \bar{R} 最小与使下式

$$R(\hat{\alpha} | x) = \int_{\{\alpha\}} C(\alpha, \hat{\alpha}) p(\alpha | x) d\alpha \quad (1-112)$$

最小一致。 $R(\hat{\alpha} | x)$ 称为条件代价,或称条件贝叶斯风险。它表示在观测矢量 x 已知条件下的代价。由此可知,贝叶斯估计就是使平均风险或条件代价达到最小的估计。

下面研究贝叶斯估计的几种特例。

1. 最小均方误差估计

最小均方误差估计准则是这样的一种估计,它使估计的误差平方在统计平均意义上是最小的。

在单参量估计的情况下,如果选用误差平方代价函数 $C(\alpha, \hat{\alpha}) = (\alpha - \hat{\alpha})^2$,则平均风险为

$$\bar{R} = \int_{\{x\}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha - \hat{\alpha})^2 p(x, \alpha) d\alpha dx \quad (1-113)$$

它等于估计量 $\hat{\alpha}$ 对真实 α 值的均方误差。因此,选用平方代价函数时,贝叶斯准则蜕化为最小均方误差准则,此时的贝叶斯估计量 $\hat{\alpha}$ 亦称为最小均方误差估计量。在这种情况下,条件代价表示式(1-112)变为

$$R(\hat{\alpha}|\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha - \hat{\alpha})^2 p(\alpha|\mathbf{x}) d\alpha \quad (1-114)$$

如前所述,使 \bar{R} 最小与使 $R(\hat{\alpha}|\mathbf{x})$ 最小是一致的,于是贝叶斯估计量 $\hat{\alpha}$ 应满足如下方程

$$\left. \frac{\partial R(\hat{\alpha}|\mathbf{x})}{\partial \hat{\alpha}} \right|_{\hat{\alpha}=\hat{\alpha}_{\text{MS}}} = 0 \quad (1-115)$$

将式(1-114)代入式(1-115),得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2(\hat{\alpha} - \alpha) p(\alpha|\mathbf{x}) d\alpha \Big|_{\hat{\alpha}=\hat{\alpha}_{\text{MS}}} = 0$$

上式对 $\hat{\alpha}$ 求解,则

$$\hat{\alpha}_{\text{MS}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha p(\alpha|\mathbf{x}) d\alpha}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\alpha|\mathbf{x}) d\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha p(\alpha|\mathbf{x}) d\alpha = E[\alpha|\mathbf{x}] \quad (1-116)$$

式中, $p(\alpha|\mathbf{x})$ 表示在给定观测矢量 \mathbf{x} 条件下,待估参量 α 的条件分布,即 α 的后验分布。式(1-116)表明,求 α 的最小均方误差估计量,等效于求 α 的后验分布的均值,亦称 α 的条件均值。也就是说,平方代价的贝叶斯估计可归结为条件均值估计。虽然条件均值估计是由平方代价函数导出的,但是已经证明,在代价是 $\epsilon = \hat{\alpha} - \alpha$ 的对称函数,且是凹函数^①这一更广泛的条件下,条件均值估计式(1-116)也是贝叶斯估计。

【例 1.12】 设参量为 α 的后验概率密度函数为

$$p(\alpha|\mathbf{x}) = \text{常数} \cdot \exp[-(\alpha - cx)^2 / 2c^2 \sigma^2]$$

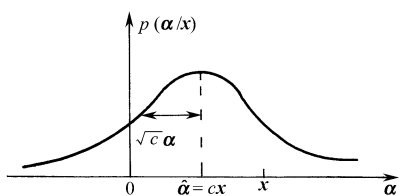


图 1.17 后验概率密度 $p(\alpha|\mathbf{x})$ 图形

及 α 的最佳估计值 $\hat{\alpha}$

并示于图 1.17。由于我们选用平方代价函数,故使平均风险最小的估计为条件均值估计。由式(1-116), α 的最佳估计为

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= E[\alpha|\mathbf{x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha p(\alpha|\mathbf{x}) d\alpha \\ &= \text{常数} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \exp\left[-\frac{(\alpha - cx)^2}{2c^2 \sigma^2}\right] d\alpha = cx \end{aligned}$$

亦示于图 1.17 中。

使用最佳估计时,平均风险达到最小值 \bar{R}_0 。由式(1-111)可得

$$\bar{R}_0 = \int_{(\mathbf{x})} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha - cx)^2 p(\alpha|\mathbf{x}) d\alpha \right] p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

将 $p(\alpha|\mathbf{x})$ 代入,内积分之值显然为 σ^2 ,因而

$$\bar{R}_0 = \sigma^2 \quad (1-117)$$

作为对比,如取 $\hat{\alpha} = x$,即直接用测量值作为估计值,则平均风险 \bar{R} 等于

$$\bar{R} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{(\mathbf{x})} (\alpha - x^2) p(\mathbf{x}|\alpha) d\mathbf{x} \right] p(\alpha) d\alpha$$

^① 如果连接函数任意两点的弦大于或等于函数,则该函数称为凹函数。

将 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha})^2/(2\sigma^2)]$ 代入, 内积分之值显然为 σ^2 , 因而, $\bar{R} = \sigma^2$ 。这比最佳估计的平均风险 \bar{R}_0 增大了 $1/c$ 倍 ($c \leq 1$)。

2. 条件中位数估计

在贝叶斯估计中, 如果选用绝对误差代价函数 $C(\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}) = |\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}|$, 则条件代价变为

$$\begin{aligned} R(\hat{\boldsymbol{\alpha}}|\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}| p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\alpha} \\ &= \int_{-\infty}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} (\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}) p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\alpha} + \int_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}^{+\infty} (\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}) p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

贝叶斯估计应满足 $\partial R(\hat{\boldsymbol{\alpha}}|\mathbf{x})/\partial \hat{\boldsymbol{\alpha}} = 0$, 则由上式得

$$\int_{-\infty}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\alpha} = \int_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}^{+\infty} p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\alpha}$$

上式意味着

$$P(\boldsymbol{\alpha} > \hat{\boldsymbol{\alpha}}) = P(\boldsymbol{\alpha} < \hat{\boldsymbol{\alpha}})$$

即估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 是条件分布 $p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 的中位数, 记为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MED}}$ 。由此可知, 选用绝对误差代价函数时的贝叶斯估计, 就是条件中位数估计。也可以根据随机变量中值(中位数)的定义, 估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 是被估计随机参量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的条件中值, 故称为条件中值估计, 或称为条件中位数估计 (conditional median estimation), 估计量记为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MED}}(\mathbf{x})$, 简记为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MED}}$ 。显然, 估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MED}}$ 是 $P(\boldsymbol{\alpha} \leq \hat{\boldsymbol{\alpha}}) = 1/2$ 的点。

如果条件分布 $p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 是对称的, 则 $E(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MED}}$, 此时条件中位数估计与条件均值估计一致。

1.8.3 最大后验估计 (Maximum a posteriori estimation)

与检测情况相似, 在参量估计问题中, 如果不能找到适当的代价函数, 则可采用最大后验概率估计准则。此时, 选择使后验概率分布 $p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 最大的 $\boldsymbol{\alpha}$ 值作为其估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 。从信息论观点看来, 在已得到输入矢量 \mathbf{x} 条件下, 选择 $\boldsymbol{\alpha}$ 的最佳值作为其估计量是理所当然的。

如果后验分布 $p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 仅有单峰, 则最大后验准则相当于选择后验分布的众数(极值点)。在单参量估计的情况下, 如果 $p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 对称于峰值, 例如高斯分布的情况, 则众数与均值相同, 此时, 最大后验估计与条件均值估计一致。

对于均匀代价函数, 条件平均代价表示为

$$C(\hat{\boldsymbol{\alpha}}|\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\Delta}{2}} p(\hat{\boldsymbol{\alpha}}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\alpha} + \int_{\hat{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\Delta}{2}}^{+\infty} p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\alpha} = 1 - \int_{\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\Delta}{2}}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\Delta}{2}} p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\alpha} \quad (1-118)$$

当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, 使 $C(\hat{\boldsymbol{\alpha}}|\mathbf{x})$ 达到最小等效于选择 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 使 $p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 达到最大, 这就是最大后验估计。

显然, 欲使 $C(\hat{\boldsymbol{\alpha}}|\mathbf{x})$ 最小, 需要此式右边的积分

$$\int_{\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\Delta}{2}}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\Delta}{2}} p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\alpha} \quad (1-119)$$

最大。在均匀代价函数中, 感兴趣的是 Δ 很小但不等于零的情况。对于足够小的 Δ , 为使式(1-119)的积分最大, 应当选择 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 使它处于后验概率密度函数 $p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 最大值的位置。所以, 这样的估计称为最大后验估计, 估计量记为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}}(\mathbf{x})$, 简记为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}}$ 。

如果 $p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 的最大值处于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的允许范围内, 且 $p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 具有连续的一阶导数, 则获得最大

值的必要条件是

$$\left. \frac{\partial p(\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}}} = 0 \quad (1-120)$$

因为自然对数是自变量的单调函数,所以有

$$\left. \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}}} = 0 \quad (1-121)$$

该式称为最大后验方程。利用上述方程求解估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}}$ 时,在每一种情况下都必须检验所求得的解是否能使 $p(\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{x})$ 绝对最大。

为了反映观测矢量 \mathbf{x} 和先验概率密度函数 $p(\boldsymbol{\alpha})$ 对估计量的影响,我们注意到

$$p(\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha}) p(\boldsymbol{\alpha})}{p(\mathbf{x})}$$

两边取自然对数,并对 $\boldsymbol{\alpha}$ 求偏导,令结果等于零,可得到另一种形式的最大后验估计方程,即为

$$\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right] \bigg|_{\boldsymbol{\alpha}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}}} = 0 \quad (1-122)$$

式中, $p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha})$ 是观测矢量 \mathbf{x} 以 $\boldsymbol{\alpha}$ 为条件的概率密度函数。

【例 1.13】 设观测样本为

$$x_i = \boldsymbol{\alpha} + w_i (i = 1, 2, \dots, n)$$

式中, $\boldsymbol{\alpha}$ 为待估计的随机变量。设 $\boldsymbol{\alpha}$ 服从高斯分布,且 $E[\boldsymbol{\alpha}] = \mu$, $\text{Var}[\boldsymbol{\alpha}] = \beta^2$, w_i 为零均值,方差为 σ_w^2 的高斯白噪声样本。(1)求估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 可能达到的最小均方误差;(2)求 $\boldsymbol{\alpha}$ 的优效估计量。

解: (1) 直接利用式(1-96)进行计算。因为

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha}) p(\boldsymbol{\alpha})$$

故

$$\ln p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \ln p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha}) + \ln p(\boldsymbol{\alpha}) \quad (1-123)$$

由题设条件

$$p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \right)^n \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \boldsymbol{\alpha})^2 \right] \quad (1-124)$$

$$p(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} \exp \left[-\frac{1}{2\beta^2} (\boldsymbol{\alpha} - \mu)^2 \right] \quad (1-125)$$

将式(1-124)和式(1-125)代入式(1-123),有

$$\ln p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = c - \frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \boldsymbol{\alpha})^2 - \frac{1}{2\beta^2} (\boldsymbol{\alpha} - \mu)^2 \quad (1-126)$$

式中, c 为常数。上式对 $\boldsymbol{\alpha}$ 求导,得

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \ln p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \boldsymbol{\alpha}) - \frac{1}{\beta^2} (\boldsymbol{\alpha} - \mu) \quad (1-127)$$

再求导一次,得

$$\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} \ln p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = -\frac{n}{\sigma_w^2} - \frac{1}{\beta^2}$$

因此,由式(1-96),有

$$E[(\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha})^2] \geq \frac{1}{\frac{n}{\sigma_w^2} + \frac{1}{\beta^2}}$$

不等式右端即为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 的最小均方误差下限。

(2) 满足式(1-97)的优效估计量必定是最大后验估计量。要求 α 的优效估计量,只需求出 α 的最大后验估计量 $\hat{\alpha}_{\text{MAP}}$ 即可。而 $\hat{\alpha}_{\text{MAP}}$ 是下列方程的解

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} p(\alpha | x) = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln p(\alpha | x) = 0 \quad (1-128)$$

上两式中的 $p(\alpha | x)$ 就是随机变量矢量 α 的后验概率密度。由于

$$p(\alpha | x) = \frac{p(x | \alpha) p(\alpha)}{p(x)}$$

且 $p(x)$ 与 α 无关,则式(1-128)亦可写为

$$\frac{\partial \ln p(x | \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \ln p(\alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad (1-129)$$

由(1)小题,上式等于

$$\frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha) - \frac{1}{\beta^2} (\alpha - \mu) = 0 \quad (1-130)$$

对 α 求解,即得

$$\hat{\alpha}_{\text{MAP}} = \left(\mu + \frac{\beta^2}{\sigma_w^2} \sum_{i=1}^n x_i \right) / \left(1 + n \frac{\beta^2}{\sigma_w^2} \right) \quad (1-131)$$

1.8.4 最大似然估计(Maximum likelihood estimation)

在最小均方误差估计和最大后验概率估计中,都需要知道后验概率密度 $p(\alpha | x)$ 。最小均方误差估计是后验均值,最大后验概率估计是后验峰值。为了求出后验概率密度 $p(\alpha | x)$,需要知道 $p(\alpha)$ 和 $p(x | \alpha)$ 。 $p(x | \alpha)$ 可以在试验之前通过大量测试求出经验分布,而 $p(\alpha)$ 就不容易求得。如果只知道 $p(x | \alpha)$,不知道 $p(\alpha)$,就无法求得 $p(\alpha | x)$,也就无法使用最小均方误差估计,最大后验概率估计。因此,对于先验概率未知的信号估计除了采用极大、极小估计方法外,还广泛地采用最大似然估计。它是以似然函数最大处的参量做估计量。这种估计的优点是无须知道参量的先验知识,同时代价函数也不必给定,因此不仅对未知先验概率的随机变量估计适用,同时对非随机的未知参量估计也适用。

费希尔(Fisher)提出,采用使似然密度函数 $p(x | \alpha)$ 最大的 α 作为估计值 $\hat{\alpha}_{\text{ML}}$,即令

$$\left. \frac{\partial p(x | \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = \hat{\alpha}_{\text{ML}}} = 0 \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial \ln p(x | \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = \hat{\alpha}_{\text{ML}}} = 0 \quad (1-132)$$

$\hat{\alpha}_{\text{ML}}$ 称为最大似然估计。

设母体 ξ 的分布密度函数为 $p(x | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, 其中 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为待估计的参量。例如,对于正态分布的随机变量 ξ ,有

$$p(x | \alpha, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x - a)^2 \right]$$

这意味着 $\alpha_1 = a, \alpha_2 = \sigma^2$ 。设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ 为 m 个子样,则 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ 落在其邻域 $(d\xi_1, d\xi_2, \dots, d\xi_m)$ 内的概率为

$$\prod_{i=1}^m p(x_i | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) dx_i$$

或者写为

$$\prod_{i=1}^m p(x_i | \alpha) dx_i$$

注意, x_i 为已测定的子样取值,因而上述概率表述式为参量 α 的函数。直观看来,应当选取 α

的估计量 $\hat{\alpha}$ 使 $\alpha = \hat{\alpha}$ 时上述概率达到最大值,这又等效于使 $\alpha = \hat{\alpha}$ 时似然函数达到最大值

$$\prod_{i=1}^m p(x_i | \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_m) \geq \prod_{i=1}^m p(x_i | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (1-133)$$

应用式(1-133)的估计方法称为最大似然估计。

求解式(1-133)极值的必要条件为求解下述偏微分方程组

$$\frac{\partial \prod_{i=1}^m p(x_i | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq m) \quad (1-134)$$

式(1-134)又可等效于

$$\frac{\partial \prod_{i=1}^m \ln p(x_i | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq m) \quad (1-135)$$

式中, $\ln p(x_i | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 为对数似然函数。式(1-134)或式(1-135)对 α 的解便是 α 的最大似然函数估计量 $\hat{\alpha}_{ML}$ 。

【例 1.14】 本例讨论正态分布母体 ξ 的参量的最大似然估计,即根据式(1-135)来估计正态分布的均值 α 和方差 α^2 。此时似然函数为

$$p(\mathbf{x} | \alpha, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \prod_{i=1}^n \exp \left[-\frac{(x_i - \alpha)^2}{2\sigma^2} \right]$$

对数似然函数则为

$$\ln p(\mathbf{x} | \alpha, \sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2 - n \ln \sigma + c$$

式中, c 为常数。根据式(1-135), $\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} | \alpha, \sigma^2)}{\partial \alpha} = 0$ 有 $\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 。

同理,根据 $\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} | \alpha, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0$, 有 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\alpha})^2$ 。

由此可知,对于高斯分布母体的均值与方差的估计值,采用最大似然法与矩法一致。但是,若母体分布不是高斯的,则两种方法将有差异。因为矩法没有利用有关母体分布的信息,可以预计最大似然估计法在一般情况下将得到较好的效果。

最大后验估计是使后验密度 $p(\alpha | \mathbf{x})$ 达到极大,这要求估计值满足式(1-120)或下式

$$\frac{\partial \ln p(\alpha | \mathbf{x})}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq m) \quad (1-136)$$

根据条件概率分布的乘法定理有

$$p(\alpha | \mathbf{x}) = p(\mathbf{x} | \alpha) p(\alpha) / p(\mathbf{x}) \quad (1-137)$$

则式(1-136)变为

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} | \alpha)}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \ln p(\alpha)}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \ln p(\mathbf{x})}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq m)$$

因 $p(\mathbf{x})$ 与参量 α 无关,上式中第三项为零。如果 α 的先验密度函数在很宽的范围内足够平坦,或者由于对 α 的先验信息一无所知,因而认为 $p(\alpha)$ 在一定范围内是常数(均匀分布),从而上式中第二项也为零。由此可知,在上述条件下,最大后验估计蜕化为最大似然估计,即使用 $p(\mathbf{x} | \alpha)$ 达到最大值的 $\hat{\alpha}$ 作为 α 的估计,其求解公式可写为

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq m) \quad (1-138)$$

综上所述,当参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 没有先验信息可供利用,或 $p(\boldsymbol{\alpha})$ 足够平坦,最大后验估计与最大似然估计一致。最大似然估计可用于既不知道代价函数,又不知道 $p(\boldsymbol{\alpha})$ 的场合。最大似然估计的物理解释是:似然函数 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})$ 表征参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 给定条件下输入矢量 \mathbf{x} 的概率密度,当 $\boldsymbol{\alpha}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 时使 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})$ 达到最大,表明 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 使此输入矢量 \mathbf{x} 的出现概率为最大。也就是说,现在观测到的输入矢量 \mathbf{x} ,可判断为由使它最可能出现的那个参量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 引起的。

例 1.14 中举出了一个应用最大似然估计的例子。下面,我们用同一个例子来说明各种估计准则的应用。

【例 1.15】 进一步考虑例 1.14 的问题,即已知母体 ξ 的均值为 σ 和方差为 σ^2 的正态分布,试用 n 个独立观测数据(或子样) x_1, x_2, \dots, x_n 来估计 ξ 的均值 α 。

在例 1.14 中已指出,似然函数可写为

$$p(\mathbf{x}|\alpha) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2 / (2\sigma^2)\right] \quad (1-139)$$

设已知参量 α 的先验分布是均值为 μ 、方差为 β^2 的正态分布,即

$$p(\alpha) = (2\pi\beta^2)^{-1/2} \exp[-(\alpha - \mu)^2 / (2\beta^2)] \quad (1-140)$$

本例与例 1.15 的不同点在于,例 1.15 中没有任何先验分布 $p(\alpha)$ 的信息,因而只能采用最大似然估计,而本例已知先验分布 $p(\alpha)$,因而可求出 α 的贝叶斯估计量。根据式(1-137)、式(1-139)和式(1-140),可以计算出已知观测矢量 \mathbf{x} 条件下,母体均值 α 的后验概率分布密度

$$p(\alpha|\mathbf{x}) = \frac{p(\alpha|\mathbf{x}) \cdot p(\alpha)}{p(\mathbf{x})} = (2\pi\gamma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\left[\alpha - \gamma^2\left(\frac{nm_x}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\beta^2}\right)\right]^2 / (2\gamma^2)\right\} \quad (1-141)$$

式中, $\gamma^{-2} = n\sigma^{-2} + \beta^{-2}$, $m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, 后者表示样本均值。

如果采用平方代价函数 $C(\alpha, \hat{\alpha}) = (\alpha - \hat{\alpha})^2$, 根据式(1-116), 贝叶斯估计量(此时即最小均方误差估计量)应等于后验分布的均值为

$$\hat{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha p(\alpha|\mathbf{x}) d\alpha = \gamma^2 \left(\frac{nm_x}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\beta^2} \right) = \frac{\beta^2 m_x + \mu \sigma^2 / n}{\beta^2 + \sigma^2 / n} \quad (1-142)$$

研究式(1-142)的结果是十分有趣的。如果参数 α 的先验不确定性 β 很大, 即 $\beta^2 \gg \sigma^2 / n$, 则由式(1-142)可知, 贝叶斯估计量接近于子样均值: $\hat{\alpha} \approx m_x$ 。这个结果与例 1.15 中采用最大似然估计所得的结果一致。这一结果的物理解释是, 本例的后验分布函数 $p(\alpha|\mathbf{x})$ 是高斯的, 因而最小均方误差估计量(条件均值)应等于最大后验估计量, 又因为 α 的先验不确定性 β 较大, 即 $p(\alpha)$ 较为平坦, 它又应接近于最大似然估计量。

另一方面。如果观测数据的方差 σ^2 很大, 而参量 α 先验分布的方差 β^2 很小, 即 $\sigma^2 / n \gg \beta^2$, 则由式(1-142)可知, 贝叶斯估计量接近于 α 的先验分布均值 μ , 即 $\hat{\alpha} \approx \mu$ 。由此看出, 当 $p(\alpha)$ 具有相当窄的尖峰时, 在试验中增加观测次数只能得到很少的有关 α 的新信息, 且贝叶斯估计与最大似然估计有较大的差异。

为了求解本例的平均风险表达式, 先求出当母体均值为 α 时的条件代价

$$\begin{aligned} R(\alpha) &= \int_{\{\mathbf{x}\}} (\alpha - \hat{\alpha})^2 p(\mathbf{x}|\alpha) d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha - \hat{\alpha})^2 p(m_x|\alpha) dm_x \\ &= \frac{\sigma^2 \beta^4 + (\mu - \alpha)^2 \sigma^2 / n}{n(\beta^2 + \sigma^2 / n)^2} \end{aligned} \quad (1-143)$$

式中, $p(m_x|a)$ 表示参量真值为 a 时样本均值 m_x 的分布密度。该分布密度为高斯分布, 其均值为 α , 方差为 σ^2/n 。而式中的估计量 \hat{a} 由式(1-142)给出。应用这些关系就可得出式(1-143)的结果。贝叶斯风险应是式(1-143)对参量 a 进行统计平均, 由式(1-143)和式(1-141)可得

$$\bar{R} = \int_{-\infty}^{+\infty} R(a) p(a) da = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{\beta^2}{\beta^2 + \sigma^2/n} \right) \quad (1-144)$$

由式(1-144)可看出, 当先验 $p(a)$ 的方差 β^2 增大, 贝叶斯风险亦增大, 并接近于上确界 σ^2/n 。

1.8.5 极大极小化估计(Maxmini estimation)

如果知道代价函数而不知道先验密度分布 $p(\alpha)$, 与检测情况相类似, 可采用极大极小化估计。此时, 目的在于寻求最不利先验分布 $w(\alpha)$ 。所谓最不利分布就是使贝叶斯风险(极小风险)极大化的那种分布。在最不利的先验密度分布 $w(\alpha)$ 下的贝叶斯估计就是极大极小估计。也就是说, 应用这种先验分布产生的贝叶斯风险 R_{MaxMin} 总不小于任何其他先验分布产生的贝叶斯风险。可以证明, 不管真实先验分布如何, 把最不利先验分布应用于贝叶斯估计, 则其平均风险总不会大于贝叶斯风险的这个最大值 R_{MaxMin} , 从而保证最大可能出现的风险极小化。

最后, 我们借用例 1.16 和例 1.17 来进一步说明极大极小化估计的概念。在该例中, 最不利情况是完全没有参量 α 的先验信息, 它相应于 $\beta \rightarrow \infty$ 的极限情况。根据式(1-142), 估计量的相应极限是 $\hat{\alpha} = m_x$ 。如果观察者使用这个估计量, 根据式(1-143), 与任何真实参量 α 相关的条件代价 $R(\alpha)$ 均为 σ^2/n , 而与 α 值无关, 也就是说, 不论 $p(\alpha)$ 形式如何, 平均风险总不会超过 σ^2/n , 因而样本均值 m_x 就是极大极小化估计量, 而 σ^2/n 为极大极小化风险。在本例这一特殊情况下, 极大极小化估计正是最大似然估计。当然, 如果观察者具有关于参量 α 的先验信息, 例如, 已知 $p(\alpha)$ 如式(1-140)所示那样, 并采用贝叶斯准则, 则平均风险可以减小。正如式(1-144)所示, 当参量 α 的先验不确定性 β 减小时, 平均风险 \bar{R} 也相应减小。

【例 1.16】 设母体 x 服从参量为 λ ($\lambda > 0$) 的泊松(Poisson)分布, 即其概率分布为

$$P(k; \lambda) = P(x = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

试求参量 λ 的极大似然估计量。

解: 因为参量 λ 的似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n (x_i!)}$$

故似然方程为

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(\lambda) = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

由此解出 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$ 即为 λ 的极大似然估计量。

【例 1.17】 设母体 x 服从 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 上的均匀分布, 即其分布密度为

$$p(x; \alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} & x \in [\alpha_1, \alpha_2] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

式中, α_1, α_2 是未知参量, 试求 α_1, α_2 的极大似然估计量。

解: 由题意知 α_1, α_2 的似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\right)^n, & x_i \in [\alpha_1, \alpha_2], 1 \leq i \leq n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

故似然方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \ln L = \frac{n}{\alpha_2 - \alpha_1} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \ln L = -\frac{n}{\alpha_2 - \alpha_1} = 0 \end{cases}$$

显然,由上式不能解出 α_1, α_2 的极大似然估计量。但是,可以从似然函数的定义出发去确定 α_1, α_2 的极大似然估计量。因为,欲使似然函数 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2)$ 非零,必须要求

$$\alpha_1 \leq x_1^* = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ 及 } \alpha_2 \leq x_2^* = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

注意到

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^n \leq \left(\frac{1}{x_2^* - x_1^*}\right)^n$$

故令 $\hat{\alpha}_1 = x_1^*, \hat{\alpha}_2 = x_2^*$, 则必有

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2) \leq L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$$

所以改写为

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= x_1^* = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \triangleq \bigwedge_{i=1}^n x_i \\ \hat{\alpha}_2 &= x_2^* = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \triangleq \bigvee_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

它们就是所求的 α_1, α_2 的极大似然估计量。

上述几种估计准则可归纳如下:

(1) 最大似然估计(Maximum likelihood estimation)

最大似然估计就是直接依靠条件概率密度函数 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})$ 知识做出的估计。

仅当 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})$ 对 $\boldsymbol{\alpha}$ 连续可微时,有

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{\text{ML}}} = \max \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{\text{ML}}} = 0 \text{ (似然方程)} \quad (1-145a)$$

或

$$\ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{\text{ML}}} = \max \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{\text{ML}}} = 0 \text{ (对数似方程)} \quad (1-145b)$$

式(1-145b)便于在 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})$ 为指数函数时用,其与式(1-145a)间的等价性与最大后验估计情况相似。

(2) 贝叶斯估计(Bayes estimation)

其最佳估计量的选择应使此平均风险值达到最小,即

$$R(\hat{\boldsymbol{\alpha}}|\mathbf{x}) = \int_{\{\boldsymbol{\alpha}\}} C(\boldsymbol{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\alpha} = E[C(\boldsymbol{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\alpha}})] = E[C(\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}})] = \min \quad (1-146)$$

(3) 最小(误差)方差估计(Minimum variance-of-error estimation)。

最小误差方差估计(简称最小方差估计)是一种采用前述平方代价函数得出的贝叶斯估计。

(4) 最大后验估计(Maximum a posteriori estimation)

最大后验估计是一种采用前述均匀代价函数得出的贝叶斯估计,即

$$R(\hat{\boldsymbol{\alpha}}|\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\hat{\boldsymbol{\alpha}}|\boldsymbol{\alpha}) p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) |d\boldsymbol{\alpha}|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{\text{MAP}}} = \min \quad (1-147)$$

仅当 $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})$ 对 $\boldsymbol{\alpha}$ 连续可微时,有

$$p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha}) |_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{\text{MAP}}} = \max \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha}) |_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{\text{MAP}}} = 0 \quad (1-148)$$

$$\text{或} \quad \ln p(\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{x}) |_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{\text{MAP}}} = \max \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \ln p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha}) |_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{\text{MAP}}} = 0 \quad (1-149)$$

1.8.6 线性最小均方估计(Liner minimum variance estimation)

在贝叶斯(Bayes)估计 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MV}}$ 和最大似然估计 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}}$,这两种贝叶斯估计虽然精度高,但它们需要知道观测样本的条件概率密度 $p(\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{x})$ 。然而,在很多情况下它们是未知的。另外,最大似然估计 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}}$ 所需先验条件概率函数 $p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha})$ 虽易于掌握,但它会涉及非线性估计问题,它是不能求解的。

在贝叶斯估计中,如果代价函数取误差的平方,则平均风险最小就是均方误差最小,这时贝叶斯估计是最小均方误差估计。如果 $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ 是联合高斯分布,则 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 \mathbf{x} 的关系是线性的;如果联合分布不是高斯的,估计值 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 和观测值 \mathbf{x} 的关系可能是非线性的。进行最小均方误差估计,需要知道概率分布。如果不知道概率分布,但限定估计值 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 与观测值 \mathbf{x} 之间关系是线性的,也就是说,线性最小均方误差估计与一般最小均方误差估计的差别在于它规定了 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 与观测样本之间必须满足线性关系。即

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{w}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (1-150)$$

式中, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 \mathbf{b} 都是 m 维矢量, \mathbf{w} 是 $m \times n$ 维矩阵。估计误差为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad (1-151)$$

它们都是 m 维矢量。均方误差是

$$\boldsymbol{\varepsilon}^2 = E\{(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{w}\mathbf{x} - \mathbf{b})^T \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{w}\mathbf{x} - \mathbf{b})\} \quad (1-152)$$

它们是 \mathbf{w}, \mathbf{b} 的函数。选择合适的 \mathbf{w}, \mathbf{b} ,使均方误差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 最小,这种估计称为线性最小均方误差估计,记作 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LMS}}$ 。为了求最小均方误差,需分别对矢量 \mathbf{b} 和矩阵 \mathbf{w} 求导,即 $\partial \boldsymbol{\varepsilon} / \partial \mathbf{b}$ 和 $\partial \boldsymbol{\varepsilon} / \partial \mathbf{w}$,要求 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 最小, $\partial \boldsymbol{\varepsilon} / \partial \mathbf{b}$ 应当是零矢量, $\partial \boldsymbol{\varepsilon} / \partial \mathbf{w}$ 应当是零矩阵,可解联立方程得出 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LMS}}$ 。

现设 $\mathbf{b}=0$,则在线性均方(LMS)估计中,待定参量的估计量表示为观测数据的线性加权之和,即

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LMS}} = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \quad (1-153)$$

式中, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 是待确定的权系数。为使均方误差函数 $E[\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}]^2$ 最小,需通过权系数 ω_i 来确定

$$\min E[\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}]^2 = \min E\left[\sum_{i=1}^n \omega_i x_i - \boldsymbol{\alpha}\right]^2 = \min E[e]^2 \quad (1-154)$$

式中, $e = \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}$ 是估计误差,求上式相对于求 ω_i 的偏导,并令其等于零,就得到

$$\frac{\partial E[e^2]}{\partial \omega_i} = E\left[\frac{\partial e^2}{\partial \omega_i}\right] = 2E\left[\frac{\partial e}{\partial \omega_i}\right] = 2E[ex_i] = 0$$

式中

$$\frac{\partial e}{\partial \omega_i} = \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left[\sum_{i=1}^n \omega_i x_i - \boldsymbol{\alpha} \right] = x_i$$

可见,若

$$E[ex_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-155)$$

则估计的均方误差最小。上式称之为正交性。其意思是,当且仅当估计误差正交于每个给定

的观测数据时,则估计的均方误差最小。

为了推导权系数的公式,将式(1-155)改写成

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^n w_j x_j - \alpha\right)x_i\right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-156)$$

令 $g_i = E[\alpha x_i]$, $R_{ij} = E[x_i x_j]$, 则式(1-156)可简化为

$$\sum_{j=1}^n R_{ij} w_j = g_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-157)$$

这一方程称为法方程。下面推导法方程的矩阵形式。设

$$R = \{R_{ij}\} = \{E[x_i x_j]\}, \quad \mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T, \quad \mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T$$

于是式(1-157)可表示为以下矩阵方程

$$R\mathbf{w} = \mathbf{g} \quad (1-158)$$

R 称为自相关阵。当 R 为非奇异时,权矢量可由

$$\mathbf{w} = R^{-1} \mathbf{g}$$

求出。 R 非奇异的条件是权系数之间是独立的。由式(1-156)可知,这相当于已知样本 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是独立的。

1.8.7 最小二乘估计(Least square estimation)

最小二乘估计方法不同于前面所述的几种估计方法,它不需要关于被估计量和观测量的任何统计描述。在某种意义上,最小二乘估计是从贝叶斯估计开始的不断放宽统计要求的最后一步。贝叶斯估计需要知道似然函数和待估计参量的先验概率密度函数。首先是最大似然估计,它不需要待估计参量的先验概率密度函数,而只需要知道似然函数。其次是线性最小方差估计,它去掉了全部概率假定,而只需要第一、二阶统计矩。最后的最小二乘估计省去了全部概率假定,而把估计问题作为确定性的最佳化问题来处理。下面仅就参数为矢量情况的最小二乘估计加以叙述。

待定矢量的最小二乘估计是一种在先验信息上比最小均方误差估计和线性最小均方误差估计远为宽松的估计。最小二乘估计方法的基本构思由高斯(Gauss)提出的。

在最小均方误差估计中,误差定义为 $\alpha - \hat{\alpha}$, 是真值与估计值之差。在最小二乘(least square)估计中,关心的是 $\mathbf{x} - \mathbf{A}\hat{\alpha}$, 是观察值和信号估计值之差。希望这个差矢量的模的平方最小。

设 α 是一个 p 维参数矢量,即 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)^T$, 假定已对 α 做 n 次观测,得到观测方程为

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\alpha + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1-159)$$

式中, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是已知的观测矢量; $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T$ 是未知的误差矢量,它是一个随机矢量(又称 n 维噪声矢量),并且没有任何先验的统计信号; \mathbf{A} 是已知的 $n \times p$ 矩阵($n \geq p$),我们的目的是设法利用已知的 \mathbf{x} 和 \mathbf{A} 来估计参数矢量 α 。为此,考察误差的平方和 $r(\alpha)$:

$$\begin{aligned} r(\alpha) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{x} - \mathbf{A}\hat{\alpha})^T (\mathbf{x} - \mathbf{A}\hat{\alpha}) \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A} \hat{\alpha} - \hat{\alpha}^T \mathbf{A}^T \hat{\alpha} + \hat{\alpha}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\alpha} \end{aligned}$$

寻求使估计误差平方和 $r(\alpha)$ 为最小的估计量 $\hat{\alpha}$ 的方法称为最小二乘估计法。欲使 $r(\alpha)$ 达到最小的一个必要条件是令

$$\frac{dr(\alpha)}{d\hat{\alpha}} = -2\mathbf{A}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\alpha} \quad (1-160)$$

当矩阵 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 非奇异时,由上式可求得

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{x} \quad (1-161)$$

此外,若假定 $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0, \text{Var}[\boldsymbol{\varepsilon}] = E[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T] = \sigma^2 \mathbf{I}$ (σ^2 未知),则有

$$E[\mathbf{x}] = E[\mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}] + E[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}$$

及

$$\text{Var}[\mathbf{x}] = \text{Var}[\mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}] = \text{Var}[\mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}] + \text{Var}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \text{Var}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \sigma^2 \mathbf{I}$$

因此有

$$E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}}] = E[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{x}] = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T E[\mathbf{x}] = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$$

即 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的一个无偏估计量。试问: $\boldsymbol{\alpha}$ 的最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}}$ 是否为一个最佳估计呢?

事实上,仍设 $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0, \text{Var}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \sigma^2 \mathbf{I}$ (σ^2 未知),因对 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任一线性函数 $g(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{M}^T \boldsymbol{\alpha}$,有

$$E[g(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}})] = \mathbf{M}^T E[\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}}] = \mathbf{M}^T \boldsymbol{\alpha} = g[\boldsymbol{\alpha}]$$

此即说明 $\mathbf{M}^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}}$ 是 $\mathbf{M}^T \boldsymbol{\alpha}$ 的无偏估计量。一般地,若 \hat{g} 是 $g(\boldsymbol{\alpha})$ 的任一无偏估计量,由于线性关系,可令 $\hat{g} = \mathbf{B}^T \mathbf{x}$ 。于是就有

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}^T E[\mathbf{x}] = E[\mathbf{B}^T \mathbf{x}] = E[\hat{g}] = g(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{M}^T \boldsymbol{\alpha}$$

由此得到 $\mathbf{B}^T \mathbf{A} = \mathbf{M}^T$ 。此外还有

$$\text{Var}[\hat{g}] = \text{Var}[\mathbf{B}^T \mathbf{x}] = \mathbf{B}^T (\text{Var}[\mathbf{x}]) \mathbf{B} = \sigma^2 \mathbf{B}^T \mathbf{B}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \text{Var}[\mathbf{M}^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}}] &= \text{Var}[\mathbf{M}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{x}] = \text{Var}[\mathbf{M}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}] \\ &= \sigma^2 (\mathbf{M}^T \mathbf{A}^{-1}) (\mathbf{M}^T \mathbf{A}^{-1})^T = \sigma^2 \mathbf{M}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{M} \\ &= \sigma^2 \mathbf{B}^T \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \end{aligned}$$

利用矩阵形式的 Schwarz 不等式:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} \geq (\mathbf{A}^T \mathbf{B})^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \quad (1-162)$$

即知

$$\text{Var}[\mathbf{M}^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}}] \leq \text{Var}[\hat{g}] \quad (1-163)$$

这就是当误差矢量的各个分量具有相同的方差,且各个分量互不相关时,最小二乘估计在方差最小意义下是最佳的,即为高斯—马尔可夫(Gauss-Markov)定理。

1.8.8 加权最小二乘估计

采用加权最小二乘估计可以使估计的均方误差得到降低。当各次数据测量精度不等时,应采用加权(Weighting)处理,对精度较高的测量结果赋以较大的权值(使其对改善结果有更大的影响),即应选取 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MLS}}$ 使得估计误差的加权平方和达到最小。

现考虑由

$$Q(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{w} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1-164)$$

给出加权误差函数。此处 \mathbf{w} 为加权矩阵。现在我们来求 $\boldsymbol{\alpha}$ 的估计使 $Q(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{w} \boldsymbol{\varepsilon}$ 最小化,而不是像最小二乘估计那样使 $r(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ 最小化。首先将 $Q(\boldsymbol{\alpha})$ 展开,即

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\alpha}) &= (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{w} (\mathbf{x} - \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}) \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{w} \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^T \mathbf{w} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{w} \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A}^T \mathbf{w} \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

欲使 $Q(\boldsymbol{\alpha})$ 达到最小,只需令

$$\frac{dQ(\boldsymbol{\alpha})}{d\boldsymbol{\alpha}} = -2\mathbf{A}^T \mathbf{w} \mathbf{x} + 2\mathbf{A}^T \mathbf{w} \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} = 0$$

这就是说,加权最小二乘(WLS)估计 $\hat{\alpha}_{\text{WLS}}$ 必定满足条件

$$\mathbf{A}^T \mathbf{w} \mathbf{A} \hat{\alpha}_{\text{WLS}} = \mathbf{A}^T \mathbf{w} \mathbf{x}$$

假定 $\mathbf{A}^T \mathbf{w} \mathbf{A}$ 是非奇异的(即满秩矩阵时),可得 α 的加权最小二乘估计为

$$\hat{\alpha}_{\text{WLS}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{w} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{w} \mathbf{x} \quad (1-165)$$

在前面提到的高斯-马尔可夫定理中,当误差矢量的各分量不仅具有相同的方差,而且还还不相关时,最小二乘估计 $\hat{\alpha}_{\text{LS}}$ 才具有最小方差的意义上是最佳的。若不满足上述两条件,则 $\hat{\alpha}_{\text{LS}}$ 就不会是最佳的。现在我们需考虑如何选择加权矩阵 \mathbf{w} ,使得其他任何一个 α 的无偏估计量的方差均比 $\text{Var}[\hat{\alpha}_{\text{WLS}}]$ 要大。

假定 $\text{Var}[\varepsilon]$ 具有比较一般的形式 $\sigma^2 \Sigma$, 其中 Σ 是正定矩阵。必存在非奇异阵 \mathbf{P} , 使得 $\Sigma = \mathbf{P} \mathbf{P}^T$ 。令 $\mathbf{e} = \mathbf{P}^{-1} \varepsilon$ 和 $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$, 于是我们可将观测矢量 $\mathbf{x} = \mathbf{A} \alpha + \varepsilon$ 表示成

$$\mathbf{P} \mathbf{y} = \mathbf{A} \alpha + \mathbf{P} \mathbf{e}$$

若令 $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}$, 则上式可写成

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \alpha + \mathbf{e} = \mathbf{B} \alpha + \mathbf{e} \quad (1-166)$$

注意到

$$\text{Var}[\mathbf{e}] = \mathbf{P}^{-1} \text{Var}[\varepsilon] (\mathbf{P}^{-1})^T = \sigma^2 \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P} \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}^{-T} = \sigma^2 \mathbf{I}$$

因此,采用 \mathbf{y} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{e} 之后,模型 $\mathbf{y} = \mathbf{B} \alpha + \mathbf{e}$ 就变成了高斯-马尔可夫定理中的模型,且满足定理的条件。据高斯-马尔可夫定理,最小二乘估计

$$\hat{\alpha}_{\text{LS}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{y} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} \quad (1-167)$$

是最佳的。比较式(1-165)与式(1-167)可知,只要取加权矩阵为

$$\mathbf{w} = \Sigma^{-1} \quad (1-168)$$

即可获得 α 的最佳加权最小二乘估计。

1.8.9 线性最小均方误差估计的递推算法

在信号统计处理中,递推算法往往是一种受欢迎的算法,在信号估计问题中也是如此。线性最小均方误差估计的递推算法可以根据观测样本数据的更新而递推地更新估计值,其性能始终保持“最小均方误差估计”的要求。采用递推算法可以大大地节省观测数据的存储量,而且计算量也可以大幅度减少。在此,我们仅讨论样本均值和样本方差的递推估计。

假定 \bar{x}_n 是由观测值 x_1, x_2, \dots, x_n 计算出来的样本值,即

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1-169)$$

现在,增加了一个新的观测值 x_{n+1} , 则新的样本均值为

$$\bar{x}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \quad (1-170)$$

将式(1-170)代入式(1-168),得

$$\bar{x}_{n+1} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right) + \frac{1}{n+1} x_{n+1} = \frac{n}{n+1} \bar{x}_n + \frac{1}{n+1} x_{n+1}$$

整理后,得

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n + \frac{1}{n+1} (x_{n+1} - \bar{x}_n) \quad (1-171)$$

式(1-171)称做估计更新公式。图 1.18 示出递推产生样本均值的线性系统。 $e_{n+1} = x_{n+1} - \bar{x}_n$

可视为一残差, z^{-1} 为单位延迟算子。

类似地, 也可以寻求计算样本方差 s^2 的递推方法。令 s_n^2 是从 n 个观测值计算得到的样本方差, 即

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 \quad (1-172)$$

有了新的观测值 x_{n+1} 后, 得

$$s_{n+1}^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - \bar{x}_{n+1})^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} [(x_i - \bar{x}_n) + (\bar{x}_n - \bar{x}_{n+1})]^2$$

将上式改写成

$$s_{n+1}^2 = \frac{n}{n+1} s_n^2 + \frac{1}{n+1} (x_{n+1} - \bar{x}_n)^2 - (\bar{x}_n - \bar{x}_{n+1})^2 \quad (1-173)$$

将式(1-171)代入式(1-173), 得

$$s_{n+1}^2 = \frac{n}{n+1} s_n^2 + \frac{n}{(n+1)^2} (x_{n+1} - \bar{x}_n)^2$$

对上式稍加整理, 最后使得样本方差的估计更新公式为

$$s_{n+1}^2 = s_n^2 + \frac{1}{n+1} \left[\frac{n}{n+1} (x_{n+1} - \bar{x}_n)^2 - s_n^2 \right] \quad (1-174)$$

1.9 区间估计

前面所介绍的估计都是根据观测样本 \mathbf{x} [\mathbf{x} 中应包含待定参量 α (或参量矢量 $\boldsymbol{\alpha}$)] 得出 α (或 $\boldsymbol{\alpha}$) 的一个估计值, 这样估计称为点估计 α (或 $\hat{\alpha}$)。点估计得到的是待定量 α (或 $\hat{\alpha}$) 的估计值域中某个点值。

前面所介绍的是未知参量 α (或参量矢量 $\boldsymbol{\alpha}$) 的点估计 $\hat{\alpha}$ (或 $\boldsymbol{\alpha}$)。它对了解未知参量 α (或 $\boldsymbol{\alpha}$) 的大小有一定作用。我们还希望估计出一个范围, 并希望知道这个范围包含参量 α 真值、精度和可信程度。区间估计便可弥补这一缺陷。

1.9.1 置信区间

设母体分布含有一未知参量 α , 若由样本确定的两个统计量 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 及 $\underline{\boldsymbol{\alpha}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 对于给定值 β ($0 < \beta < 1$), 满足

$$P\{\underline{\boldsymbol{\alpha}}(x_1, x_2, \dots, x_n) < \alpha < \bar{\boldsymbol{\alpha}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\} = 1 - \beta \quad (1-174)$$

则称随机区间 $(\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}})$ 是 α 的 $100 \times (1 - \beta) \%$ 置信区间, $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ 及 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 称为 α 的 $100 \times (1 - \beta) \%$ 置信限 (分别称 $\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 为置信下限及置信上限), 百分数 $100 \times (1 - \beta) \%$ 称为置信度。

由上述可知, 置信水平 $1 - \beta$ 的值越大, 说明由样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 所确定的具体的区间 $\underline{\boldsymbol{\alpha}}(x_1, x_2, \dots, x_n), \bar{\boldsymbol{\alpha}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 包含未知参量 α 的可信度就越大。

若随机区间 $(\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}})$ 的平均长度 $E[\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}]$ 越小, 说明此区间估计 $(\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\alpha}})$ 作为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的估计范围的精确程度越好。这就表明区间估计不仅给出了未知参量的一个估计范围, 同时也提供了这个估计范围的精度和可信程度, 所以, 区间估计的实用意义更广泛。

在此, 我们仅讨论母体 \mathbf{x} 为正态 (或称高斯) 分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的均值和方差的区间估计。

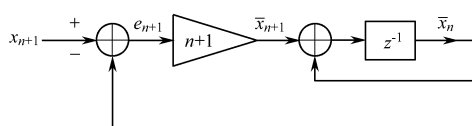


图 1.18 递推产生样本均值的线性系统

1.9.2 单个母体的区间估计

1. σ^2 已知, 求 μ 的置信区间

设 x_1, x_2, \dots, x_n 为母体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 我们知道, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 是 μ 的一个点估计。置信区间的构造将基于 μ 的最佳估计——样本均值。

若 σ^2 已知, 则由正态母体抽样分布性质知

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

且知分布 $N(0, 1)$ 不依赖于 μ 。因此, 对于给定的置信度 $100 \times (1 - \beta) \%$, 有

$$P\left\{-z_{\beta/2} < \frac{(\bar{x} - \mu) \sqrt{n}}{\sigma} < z_{\beta/2}\right\} = 1 - \beta \quad (1-176)$$

由不等式

$$-z_{\beta/2} < \frac{(\bar{x} - \mu) \sqrt{n}}{\sigma} < z_{\beta/2}$$

推得

$$\bar{x} - z_{\beta/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\beta/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

故所求的 $100 \times (1 - \beta) \%$ 置信区间为

$$\left(\bar{x} - z_{\beta/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\beta/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad (1-177)$$

2. σ^2 未知时, 求 μ 的置信区间

设 x_1, x_2, \dots, x_n 为母体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 由于 σ^2 未知, 所以不能用式(1-174)来表示置信区间。而可用样本方差 s^2 来估计 σ^2 。

设 $x \sim N(0, 1)$, $y = x^2(n)$, 并且 x 与 y 相互独立, 可以证明, 随机变量

$$t = \frac{x}{\sqrt{y/n}} \quad (1-178)$$

服从自由度为 N 的 t 分布, 记做 $t \sim t(n)$ 。

同样, 可以证明, x_1, x_2, \dots, x_n 为母体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 有

$$\frac{(\bar{x} - \mu) \sqrt{n}}{s} \sim t(n-1) \quad (1-179)$$

且 $t(n-1)$ 不依赖于 μ , 由此得

$$P\{-t_{\beta/2}(n-1) < \frac{(\bar{x} - \mu) \sqrt{n}}{s} < t_{\beta/2}(n-1)\} = 1 - \beta \quad (1-180)$$

故得方差未知的正态母体, 它的均值 μ 的 $100 \times (1 - \beta) \%$ 置信区间为

$$\left[\bar{x} \pm t_{\beta/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}\right] \quad (1-181)$$

3. 方差 σ^2 的置信区间

我们在 χ^2 分布的性质中知道, 若 x_1, x_2, \dots, x_n 是正态母体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 则

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ 与 } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

分别为样本平均值与样本方差, 则(a) \bar{x} 与 s^2 相互独立; (b) $\frac{(n-1)}{\sigma^2} s^2 \sim \chi^2(n-1)$, 并且分布

$\chi^2(n-1)$ 与 σ^2 无关,故有

$$P\left\{\chi_{1-\beta/2}^2(n-1) < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi_{\beta/2}^2(n-1)\right\} = 1-\beta \quad (1-182)$$

由此得,当总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的参量 μ, σ^2 都为未知时,方差 σ^2 的 $100 \times (1-\beta)\%$ 置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\beta/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\beta/2}^2(n-1)}\right) \quad (1-183)$$

【例 1.18】 设母体 $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,参数 μ 未知, x_1, x_2, \dots, x_n 是来自 \mathbf{x} 的 n 个样本,给定置信水平 $1-\alpha$,试求 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的最短置信区间。

解:因为统计量

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

取 a 和 b 使得

$$P\left\{a < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < b\right\} = P\left\{\frac{(n-1)s^2}{b} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{a}\right\} = 1-\alpha \quad (1-184)$$

由此可得 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{b}, \frac{(n-1)s^2}{a}\right) \quad (1-185)$$

记此区间变为 $L = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)(n-1)s^2$;而其平均长度为

$$E[L] = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)(n-1)\sigma^2 \quad (1-186)$$

令 $\chi^2(n-1)$ 分布的分布密度为 $p_{n-1}(x)$,则由式(1-184)知

$$\int_a^b p_{n-1}(x) dx = 1-\alpha \quad (1-187)$$

对式(1-186)和式(1-187)关于 a 求导,得到

$$\begin{cases} \frac{d}{da} E[L] = \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \frac{db}{da}\right)(n-1)\sigma^2 \\ p_{n+1}(b) \frac{db}{da} - p_{n-1}(a) = 0 \end{cases} \quad (1-187)$$

$$(1-189)$$

将式(1-189)代入式(1-188)得到

$$\frac{d}{da} E[L] = \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \frac{p_{n-1}(a)}{p_{n-1}(b)}\right)(n-1)\sigma^2 \quad (1-190)$$

令 $\frac{d}{da} E[L] = 0$,即得

$$a^2 p_{n-1}(a) = b^2 p_{n-1}(b) \quad (1-191)$$

即满足上式的 a 和 b 可使置信区间 $\left(\frac{(n-1)s^2}{b}, \frac{(n-1)s^2}{a}\right)$ 的平均长度最短。

本章小结

本章从决策理论的角度研究了信号检测与参量估计问题。 m 元信号检测问题中,信号空间的元素只有 m 个,即仅有 m 个可能的信号 (s_1, s_2, \dots, s_m) ,统计判决的实质是把输入空间划分为二个区域 (D_1, D_2, \dots, D_m) ,这表明判决空间的元素为 m 个。当 $m=2$ 时, m 元信号检测

蜕化为双择检测,这是本章研究的重点。带有随机参量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)^\top$ 的二元信号检测问题中,信号空间是 k 维的,具有无限多个元素,但只要判决这个信号集存在与否,因而判决空间元素仍只有两个。对于参量矢量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^\top$ 的估计问题,信号空间和判决空间都是 m 维的,均具有无限多个元素。最佳估计的实质是寻求输入空间到判决空间的一种映射 $\hat{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n)$,使决策在某种意义上达到最佳。因此,可以把检测问题看做是参量估计问题的特殊情况。例如,二元检测可以看做参量 α 只能取两个离散数值时的参量估计问题。

信号检测与参量估计问题的一致性还表现在它们的最佳准则几乎完全相同。贝叶斯检测是贝叶斯估计的离散情况,其出发点都是使平均风险达到最小。当不知道代价,或者认为正确判决无代价,任何错误判决代价相同时,贝叶斯估计蜕化为最大后验估计,贝叶斯检测蜕化为最大后验检测。反之,如果不知道各假设的先验概率或参量的先验分布,则可使用极大极小化检测或极大极小化估计。如果对信号或其参量既无先验信息,也无法确定代价,则需采用奈曼-皮尔逊准则(最大似然检测为其特例)或最大似然估计。

本章还介绍了误差的定义和分类,评价信号参量估计性能的若干标准,推导了克拉默-拉奥不等式。就信号参量估计而言,在诸多估计的方法中,最常用的是贝叶斯估计、极大极小化估计和最大似然估计。根据所采用的估计准则不同,贝叶斯估计又可分为最小方差估计、最大后验估计和后验中数估计三类,它们分别对应于上述三种不同的代价函数。随机参量的贝叶斯估计需要的信息是待估计参数的先验概率密度函数 $p(\alpha)$,似然函数 $p(\alpha|x)$ 及代价函数 $c(\alpha, \hat{\alpha})$ 。利用这些量能列出风险表示式。使风险最小的估计称为贝叶斯估计。当后验概率密度函数为对称于均值的单峰函数时,对于多种类型的代价函数,贝叶斯估计就是后验均值,则此时贝叶斯估计等同于最大后验概率估计。而最大后验概率估计不要求知道代价函数,所以它是比贝叶斯估计条件更宽的一种估计。继续放宽条件,当先验密度和代价函数二者都未知时,可以利用最大似然函数,它对于随机参量和非随机参量都是适用的。对于非随机参量的情况,由于最大似然估计具有优越的渐近性能,所以成为通用的一种估计方法。再放宽条件,就是最小二乘估计。我们仅介绍了上述检测和估计方法的基本概念和基本方法。在下面各章中,我们将用本章所述的基本理论进一步研究信号检测、信号参量估计及波形估计问题,并用实例说明这些理论的应用。

习 题 一

- 1.1 在二元数字通信系统中,假设 H_1 时,信源输出为常值电压 A ,假设 H_0 时,信源输出为零;信号在通信信道传输过程中叠加了高斯噪声 $n(t)$;在接收端对接收信号 $x(t)$ 进行了 n 次独立采样,样本为 $x_k, k=1, 2, \dots, n$;如果噪声样本 $n(t)$ 是均值为零、方差为 σ_n^2 的高斯噪声,如图 1.19 所示。试建立信号检测系统的模型;确定似然比检验的判决规则。

考虑到 N 次采样是统计独立的,可得到两假设下观测矢量 \mathbf{x} 的概率密度函数分别为

- 1.2 设二元假设检验的观测信号模型为

$$H_0: \mathbf{x} = -1 + \mathbf{n}_x, \quad H_1: \mathbf{x} = 1 + \mathbf{n}_x$$

式中, \mathbf{n}_x 是均值为零、方差为 $\sigma_n^2 = 1/2$ 的高斯观测噪声。若两种假设是等先验概率的,则代价因子为

$$c_{00} = 1, c_{10} = 4, c_{11} = 2, c_{01} = 8$$

试求最佳(贝叶斯)判决表示式和平均代价 \bar{C}_0 。

- 1.3 在习题 1.2 中,判决表示式为

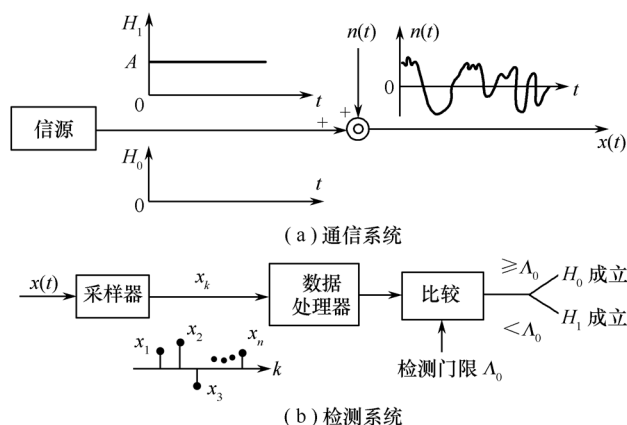


图 1.19 信号检测系统模型

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} -0.1733$$

已计算出的平均代价 $\bar{C}=1.8269$ 。试将检测门限 $\Lambda_0=-0.1733$ 稍作调整,例如,调整为 $\Lambda_1=-0.17$, $\Lambda_2=-0.18$,然后分别计算相应的平均代价 \bar{C}_1 和 \bar{C}_2 ,并与原检测门限 $\Lambda_0=-0.1733$ 所对应的平均代价 $\bar{C}=1.8269$ 进行比较。请对比较结果做出解释。

- 1.4 假定在两种假设下,源输出是零均值高斯信号。在假设 H_1 下,信号的方差是 σ_1^2 ;在假设 H_0 下,信号的方差是 σ_0^2 。求错误判决的平均概率和平均风险 \bar{R} 的表示式。
- 1.5 考虑二元随机参量信号的检测问题。若两个假设下观测信号分别为

$$H_0: x = n_s, \quad H_1: x = s + n_s$$

式中,信号 s 和噪声 n_0 是相互统计独立的随机变量,其概率密度函数分别为

$$p(s) = \begin{cases} a \exp(-as), & s \geq 0, a > 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$$

和

$$p(n) = \begin{cases} b \exp(-bn), & n \geq 0, b > 0, \text{且 } b > a \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- (1) 证明:信号检测的似然比检验(似然比检测门限为 Λ_0)可化简为

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma$$

- (2) 求贝叶斯准则下检测门限 γ 与先验概率 $P(H_j)$ 和代价因子 c_{ij} 的函数关系。

- (3) 如果采用奈曼-皮尔逊准则,求检测门限 γ 与错误判决概率 $P(D_1 | H_0)$ 的函数关系。

- 1.6 已知被估计参量 θ 的后验概率密度函数为

$$p(\theta|x) = (x+\lambda)^2 \theta \exp[-(x+\lambda)\theta], \quad \theta \geq 0$$

- (1) 求 θ 的最小均方误差估计量 $\hat{\theta}_{\text{MSE}}$ 。

- (2) 求 θ 的最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 。

- 1.7 如果通过一次观测量 x 来估计信号的随机参量 θ 。已知 $p(x, \theta) = p(x|\theta)p(\theta)$ 中的 $p(x|\theta)$ 和 $p(\theta)$ 分别为

$$p(x|\theta) = \theta \exp(-\theta x), \quad \theta \geq 0, \quad x \geq 0$$

$$p(\theta) = 2 \exp(-2\theta), \quad \theta \geq 0$$

求 θ 的最小均方误差估计量 $\hat{\theta}_{\text{MSE}}$ 和最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 。

如果进行了 n 次独立观测,观测量为 $x_k (k=1, 2, \dots, n)$,求 θ 的最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$;研究当 n 足够大,

$\sum_{k=1}^n x_k \gg 2$ 时, $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 的近似估计公式。

- 1.8 若线性观测方程为

$$x_k = \frac{\theta}{2} + n_k, \quad k=1, 2, \dots, n$$

式中, n_k 是方差为 σ_n^2 的零均值高斯白噪声, 且 $E(\theta n_k) = 0$ 。

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_{ML}$, 考查其主要性质。

(2) 若已知 θ 的先验概率密度函数为

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\theta}{4}\right), & \theta \geq 0 \\ 0, & \theta < 0 \end{cases}$$

求 θ 的最大后验估计量 $\hat{\theta}_{MAP}$, 考查其无偏性, 并求其均方误差。

(3) 画出 $\hat{\theta}_{ML}$ 和 $\hat{\theta}_{MAP}$ 与观测量的关系曲线, 并加以比较。

1.9 一观测过程由 $x(n) = A + w(n)$ 定义, 其中 A 是一未知的常量参数, 而 $w(n)$ 是高斯白噪声, 均值为零, 方差为 σ_w^2 。若 \hat{A} 是根据 $x(1), x(2), \dots, x(n)$ 得到的参数估计值, 求其估计方差的克拉默-拉奥下界。

1.10 观测样本由下式给出:

$$x_i = \varepsilon + w_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

式中, w_i 是零均值的高斯白噪声, 具有单位方差。已知信号 s 的概率密度函数为

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}$$

求最小均方误差(MMSE)估计 \hat{s}_{MMSE} 和最大后验概率估计 \hat{s}_{MAP} 。

1.11 设 M 维被估计随机矢量 θ 的均值矢量和协方差矩阵分别为 \mathbf{M}_θ 与 \mathbf{R}_θ 。观测方程为

$$x = H\theta + \mathbf{n}_x$$

且已知

$$E(\mathbf{n}_x) = 0, \quad E(\mathbf{n}_x \mathbf{n}_x^T) = \mathbf{R}_n, \quad E(\theta \mathbf{n}_x^T) = 0$$

求 θ 的线性最小均方误差估计矢量 $\hat{\theta}_{LMSE}$ 和估计矢量的均方误差阵 $\mathbf{M}_{\hat{\theta}_{LMSE}}$ 。

1.12 如果参量 θ 的观测方程为

$$x_k = \theta + n_k, \quad k=1, 2, \dots, n$$

式中, θ 是未知非随机参量; 观测噪声 n_k 是均值为零、方差为 σ_n^2 的独立同分布高斯噪声。求函数 $\alpha = \exp(\theta)$ 的最大似然估计量 $\hat{\alpha}_{ML}$ 。

1.13 类似 1.12 题, 设线性观测方程为

$$x_k = \theta + n_k, \quad k=1, 2, \dots, n$$

式中, θ 是非随机参量; n_k 是均值为零、方差为 σ_n^2 的独立高斯噪声。现在求 θ 的函数 $\alpha = b\theta$ 的最大似然估计量 $\hat{\alpha}_{ML}$, 其中 $b \neq 0$, 且为常数; 考查 $\hat{\alpha}_{ML}$ 的无偏性和有效性, 并求估计的均方误差。

1.14 对比 1.12 题, 现考虑高斯噪声中, 高斯随机参量 θ 的最大后验估计问题。

设观测方程为

$$x_k = \theta + n_k, \quad k=1, 2, \dots, n$$

式中, 被估计随机参量 θ 是均值为 m_θ 、方差为 σ_θ^2 的高斯随机参量; 观测噪声 n_k 是均值为零、方差为 σ_n^2 的高斯噪声; 若 n 次观测间相互统计独立, 求 θ 的最大后验估计量 $\hat{\theta}_{MAP}$ 和估计量的均方误差 $\epsilon_{\hat{\theta}_{MAP}}^2$ 。

1.15 根据对二维矢量 θ 的两次观测

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \theta + n_1, \quad x_2 = 4 = [1 \quad 2] \theta + n_2$$

求 θ 的最小二乘估计量 $\hat{\theta}_{LS}(\mathbf{x})$

1.16 用电表对电压进行了两次测量, 测量结果一次为 216V, 另一次为 220V, 观测方程为

$$216 = \theta + n_{x_1}, \quad 220 = \theta + n_{x_2}$$

式中, 观测噪声的均值和方差阵分别为

$$E(n_{x_1}) = E(n_{x_2}) = 0$$

$$E \left\{ \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x_1} & n_{x_2} \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} 4^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

求电压 θ 的最小二乘估计量和最佳加权最小二乘估计量, 并对结果进行比较和讨论。

第 2 章 高斯信道中确知信号的检测

2.1 概述

在第 1 章检测与估计的基本理论中,我们已建立了从噪声中检测信号的理论基础。已知道,所谓“检测”就是利用概率与统计的工具,在某一最佳准则下,来设计检测接收信号的数学模型(即最佳接收机),通过数学上的处理尽可能地从噪声干扰中鉴别出有用信号,或者在噪声存在的情况下区分不同的信号。

首先来弄清检测这个词的涵义,这个词在接收机的讨论中有两个不同的用法。第一种是指把射频(RF)信号或噪声转换为视频信号的过程;第二种是指检测是否有信号存在的过程。本书仅讨论第二种方法。

在简单的模拟接收机中,输入的 RF 信号转化为视频信号,是通过一个晶体视频检测波器消除 RF 来实现的。有时把信号先变换到中频(IF),然后通过一个视频检测器变换为视频信号,视频检测器的输出接一个简单的门限比较器。如果视频信号高于检测门限,接收机将检测到信号,如图 2.1(a)所示。由于视频信号是在时域,所以这类检测也是在时域实现的。这类简单的门限检测框图如图 2.1(b)所示。

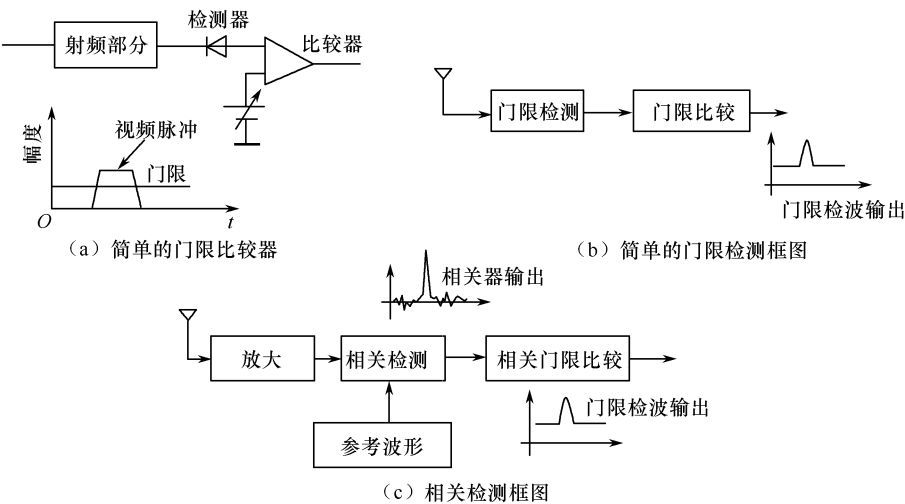


图 2.1 两种信号检测框图

在雷达接收机设计中,由于输入信号波形是已知的,因此能使用匹配滤波器与输入信号匹配,从而使接收机灵敏度达到最佳。接收机还能够对许多脉冲进行累积进一步提高灵敏度。

在数字接收机中,中频输出以非常高的速率数字化,在一个脉冲内可以采集许多数据点,为了把模/数变换器(ADC)输出转化到频域,可以对采集的数据进行快速傅里叶变换(FFT),因此既可以在时域也可以在频域对输出进行检测。

在雷达接收机中常用图 2.1(c)的相关接收(与匹配接收等效)检波框图,在图 2.1(c)中,相关检波把被接收的信号与参考信号比较。波形的频率分量包含在信号的形状随时间的变化

中相关。把这两个信号相乘、取平均,得到正比于两者匹配程度的输出。输出正比于给定的一段时间内相关的程度。检测把处理后的相关器的输出与一个门限相比。相关后的处理可以是线性的或非线性的。

现以雷达和通信系统为例来讨论检测问题,首先是判断输入端是否有信号。输入到检测系统的观测信号 $x(t)$ 有两种可能性:一是信号加噪声,即 $x(t)=s(t)+n(t)$;二是只有噪声,即 $x(t)=n(t)$ 。检测系统的任务是对输入 $x(t)$ 进行必要的处理或运算,然后根据检测系统的输出来判断输入是否有信号,如图 2.2 所示。由于输入噪声(或干扰)的随机性,信号检测问题要用数理统计的方法来解决。



图 2.2 信号检测模型

在讨论检测方法之前,必须先根据所选的准则确定门限。设定的门限决定于必须由接收机使用者指定的虚警概率。因此,我们先介绍接收机的虚警时间和虚警概率的概念。

检测过程可用门限检测来描述。几乎所有的雷达或通信检测的判断都是以接收机的输出与某个门限电平的比较为基础的。如果接收机输出的包络超过了某一预置门限,就认为出现了目标。设置门限的目的是将输出划分为非检测区和检测区。换言之,门限检测允许在两个假设中选择一个。假设 H_0 是接收机只有噪声的输入, H_1 是信号加噪声的输入。两个区域的分界线取决于虚警概率,而虚警概率与噪声电平及检测门限直接有关。这种情况示于图 2.3 中,其中实线表示噪声的包络,而门限电平和噪声均方根值则用水平虚线表示。注意,噪声电压有时偶尔会超过门限,这时就产生一次虚警。

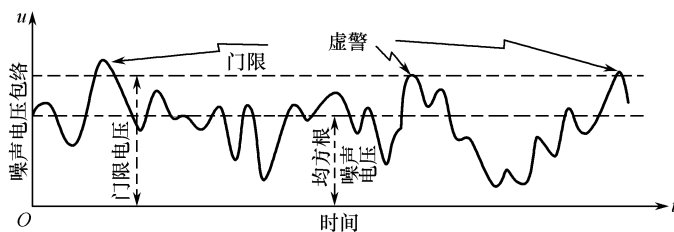


图 2.3 作为时间函数的噪声电压包络(并示出门限和虚警)

在接收机中,经常用到虚警时间。虚警时间是在没有信号时接收机产生一次虚警所需的平均时间间隔。例如虚警时间 T_{fa} 为 100s,就意味着平均意义上接收机每 100s 产生一次虚警。如果 ADC 采样速率是 f_s , 对一个样本的虚警概率是 P_{fa} , 那么虚警时间 T_{fa} 可以写成

$$T_{fa} = \frac{1}{P_{fa} f_s} \text{ 或 } P_{fa} = \frac{1}{T_{fa} f_s} \quad (2-1)$$

上式中,假设 ADC 的每一个样本都与门限做比较,任何输出超过门限,就看成一次虚警。如果采样频率 $f_s = 100\text{MHz}$, 要每 100s 产生一次虚警,则由式 (2-1) 得到虚警概率 $P_{fa} = 1 \times 10^{-10}$ 。

Marcum 定义虚警时间为不发生虚警的概率为 P_0 的平均时间作为标准, P_0 取 0.5 (并非所有作者都采用这一定义)。 P_{fa} 为检测时噪声单独超越门限而出现虚警的概率。于是

$$P_0 = (1 - P_{fa})^{n'} = 0.5 \quad (2-2)$$

式中, P_0 为虚警时间内无虚警的概率, n' 为虚警时间内独立的检测样本数。

对于脉冲雷达而言(一个多普勒信道),则有

$$n' = \frac{n_\tau}{mn}$$

式中, n_τ 为虚警时间 T_{fa} 内参与检测的脉冲宽度 τ 的数目, m 为相干积累的脉冲数(≥ 1), n 为非相干积累的脉冲数(≥ 1)。当雷达进行全程检测且不考虑休止期时, $n = T_{fa}/\tau$, 此时有

$$n' = \frac{T_{fa}}{\tau mn} \quad (2-3)$$

无回波时的虚警概率由式(2-2)给出。在 $n' \gg 1$ 时, 一个非常接近的近似式为

$$P_{fa} \approx \frac{1}{n'} \ln \frac{1}{P_0} \quad (2-4a)$$

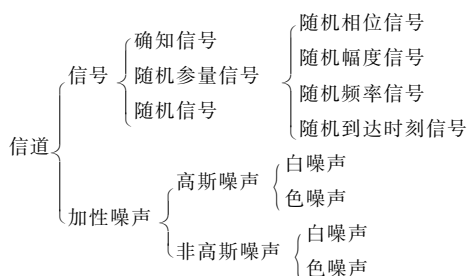
当 $P_0 = 0.5$ 时, 虚警概率值为

$$P_{fa} \approx \frac{0.69}{n'} \approx \frac{0.69\tau mn}{T_{fa}} \quad (2-4b)$$

式(2-4b)给出了虚警概率与虚警时间的关系。

一旦确定了允许的虚警概率, 就可设定输出中的门限。在判决过程中, 可能会出现两种错误。错误之一是在仅有噪声时, 错把噪声当成了信号。这往往发生在噪声足够大以至超过了门限电平的时候。根据统计检测理论, 这类错误称为虚警。另一类错误是错把信号当成了噪声, 称为漏检。以上两种错误以一定的概率出现, 分别称为虚警概率和漏检概率。显然, 门限值愈高, 噪声单独超出门限的平均时间间隔愈长。这一时间间隔很值得注意, 因为如果它太短, 那么系统面临的虚警将太频繁。但是, 如果它太长, 系统将要求过高的辐射能量才能达到合适的目标检测概率。

在讨论信号检测时, 将涉及信号和加性噪声构成的信道模型。信号按其确知的程度, 可分为确知信号、随机参量信号和随机信号。加性噪声按其统计特性, 可分为高斯噪声和非高斯噪声。这两种噪声按其功率谱密度分布又可分为白噪声和色噪声。上述信道模型可表示如下:



应当指出, 下面对各种信号检测问题的研究包括两个方面: 第一, 寻找在最佳准则下检测各种类型信号的数学模型, 进而确定信号检测系统的结构; 第二, 分析信号检测系统性能。

研究最佳检测系统的意义在于, 通过将现有的实际系统与理论上的最佳检测系统的性能进行比较, 可以评价实际系统的完善程度, 了解提高系统性能的潜力, 以及找出改善系统性能的途径。

2.2 高斯白噪声下确知信号的检测

所谓确知信号, 是指一个其波形和全部参量都是已知的信号。例如正弦信号, 它的幅度、频率和相位等都是确知的。与这样的信号相联系的假设必然是简单的, 得到的是参量检测系统。

高斯白噪声下检测确知信号的模型虽然是较为简单的理想情况,但是相当多的实际系统接近这种理想情况,而且这种理想系统的性能还可以作为其他非理想系统的比较标准。

所谓白噪声,就是其功率谱密度在所有频率上都为常数($N_0/2$),相应的自相关函数为 $(N_0/2) \cdot \delta(\tau)$ 的噪声。显然白噪声的功率是无限的,是一种假想的噪声模型。但在工程上,只要对于所关心的信号频带而言,噪声功率谱在一个足够宽的频带上是“平坦”的,白噪声的假定便认为是合理的。如果白噪声的幅度分布为高斯分布,则称为高斯白噪声。

2.2.1 二元通信系统

首先研究二元通信系统。此时,在时间间隔 $(0, T)$ 内,发射机送出两个信号 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 中的一个,这两个信号都是确知的。由于受到信道加性噪声 $n(t)$ 的干扰,在接收机处,在时间间隔 $(0, T)$ 内观察到的是信号与噪声的混合波形 $x(t)$ 。假定 $n(t)$ 是均值为零、谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声,我们的目的是设计一种最佳检测系统来对 $x(t)$ 进行处理,以便在下述两个假设中选择一个:

$$\left. \begin{aligned} H_0 : x(t) &= s_0(t) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T) \\ H_1 : x(t) &= s_1(t) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T) \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

式中,观测信号 $x(t)$ 中的信号分量 $s(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ 的能量为

$$E_s = \int_0^T s^2(t) dt \quad (2-6a)$$

观测信号 $x(t)$ 中的噪声分量 $n(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ 的能量为

$$E_n = \int_0^T n^2(t) dt \quad (2-6b)$$

为了叙述方便,我们将信号检测理论分在两部分讨论。本章集中讨论经典的高斯白噪声背景下的信号检测;下面几章讨论工程实际中经常遇到的非经典情况,这主要包括高斯色噪声背景下和噪声分布未知情况下的信号检测,以及接收波形采样数可变时的信号检测。

从讨论高斯白噪声背景下的信号检测问题入手,似乎是所有有关检测书籍的惯例。这不仅因为这一领域研究得最为透彻,所得出的结论最为直观,而且还因为这种情况下所得的结果,对更广泛条件下问题的研究,具有直接的启发。本章研究的顺序是,先讨论高斯白噪声下确知信号的检测,然后讨论随机参量信号和多脉冲信号的检测。

由第1章可知,最佳检测可根据不同的准则进行。但不管采用哪一种准则,最佳判决规则都是将似然比与某一门限进行比较,不同的准则仅仅体现在门限值不同。所以我们先不考虑指定哪一个具体准则,而是从一般的似然比准则着手研究最佳接收机。图2.4示出最佳接收机框图。

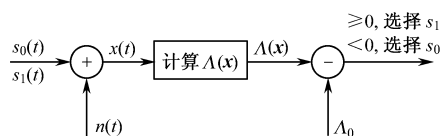


图 2.4 最佳接收机示意框图

2.2.2 在白色高斯信道中的一次观测结果^[4]

前面已提到,背景噪声的分布为零均值,方差为 σ_n^2 的高斯分布,观测样值 s_i 已知条件下 x 的条件概率密度函数 $p(x/s_i)$ 可写为

$$p(x/s_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(x-s_i)^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (2-7a)$$

根据式(2-7a)就可以确定二元通信系统信道输出波形观测样值的似然函数分别为

$$p(\mathbf{x}/s_1) = p(\mathbf{x}/H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(x-s_1)^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (2-7b)$$

$$p(\mathbf{x}/s_0) = p(\mathbf{x}/H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(x-s_0)^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (2-7c)$$

式中, s_1 是对应于假设 H_1 的确知信号观测样值, s_0 则是对应于假设 H_0 的确知信号观测样值。

由此可以求出在高斯信道下的似然比为

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{x}) &= \frac{p(\mathbf{x}/H_1)}{p(\mathbf{x}/H_0)} = \exp\left[\frac{2x(s_1-s_0)-(s_1^2-s_0^2)}{2\sigma_n^2}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{(s_1^2-s_0^2)}{2\sigma_n^2}\right] \exp\left[\frac{x(s_1-s_0)}{\sigma_n^2}\right] \end{aligned} \quad (2-8)$$

可见,它是随机变量 \mathbf{x} 的单调函数, $\Lambda(\mathbf{x})$ 也是一维随机变量。

确定了似然比后就可以根据不同的准则来进行假设检验,首先是根据门限似然比来确定门限电平。例如采用贝叶斯准则的门限似然比为

$$\Lambda(x_B) = \frac{P(H_0)}{1-P(H_0)} \left(\frac{c_{10}-c_{00}}{c_{01}-c_{11}} \right) \quad (2-9)$$

将式(2-9)代入式(2-8)后可以求出 x_B , 此时

$$\frac{P(H_0)}{1-P(H_0)} \left(\frac{c_{10}-c_{00}}{c_{01}-c_{11}} \right) = \exp\left[-\frac{(s_1^2-s_0^2)}{2\sigma_n^2}\right] \exp\left[\frac{x_B(s_1-s_0)}{\sigma_n^2}\right]$$

稍加整理后,可得

$$x_B = \frac{\sigma_n^2}{s_1-s_0} \ln\left[\frac{P(H_0)(c_{10}-c_{00})}{(1-P(H_0))(c_{01}-c_{11})}\right] + \frac{s_1+s_0}{2} \quad (2-10)$$

知道了门限电平 x_B 后,贝叶斯判决不等式就可以写成

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} x_B \quad (2-11)$$

当代价函数给定为 $c_{00}=c_{11}=0$ 和 $c_{10}=c_{01}=1$, 并且先验概率 $P(H_0)=P(H_1)=1/2$ 的情况下,式(2-10)可以简化成

$$x_B = \frac{s_1+s_0}{2} \quad (2-12)$$

这就是在二元数字通信系统中经常遇到的贝叶斯门限值,它是信号 s_1 和 s_0 的平均值。当接收到的观测值 x 大于这个平均值时接收机就判决它为假设 H_1 ,即存在信号 s_1 ;否则就判决为假设 H_0 ,即存在信号 s_0 。

雷达系统常采用检测概率最大(NP)准则,例如在高斯信道内 $s_1=1, s_0=0, \sigma_n=\sqrt{2}$, 并且给定容许的虚警概率为 $P_{fa}=0.1$ 。则此时似然函数分别为

$$p(\mathbf{x}|H_1) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{4}\right] \quad (2-13)$$

和

$$p(\mathbf{x}|H_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] \quad (2-14)$$

因此,由给定的 P_{fa} 值可以求出 NP 准则的门限电平 x_{NP} , 它满足条件

$$\int_{x_{NP}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] dx = 0.1$$

于是可以解出 $x_{NP}=1.8$ 。当 $x>1.8$ 时判决为假设 H_1 , 反之为假设 H_0 。同时可以确定相应的检测概率为

$$P_d = \int_{1.8}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{4}\right] dx = 0.285$$

如果使用同样的信道, 并假定出现 0 信号和 1 信号的先验概率是相同的, 当二元数字通信系统采用错误概率最小准则时, 则其判决门限为 $x_B=1/2$ [见式(2-10)], 因此, 它比上述门限 x_{NP} 值小。此时可求出虚警概率为

$$P(D_1|H_0) = \int_{0.5}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] dx = 0.362$$

而漏报概率为

$$P(D_0|H_1) = \int_{-\infty}^{0.5} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{4}\right] dx = 0.362$$

相应的检测概率为

$$P(D_1|H_1) = 1 - P(D_0|H_1) = 0.638$$

总的平均错误概率为

$$P_e = \frac{1}{2}(0.362 + 0.362) = 0.362$$

通过上述两种情况的比较可见, 当判决门限降低时虚警概率随之增加, 同时检测概率也增加, 其意义是很明确的。

2.2.3 在白噪声信道中多次观测结果^[4]

在实际检测中, 仅用一次采样是不能取得良好性能的, 一般都是在时间间隔 $(0, T)$ 内取 n 个样本。当 n 趋于无穷时, 便成为连续采样情况, 其判决规则也就变为用连续函数来表示。这样, 便可以充分利用连续输入波形 $\mathbf{x}(t)$ 所提供的信息。

在 $t=t_k (0 \leq t_k \leq T)$ 时, $\mathbf{x}(t), \mathbf{s}_i(t) (i=0, 1)$ 和 $\mathbf{n}(t)$ 的采样值记为 x_k, s_{ik} 和 n_k 。由式(2-5)显然有

$$x_k = s_{ik} + n_k \quad (1 \leq k \leq n) \quad (2-15)$$

定义噪声矢量 \mathbf{n} , 信号矢量 $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1$ 和观测矢量 \mathbf{x} 如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} &= [n_1, n_2, \dots, n_n]^T \\ \mathbf{s}_0 &= [s_{01}, s_{02}, \dots, s_{0n}]^T \\ \mathbf{s}_1 &= [s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n}]^T \\ \mathbf{x} &= [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

由于噪声采样值 n_k 是均值为零, 方差为 σ_n^2 的高斯随机变量, x_k 的条件均值为

$$E\{x_k|H_i\} = E\{(s_{ik} + n_k) | H_i\} = E\{s_{ik}|H_i\} = s_{ik}$$

x_k 的条件方差为

$$\text{Var}\{x_k|H_i\} = E\{(x_k - E\{x_k\})^2|H_i\} = E\{n_k^2|H_i\} = \text{Var}\{n_k\} = \sigma_n^2 \quad (2-17)$$

于是, x_k 的条件概率密度可写为

$$p(x_k|H_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(x_k - s_{ik})^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (2-18)$$

为求出 n 点采样的联合概率密度, 先假定噪声过程为带限白噪声, 其功率谱密度 $N(\omega)$ 为

$$N(\omega) = \begin{cases} N_0/2 & |\omega| < \Omega \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2-19)$$

则其自相关函数为

$$R_n(\tau) = E[n(t)n(t+\tau)] = \frac{N_0\Omega}{2\pi} \cdot \frac{\sin\Omega\tau}{\Omega\tau} \quad (2-20)$$

由于假定噪声的均值为零,则噪声的方差为

$$\sigma_n^2 = R_n(0) = \frac{N_0\Omega}{2\pi} \quad (2-21)$$

如果以 $\Delta t = \pi/\Omega$ 为间隔进行采样,则得到各采样值是互不相关的,由于已假定噪声为高斯分布,因而它们是统计独立的。此时,在观测时间间隔 $(0, T)$ 内统计独立采样值的数目为

$$n = T/\Delta t = T\Omega/\pi \quad (2-22)$$

在多次观测的样值中假定信号的参数是不变的,同时噪声样值保持统计独立。这个条件在白色高斯信道中是能够实现的,因为白噪声通过带通信道后的自相关函数出现许多等间隔的零点,只要在这些时间位置上采样,就可以得到 n 个相互统计独立的噪声随机变量。采样间隔等于 $1/(2B)$,因此在观测时间 T 内就可以得到 $n=2BT$ 个观测样值,这里 B 是信道带宽。

现在先以两次观测结果为例来说明这个问题。假定第一次观测时刻是 t_1 ,得到的信号样值是 s ,噪声样值是 n_1 ,因此混合样值为 $x_1 = s + n_1$ 。第二次观测时刻是 t_2 ,得到的信号样值 s 不变,但噪声样值是 n_2 ,因此混合样值为 $x_2 = s + n_2$ 。

由此可以得到两次观测的联合似然函数,在噪声样值相互统计独立的条件下,它等于每次观测得到的似然函数乘积,即

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}|H_0) &= p(x_1|H_0)p(x_2|H_0) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\right)^2 \exp\left[-\frac{(x_1-s_0)^2}{2\sigma_n^2}\right] \exp\left[-\frac{(x_2-s_0)^2}{2\sigma_n^2}\right] \end{aligned} \quad (2-23a)$$

$$\begin{aligned} \text{和} \quad p(\mathbf{x}|H_1) &= p(x_1|H_1)p(x_2|H_1) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\right)^2 \exp\left[-\frac{(x_1-s_1)^2}{2\sigma_n^2}\right] \exp\left[-\frac{(x_2-s_1)^2}{2\sigma_n^2}\right] \end{aligned} \quad (2-23b)$$

因此,两次观测的似然比为

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{x}) &= \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} \\ &= \exp\left[-\frac{(x_1-s_1)^2}{2\sigma_n^2} - \frac{(x_2-s_1)^2}{2\sigma_n^2} + \frac{(x_1-s_0)^2}{2\sigma_n^2} + \frac{(x_2-s_0)^2}{2\sigma_n^2}\right] \\ &= \exp\left[\frac{(s_1-s_0)}{\sigma_n^2}(x_1+x_2) - \frac{(s_1^2-s_0^2)}{\sigma_n^2}\right] \end{aligned} \quad (2-24)$$

假定门限似然比是 Λ_0 ,则由式(2-24)可以确定两次观测时的判决门限,即

$$\exp\left[\frac{(s_1-s_0)}{\sigma_n^2}(x_1+x_2) - \frac{(s_1^2-s_0^2)}{\sigma_n^2}\right] = \Lambda_0 \quad (2-25a)$$

$$\text{或者} \quad x_1 + x_2 = (s_1 + s_0) + \frac{\sigma_n^2}{s_1 - s_0} \ln \Lambda_0 = x_0 \quad (2-25b)$$

式中, $x_0 = (s_1 + s_0) + \frac{\sigma_n^2}{s_1 - s_0} \ln \Lambda_0$ 是个常数。

将式(2-25)画在 $x_1 \sim x_2$ 平面上是一根具有负斜率的直线,它与 x_1 轴和 x_2 轴的交点均为 x_0 ,如图 2.5 所示。

图 2.5 所示的直线就是两次观测时的判决界限,它将判决空间划分为两个判决区,即 Z_1 和 Z_0 。当 \mathbf{x} 落在 Z_1 区时判决输出为 D_1 ,即信号 s_1 存在;否则当 \mathbf{x} 落在 Z_0 区时判决输出为 D_0 ,即信号 s_0 存在。因此,图 2.5 可以说是图 1.7 的推广,后者仅是一次观测,此时判决界限缩减为 x 轴上的一个判决门限 x_0 。另外,这里的 \mathbf{x} 代表样值总体,不同于一次观测时只有一个样值 x 。

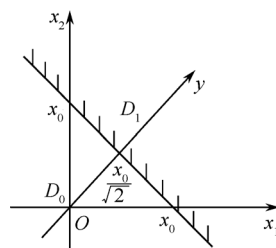


图 2.5 两次观测时的判决界限

现在可以证明,采用两次观测的检验方法可以使平均风险进一步减小。例如,给定信号 $s_1=1, s_0=0$,噪声方差 $\sigma_n^2=1$,并且信源的先验概率 $P(H_0)=P(H_1)=1/2$,代价函数 $c_{00}=c_{11}=0$ 和 $c_{10}=c_{01}=1$ 。如果按照一次观测时的似然比公式(2-8)可得

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \exp(-1/2)\exp(\mathbf{x}) \quad (2-26)$$

现在采用贝叶斯准则,因此可按式(2-10)求出门限电平为 $1/2$ 。此时虚警概率为

$$P(D_1|H_0) = \int_{0.5}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{2}\right) d\mathbf{x} = 0.31$$

漏报概率为

$$P(D_0|H_1) = \int_{-\infty}^{0.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x}-1)^2}{2}\right] d\mathbf{x} = 0.31$$

因此平均风险为

$$\bar{R}_B = P_e = \frac{1}{2}[P(D_1|H_0) + P(D_0|H_1)] = 0.31$$

如果采用两次观测,则按式(2-24)可得似然比为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \exp(-1)\exp(x_1 + x_2) \quad (2-27)$$

由于此时贝叶斯门限似然 $\Lambda_B=1$,将它代替式(2-23b)中的 Λ_0 后可得判决界限 $x_0=1$ 。因此,按照虚警概率的定义可得

$$\begin{aligned} P(D_1|H_0) &= \int_{z_1} p(\mathbf{x}|H_0) d\mathbf{x} \\ &= \int_{x_2=-\infty}^{+\infty} \int_{x_1=x_0-x_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2-28)$$

利用坐标旋转的方法,令 $x_1 = y\cos(\pi/4) = y/\sqrt{2}$ 和 $x_2 = y\sin(\pi/4) = y/\sqrt{2}$,得 $x_1^2 + x_2^2 = y^2$,并且判界限与新坐标轴 y 的交点为 $x_1 + x_2 = \sqrt{2}y_0 = x_0 = 1$,即 $y_0 = x_0/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$,如图 2.5 所示。因此在新的坐标系内式(2-28)可以写成

$$P(D_1|H_0) = \int_{x_0/\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0.71}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = 0.24$$

同理,可得漏报概率为

$$\begin{aligned} P(D_0|H_1) &= \int_{D_0} p(\mathbf{x}|H_1) d\mathbf{x} \\ &= \int_{x_2=-\infty}^{+\infty} \int_{x_1=x_0-x_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x_1-1)^2}{2}\right] \exp\left[-\frac{(x_2-1)^2}{2}\right] dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2-29)$$

经过坐标旋转后可得

$$P(D_0|H_1) = \int_{-\infty}^{x_0/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-\sqrt{2})^2}{2}\right] dy$$

$$= \int_{-\infty}^{-0.71} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = 0.24$$

因此,此时的平均风险为

$$\bar{R}_B = P_e = \frac{1}{2} [P(D_1|H_0) + P(D_0|H_1)] = 0.24$$

它比一次观测时所得的平均风险小。

为了比较一次和两次观测时的判决门限,可以画出图 2.6,其中 y 是转换后的新坐标轴。

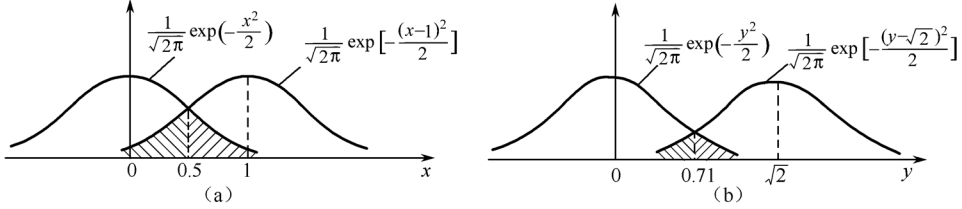


图 2.6 一次和两次观测的门限比较

由图 2.6 可见,两次观测时的门限电平提高了,因此虚警概率减小。同时,存在信号 s_1 时的似然函数向右偏转,因而漏报概率也减小,使得总的错误概率减小。

根据两次观测的结论,可以推广到 n 次观测的情况。 n 越大,所得的平均风险就可能越小。当 $n \rightarrow \infty$ 时就是观测整个信号波形。

在 n 次观测的情况下就有 n 个观测样值存在,它们的联合似然函数应该用 n 维条件概率密度来描述。但是在白噪声高斯信道内由于 n 个随机变量是相互统计独立的,因此可用 n 个一维条件概率密度的乘积来代替,即

$$p(\mathbf{x}|H_0) = \prod_{k=1}^n p(x_k|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^n \exp\left[-\frac{(x_k - s_{0k})^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (2-30a)$$

$$p(\mathbf{x}|H_1) = \prod_{k=1}^n p(x_k|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^n \exp\left[-\frac{(x_k - s_{1k})^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (2-30b)$$

这里 \mathbf{x} 代表 n 个观测样值的集合 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 。

由此可得在 $t=t_k$ 时似然比为

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{x}) &= \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} = \prod_{k=1}^n \exp\left[-\frac{(x_k - s_{1k})^2}{2\sigma_n^2}\right] \exp\left[\frac{(x_k - s_{0k})^2}{2\sigma_n^2}\right] \\ &= \exp\left\{\sum_{k=1}^n \left[-\frac{(x_k - s_{1k})^2}{2\sigma_n^2} + \frac{(x_k - s_{0k})^2}{2\sigma_n^2}\right]\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{(s_{11} - s_{01})}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k - n \frac{(s_{11}^2 - s_{01}^2)}{2\sigma_n^2}\right\} \end{aligned} \quad (2-31)$$

于是判决规则为

$$\Lambda(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0 \quad (2-32)$$

式中,门限似然比 Λ_0 取决于所选用的最佳准则。

若给定门限似然比为 Λ_0 后,则可得在 n 次观测时的判决界限为

$$\exp\left\{\frac{(s_{11} - s_{01})}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k - n \frac{(s_{11}^2 - s_{01}^2)}{2\sigma_n^2}\right\} = \Lambda_0 \quad (2-33a)$$

或者

$$\sum_{k=1}^n x_k = \frac{\sigma_n^2}{s_{1k} - s_{0k}} \ln \Lambda_0 + n \frac{(s_{1k} + s_{0k})}{2} \quad (2-33b)$$

实际上,式(2-25)是它在 $n=2$ 时的特殊情况。

在一般情况下, n 维空间内的判决界限可能是一个曲面,式(2-33)仅是在高斯信道内检测确知信号的一个特例。

此外,我们对式(2-30a)和式(2-30b)用 $\sigma_2 = 2\Delta t/N_0$ 做代换,于是似然函数变为

$$p(\mathbf{x}|H_0) = \left(\frac{\Delta t}{\pi N_0}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - s_{0k})^2 \Delta t}{N_0}\right) \quad (2-34a)$$

$$p(\mathbf{x}|H_1) = \left(\frac{\Delta t}{\pi N_0}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - s_{1k})^2 \Delta t}{N_0}\right) \quad (2-34b)$$

令采样间隔 $\Delta t \rightarrow 0$, 维数 $n \rightarrow \infty$, 而 $\Delta t = T$, 极限情况下, 便得到时域连续接收波形 $x(t)$ 的似然函数

$$p(\mathbf{x}|H_0) = F \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s_0(t)]^2 dt\right\} \quad (2-35a)$$

$$p(\mathbf{x}|H_1) = F \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s_1(t)]^2 dt\right\} \quad (2-35b)$$

式中, F 为一常数。式(2-35a)和式(2-35b)十分重要, 在下面讨论各种信号的检测及参量估计问题时将常用到。

为了要评估在 n 次观测时的检测质量, 我们可以用

$$y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (2-36)$$

作为统计检验量, 显然它也是一个随机变量。

因为 x_k 是高斯变量, 故 y 也是高斯变量。它的均值为

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{x}_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\bar{n}_k + s) = s \quad (2-37)$$

这里 s 是在 x_k 内包含的信号成分, 它在每次观测时刻均保持不变, n_k 则是均值为零的噪声样值。

y 的方差决定于

$$\sigma_y^2 = \overline{(y - \bar{y})^2} = \overline{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - s\right)^2} = \overline{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n n_k\right)^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \overline{n_k^2} = \frac{\sigma_n^2}{n} \quad (2-38)$$

这里, $\sigma_n^2 = \overline{n_k^2}$ 是噪声方差。

因此 y 的概率密度可以写成

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left[-\frac{(y - \bar{y})^2}{2\sigma_y^2}\right] = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{n(y - s)^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (2-39)$$

在假设 H_0 时的条件概率密度为

$$p(y | H_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{n(y - s_0)^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (2-40)$$

同样, 在假设 H_1 时的条件概率密度为

$$p(y | H_1) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{n(y - s_1)^2}{2\sigma_n^2}\right] \quad (2-41)$$

现在可以确定检测时的错误概率。判决门限决定于式(2-35),或者

$$y_0 = \frac{1}{n} \left[\frac{\sigma_n^2}{s_1 - s_0} \ln \Lambda_0 + n \frac{(s_1 + s_0)}{2} \right] = \frac{\sigma_n^2}{n(s_1 - s_0)} \ln \Lambda_0 + \frac{s_1 + s_0}{2} \quad (2-42)$$

因此虚警概率为

$$P(D_1 | H_0) = \int_{y_0}^{+\infty} p(y | H_0) dy = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \int_{y_0}^{+\infty} \exp \left[-\frac{n(y - s_0)^2}{2\sigma_n^2} \right] dy \quad (2-43)$$

用 $z = \frac{\sqrt{n}(y - s_0)}{\sigma_n}$ 代替后得

$$P(D_1 | H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{+\infty} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) dz \quad (2-44)$$

式中

$$z_0 = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_n} (y_0 - s_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_n} \left[\frac{s_1 - s_0}{2} + \frac{\sigma_n^2}{n(s_1 - s_0)} \ln \Lambda_0 \right] \quad (2-45)$$

因此式(2-44)又可写成

$$P(D_1 | H_0) = \text{erfc}(z_0) \quad (2-46)$$

式中

$$\text{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt \quad (2-47)$$

用同样的方法,可以求出漏报概率为

$$P(D_0 | H_1) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \int_{-\infty}^{y_0} \exp \left[-\frac{n(y - s_1)^2}{2\sigma_n^2} \right] dy = 1 - \text{erfc}(z_1) \quad (2-48)$$

式中

$$z_1 = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_n} \left[\frac{s_0 - s_1}{2} + \frac{\sigma_n^2}{n(s_1 - s_0)} \ln \Lambda_0 \right] \quad (2-49)$$

显然在 $n=2, s_0=0, s_1=1, \sigma_n^2=1$ 和 $\Lambda_0=1$ 的例子中,可得 $z_0=1/\sqrt{2}$ 和 $z_1=-1/\sqrt{2}$,并用式(2-46)和式(2-48)所求出的错误概率与前面的结果相同,可见式(2-40)和式(2-41)包括了 $n=2$ 的情况。

为了得到连续观测下的判决规则,可在观测时间 T 保持不变的情况下使采样数趋于无穷,即令 Δt 趋于零,此时限带频率 $\Omega = \pi/\Delta t$ 趋于无限大,噪声的方差 $N_0/(2\Delta t)$ 也相应增大,因而带限白噪声变为理想白噪声情况。并在 $\Delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, n\Delta t \rightarrow T$ 的情况下判决规则可写为如下连续函数形式[参见式(2-33)~式(2-35)]

$$\int_0^T x(t)s_1(t)dt - \int_0^T x(t)s_0(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{N_0}{2} \ln \Lambda_0 + \frac{1}{2} \int_0^T [s_1^2(t) - s_0^2(t)]dt \triangleq \gamma \quad (2-50)$$

式中, γ 为判决门限值,并可简化为

$$\gamma = \frac{N_0}{2} \ln \Lambda_0 + \frac{1}{2} \int_0^T [s_1^2(t) - s_0^2(t)]dt = \frac{1}{2} N_0 \ln \Lambda_0 + \frac{1}{2} (E_1 - E_0) \quad (2-51)$$

式中, E_1 和 E_0 分别表示信号 $s_1(t)$ 和 $s_0(t)$ 的能量,即

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t)dt \quad (i=0,1) \quad (2-52)$$

式(2-50)的判决规则可用图 2.7 所示的相关接收机实现,它计算接收波形 $x(t)$ 与信号 $s_1(t)$ 和 $s_0(t)$ 的互相关,相减后再与门限 γ 比较,做出判决。图 2.7 的系统可等效地用图 2.8 实现。这就是高斯白噪声下二元确知信号的最佳检测系统或最佳接收机,也就是人们熟知的

相关接收机。

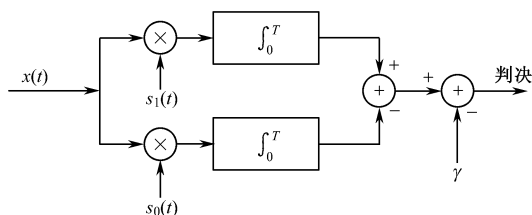


图 2.7 二元确知信号的最佳检测系统

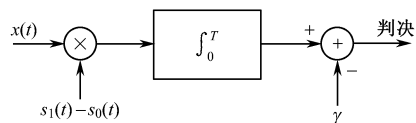


图 2.8 图 2.7 的等效实现

2.2.4 最佳系统的检测性能

所谓系统的检测性能,通常是指在假定的信号与噪声的条件下,系统的平均风险或某种判决概率与输入信噪比之间的关系。对于二元通信系统,通常是指系统的平均错误概率与输入信噪比之间的关系。

为了计算用于通信的相关接收机的性能,假定两类假设的先验概率相等,即发 0 和发 1 的概率相等,各为 $\frac{1}{2}$ [即 $P(H_0) = P(H_1) = 1/2$]; 还假定正确判决不付出代价,错误判决付出相等的代价,即 $c_{11} = c_{00} = 0; c_{01} = c_{10} = 1$ 。这样,就可利用贝叶斯准则的特定形式——最小错误概率准则。在这种情况下,似然比门限值 Λ_0 为 $P(H_0) | P(H_1) = 1, \ln \Lambda_0 = 0$ 。根据这些条件,由式(2-51)可算出 $\gamma = [E_1 - E_0]/2$ 。

如果我们令不等式(2-50)左边为检验统计量 I

$$I = \int_0^T x(t) s_1(t) dt - \int_0^T x(t) s_0(t) dt \quad (2-53)$$

则判决规则变为

$$I \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma \quad (2-54)$$

两种错误概率分别为

$$\left. \begin{aligned} P(D_1 | H_0) &= \int_{\gamma}^{+\infty} p(I | H_0) dI \\ P(D_0 | H_1) &= \int_{-\infty}^{\gamma} p(I | H_1) dI \end{aligned} \right\} \quad (2-55)$$

平均错误概率 \bar{P}_e 则等于

$$\begin{aligned} \bar{P}_e &= P(H_0)P(D_1 | H_0) + P(H_1)P(D_0 | H_1) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{+\infty} p(I | H_0) dI + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\gamma} p(I | H_1) dI \end{aligned} \quad (2-56)$$

由式(2-53)可见, I 是 $x(t)$ 进行线性运算的结果,故 I 是高斯变量。只要求出 I 的均值和方差,便可求出 I 的概率密度函数,从而可按式(2-56)得到平均错误概率。在假设 H_0 下, $x(t) = s_0(t) + n(t)$ 。于是 I 的条件均值为

$$\begin{aligned} E\{I | H_0\} &= E\left\{ \int_0^T [s_0(t) + n(t)] s_1(t) dt - \int_0^T [s_0(t) + n(t)] s_0(t) dt \right\} \\ &= E\left[\int_0^T s_0(t) s_1(t) dt \right] + \int_0^T E[n(t)] s_1(t) dt - E\left[\int_0^T s_0^2(t) dt \right] - \int_0^T E[n(t)] s_0(t) dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt - \int_0^T s_0^2(t) dt \quad (2-57)$$

推导上式时,假定了 $n(t)$ 的均值为零。令

$$R(T) = \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt \quad (2-58)$$

它表示两个信号的时间互相关。将式(2-58)代入式(2-57),可得

$$E\{I|H_0\} = R(T) - E_0 \quad (2-59)$$

下面再求检验统计量 I 的条件方差 $\text{Var}\{I|H_0\}$ 。在 $s_i(t)=s_0(t)$ 的条件下,有

$$\text{Var}\{I|H_0\} = E\{[I - E\{I|H_0\}]^2|H_0\} \quad (2-60)$$

而

$$I - E\{I|H_0\} = \int_0^T n(t)[s_1(t) - s_0(t)]dt \quad (2-61)$$

将式(2-61)代入式(2-60),得

$$\text{Var}\{I|H_0\} = \int_0^T \int_0^T E\{n(t)n(\tau)\}[s_1(t) - s_0(t)] \cdot [s_1(\tau) - s_0(\tau)]dtd\tau \quad (2-62)$$

因为

$$E\{n(t)n(\tau)\} = \frac{N_0}{2}\delta(t - \tau)$$

则

$$\text{Var}\{I|H_0\} = \frac{N_0}{2} \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt = \frac{N_0}{2} [E_1 + E_0 - 2R(T)] \quad (2-63)$$

同理,可求得假设 H_1 下 I 的条件均值为

$$E\{I|H_1\} = E_1 - R(T)$$

假设 H_1 下 I 的条件方差与假设 H_0 下相同

$$\text{Var}\{I|H_1\} = \text{Var}\{I|H_0\} = \frac{N_0}{2} [E_1 + E_0 - 2R(T)] \triangleq \sigma_I^2$$

定义两信号的平均能量为

$$E = (E_1 + E_0)/2 \quad (2-64)$$

两信号的时间相关系数为

$$r = \frac{R(T)}{E} = \frac{1}{E} \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt \quad (2-65)$$

则方差可写为

$$\sigma_I^2 = N_0 E (1 - r) \quad (2-66)$$

易证 $|r| \leq 1$, 这就保证了方差的非负性质。于是两种假设下统计量 I 的条件概率密度为

$$p(I|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I} \exp\left\{-\frac{[I - (R(T) - E_0)]^2}{2\sigma_I^2}\right\} \quad (2-67)$$

$$p(I|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I} \exp\left\{-\frac{[I - (E_1 - R(T))]^2}{2\sigma_I^2}\right\} \quad (2-68)$$

由式(2-67),第一类错误概率为

$$P(D_1|H_0) = \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I} \exp\left\{-\frac{[I - (R(T) - E_0)]^2}{2\sigma_I^2}\right\} dI$$

令 $u = [I - (R(T) - E_0)]/\sigma_I$, 上式变为

$$P(D_1|H_0) = \int_{u_T}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-u^2/2] du = 1 - \Phi[u_T] = \text{erfc}[u_T] \quad (2-69)$$

$$\text{式中} \quad u_T = \frac{\frac{N_0}{2} \ln \Lambda_0 + E(1-r)}{\sqrt{N_0 E(1-r)}} \quad (2-70)$$

u_T 是用变量 u 进行判决时对应的门限值。同理,由式(2-68)可得第二类错误概率为

$$P(D_0|H_1) = \int_{-\infty}^{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I} \exp\left[-\frac{[I - (E_1 - R(T))]^2}{2G_I^2}\right] dI$$

令 $v = [I - (E_1 - R(T))]/G_I$, 上式变为

$$P(D_0|H_1) = \int_{-\infty}^{v_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-v^2/2] dv = \Phi(v_T) \quad (2-71)$$

式中, v_T 是用变量 v 进行判决时对应的门限值,且

$$v_T = \frac{\frac{N_0}{2} \ln \Lambda_0 - E(1-r)}{\sqrt{N_0 E(1-r)}}$$

由式(2-69)和式(2-71)可见,接收机的性能主要取决于平均能量 E , 噪声功率谱密度 N_0 和信号之间的时间互相关系数 r , 而与所用信号的具体波形无关。在最小错误概率准则和先验概率相等的条件下, $\ln \Lambda_0 = 0$, 则 $u_T = -v_T$ 。这时两类错误概率相等, 平均错误概率 \bar{P}_e 为

$$\bar{P}_e = P(D_1|H_0) = P(D_0|H_1) = \text{erfc}\left[\sqrt{\frac{E(1-r)}{N_0}}\right] \quad (2-72)$$

由此可见, 当输入(功率)信噪比 E/N_0 增加时, 平均错误概率减小。当 E/N_0 给定时, $(1-r)$ 越大, 平均错误概率越小。最佳的信号形式为 $r = -1$, 即 $s_0(t) = -s_1(t)$ 。采用这种信号的系统称为理想二元通信系统。

下面我们计算三种常用的二元数字通信系统的性能。这些系统中的二元信号都是正弦波。由于假定信号是确知的, 因而可认为发射端和接收端信号的相位是同步的。这样的系统称为“相干”系统。对这三种情况, 都将应用最小错误概率准则进行讨论。

1. 相参相移键控系统(CPSK)

在这种系统中, 二元信号是相位相差 180° 的正弦波, 即

$$s_0(t) = A \sin \omega_c t \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$s_1(t) = A \sin(\omega_c t + \pi) = -A \sin \omega_c t \quad (0 \leq t \leq T)$$

此时 $r = -1$, $E_0 = E_1 = E$, 在各种二元信号中它的“平均错误概率 \bar{P}_e ”最小, 是最佳的二元信号。这时, 由式(2-51)可见, 门限值 $\gamma = 0$ 。图 2.7 所示最佳检测系统中两个支路相关器的输出相同而符号相反, 最佳接收机可用图 2.9 所示的相关器加上符号鉴别器构成。当相关器输出正值时判决为 $s_1(t)$, 输出负值时判决为 $s_0(t)$ 。

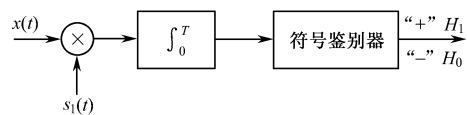


图 2.9 相参相移键控检测系统

该系统的平均错误概率 \bar{P}_e 由式(2-72)给出, 等于

$$\bar{P}_e = \int_{\sqrt{\frac{2E}{N_0}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-u^2/2] du = \text{erfc}\left[\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right] \quad (2-73)$$

该系统的性能曲线, 即 \bar{P}_e 与 E/N_0 的关系曲线可由式(2-73)直接计算, 示于图 2.10 中。

2. 相参频移键控系统(CFSK)

在这种情况下, 二元信号由下式给出

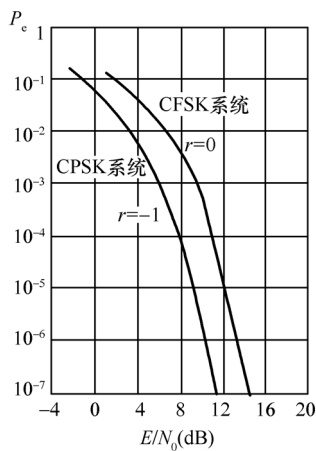


图 2.10 二元通信系统的检测性能

\bar{P}_e 与 E/N_0 的关系曲线也绘于图 2.10 之中。由图可见,其性能较相参相移键控系统差 3dB,这是因为 $(1-r)$ 值相差一倍。也就是说,为了得到同样的检测性能,相参频移键控系统所需信噪比要比相参相移键控系统大一倍。

3. 相参启闭键控系统(COOK)

二元信号由下式给出

$$s_0(t) = 0$$

$$s_1(t) = A \sin \omega_1 t \quad (0 \leq t \leq T)$$

此时 $r=0, E=E_1/2$ 。在这种情况下,最佳检测系统的结构仍如图 2.8 所示,图中 $s_0(t)=0, \beta=E_1/2$ 。

平均错误概率为

$$\bar{P}_e = \int_{\sqrt{\frac{E_1}{2N_0}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-u^2/2] du = \text{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_1}{2N_0}} \right] = \text{erfc} \left[\sqrt{\frac{E}{N_0}} \right] \quad (2-75)$$

因此,当平均信号能量 E 相等时,其性能和相参频移键控系统相同,也比最佳二元系统差 3dB。但若令信号 $s_1(t)$ 的能量 E_1 相等,即假定两种系统发射机峰值功率相同,则启闭键控系统的检测性能还要比相应的相参频移键控系统差 3dB。

2.2.5 相参雷达系统

一般雷达目标回波的形式是比较复杂的,但这里仅讨论理想情况,假定雷达目标回波信号是完全确知的,例如相参雷达的固定目标回波信号。

对于雷达回波信号的检测仍然是个二元假设检验问题,即根据式(2-5)接收波形 $x(t)$ 对下面两个假设做出判决

$$H_0 : x(t) = s_0(t) + n(t) = n(t)$$

$$H_1 : x(t) = s_1(t) + n(t)$$

式中, $n(t)$ 是高斯白噪声, $s_0(t)=0, s_1(t)$ 是确知的目标回波信号,例如 $s_1(t)=A \cos \omega_0(t+\tau)$, 其中 A, ω, τ 均为常数。假设 H_0 代表目标不存在,假设 H_1 代表目标存在,显然这与启闭键控通信系统类似。此时,由式(2-53)检验统计量为

$$I = \int_0^T x(t) s_1(t) dt - \int_0^T x(t) s_0(t) dt = \int_0^T x(t) s_1(t) dt \quad (2-76)$$

对于雷达情况,通常无法事先确定先验概率和代价因子,因而几乎无例外地采用奈曼-皮尔逊准则,即在给定虚警概率 P_{fa} 的条件下,使检测概率 P_d 达到最大。此时最佳检测系统的框图仍如图 2.5 所示,判决门限 γ 则由给定的 P_{fa} 确定。

由式(2-55),虚警概率为

$$P_{fa} = \int_{\gamma}^{+\infty} p(I|H_0) dI \quad (2-77)$$

检测概率为

$$P_d = \int_{\gamma}^{+\infty} p(I|H_1) dI \quad (2-78)$$

对于相干雷达情况,有 $r=0, E_0=0, E=E_1/2$,在假设 H_0 条件下 $x(t)=n(t)$,故此时

$$I = \int_0^T s_1(t)n(t)dt \quad (2-79)$$

它也是高斯变量,其均值 $\bar{I}=0$,而方差 $\sigma_I^2=N_0E_1/2$,因此,根据式(2-67),条件概率密度可写成

$$p(I|H_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_1}} \exp\left[-\frac{I^2}{N_0 E_1}\right] \quad (2-80)$$

用同样的方法,在假设 H_1 条件下的检验统计量 $I = \int_0^T s_1(t)n(t)dt + E_1$,根据式(2-68)得条件概率密度为

$$p(I|H_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_1}} \exp\left[-\frac{(I-E_1)^2}{N_0 E_1}\right] \quad (2-81)$$

再将这些结果代入式(2-77)及式(2-78),可得

$$\begin{aligned} P_{fa} &= \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_1}} \exp\left[-\frac{I^2}{N_0 E_1}\right] dI = \int_{\gamma \sqrt{\frac{2}{N_0 E_1}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-z^2/2] dz \\ &= \text{erfc}\left(\gamma \sqrt{\frac{2}{N_0 E_1}}\right) \end{aligned} \quad (2-82)$$

$$\begin{aligned} P_d &= \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_1}} \exp\left[-\frac{(I-E_1)^2}{N_0 E_1}\right] dI \\ &= \int_{\gamma \sqrt{\frac{2}{N_0 E_1}} - \sqrt{\frac{2E_1}{N_0}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-z^2/2] dz \\ &= \text{erfc}\left(\gamma \sqrt{\frac{2}{N_0 E_1}} - \sqrt{\frac{2E_1}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (2-83)$$

对于给定的虚警概率 P_{fa} ,由式(2-82)可算出 $\beta \sqrt{2/N_0 E_1}$,再将此值及选定的信噪比 $\sqrt{2E_1/N_0}$ 代入式(2-83),即可算出检测概率 P_d ,从而可得到系统的检测性能曲线。由式(2-83)可看出,当 P_{fa} 给定之后,检测概率 P_d 只与信号能量 E_1 及噪声谱密度 N_0 之比有关,而与信号 $s_1(t)$ 的波形无关。这便是检测理论中有名的能量原理。根据式(2-82)和式(2-83)绘成的以 P_{fa} 为参变量的 $P_d \sim \sqrt{2E_1/N_0}$ 曲线,称为相参雷达系统的检测特性,如图 2.11 所示。根据给定的虚警概率 P_{fa} 和输入信噪比 $\sqrt{2E_1/N_0}$,由图 2.11 可以方便地求出检测概率 P_d ,因此检测特性曲线可用于相参雷达系统的设计。

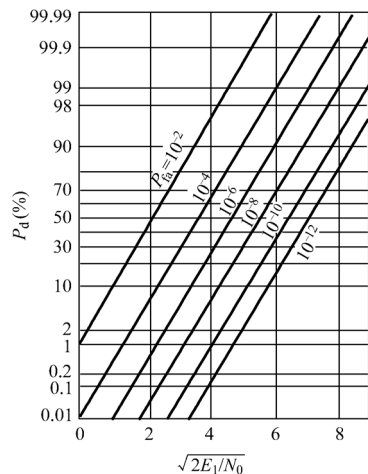


图 2.11 相参雷达系统的检测特性

2.3 匹配滤波器理论

2.3.1 概述

前面所讨论的加性高斯白噪声中检测确知信号的最佳检测器是“相关接收”。本节将介绍另一种最佳准则——最大信噪比准则。匹配滤波器是使其输出信噪比为最大的一种滤波器,而且可以证明,匹配滤波器与相关器是等效的。

前面已经说明,在高斯白噪声背景下检测确知信号的二元通信系统的性能与信噪比 E/N_0 有关, E/N_0 愈大,则平均错误概率愈小。这启发我们直接用输出信噪比最大作为准则来设计接收机或线性滤波器。

1943年诺斯(D. D. North)提出了匹配滤波器的理论。所谓匹配滤波器就是这样一种最佳线性滤波器,在输入为确知信号加噪声的情况下,所得输出信噪比达到最大。我们知道,在接收机中有时并不需要复现原来的信号波形,而只需知道信号能量是否存在。针对这类问题,我们就要求线性滤波器在输出端能够提供最大的瞬时信噪比。这种能提供输出信噪比最大的最佳滤波器称其为匹配滤波器。

应该指出,本节讨论的匹配滤波器是依据以输出信噪比最大为最佳准则的线性滤波理论,它有别于将在第9章“波形估计”中以均方误差最小为最佳准则的线性滤波理论,后者是为了使统计信号波形最佳地复现,使输出波形失真最小。

还应当指出,匹配滤波器是针对线性系统而言,在输出信噪比最大意义上为最佳;而前一节讨论的似然比接收机,是对整个检测判决系统而言,在贝叶斯意义上为最佳,后者一般来说是一个非线性系统。另一方面,前一节所讨论的最佳检测系统是针对高斯白噪声背景而言的,而匹配滤波器理论并不需要高斯假设,也不需要白噪声的限制,只要求背景噪声为广义平稳过程。因而两者的出发点不完全相同。

匹配滤波器的应用十分广泛,它明显的提高了通信、雷达和其他许多无线电系统检测信号的能力。而且后面的讨论将表明,匹配滤波器是许多最佳检测系统的基本组成部分,它也在最佳信号参量估计、信号分辨、某些信号波形的产生和压缩等方面起重要作用。

2.3.2 线性滤波器的一种最佳准则——信噪比最大准则

现在,我们根据使输出信噪比为最大准则推导线性时不变系统的时域冲激响应 $h(t)$ 和频率响应 $H(\omega)$ 。

考虑含有信号和加性噪声的接收波形

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (2-84)$$

其中, $s(t)$ 是能量为 E 的确知信号,并存在于时间间隔 $[0, T]$ 内,噪声不一定是白噪声,也不一定是高斯分布的,但它是一广义平稳随机过程,其均值为零,自相关函数为 $R_n(\tau)$ 。要求设计一个线性滤波器,使其在时刻 T 输出信噪比为最大。

假设滤波器的冲激响应为 $h(t)$,则在时刻 T ,信号与噪声的输出分量分别为

$$s_0(T) = \int_0^T h(\tau)s(T-\tau)d\tau \quad (2-85)$$

$$n_0(T) = \int_0^T h(\tau)n(T-\tau)d\tau \quad (2-86)$$

由于输入噪声均值为零,输出噪声均值也为零。输出噪声的方差即噪声的功率为

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= E\{n_0^2(T)\} = E\left\{\int_0^T h(\tau)n(T-\tau)d\tau \cdot \int_0^T h(t)n(T-t)dt\right\} \\ &= \int_0^T \int_0^T h(\tau)h(t)R_n(t-\tau)dtd\tau\end{aligned}\quad (2-87)$$

显然,输出功率信噪比为 $s_0^2(T)/\sigma_n^2$,匹配滤波器就是使 $s_0^2(T)/\sigma_n^2$ 为最大的滤波器。这等效于在 $s_0(T)$ 为常数的约束条件下,使输出噪声平均功率 $E\{n_0^2(T)\}$ 最小。这是一个有约束条件的变分问题,其解的必要条件应使目标函数

$$J = E\{n_0^2(T) - \mu s_0(T)\} \quad (2-88)$$

达到极小值。式中 μ 是拉格朗日乘数。将式(2-85)和式(2-87)代入式(2-88),得

$$\begin{aligned}J &= \int_0^T \int_0^T h(\tau)h(t)R_n(t-\tau)dtd\tau - \mu \int_0^T h(t)s(T-t)dt \\ &= \int_0^T h(t) \left[\int_0^T h(\tau)R_n(t-\tau)d\tau - \mu s(T-t) \right] dt\end{aligned}\quad (2-89)$$

假定 $h_0(t)$ 是使 J 极小的最佳滤波器的冲击响应,则任意滤波器的冲激响应可表示为

$$h(t) = h_0(t) + \alpha \epsilon(t) \quad (2-90)$$

式中, $\epsilon(t)$ 是定义于 $0 \leq t \leq T$ 的任意函数, α 为一任意乘数。将式(2-90)代入式(2-89)得

$$\begin{aligned}J(\alpha) &= \int_0^T \int_0^T [h_0(t) + \alpha \epsilon(t)][h_0(\tau) + \alpha \epsilon(\tau)]R_n(t-\tau)d\tau dt - \\ &\quad \mu \int_0^T [h_0(t) + \alpha \epsilon(t)]s(T-t)dt\end{aligned}\quad (2-91)$$

对于任意给定的函数 $\epsilon(t)$, $J(\alpha)$ 应在 $\alpha=0$ 处达到极值。所以, $h_0(t)$ 满足如下方程:

$$\left. \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (2-92)$$

式(2-91)对 α 求导,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} &= \int_0^T \int_0^T [\epsilon(t)h_0(\tau) + \epsilon(\tau)h_0(t) + 2\alpha \epsilon(\tau)\epsilon(t)] \cdot \\ &\quad R_n(t-\tau)d\tau dt - \mu \int_0^T \epsilon(t)s(T-t)dt\end{aligned}\quad (2-93)$$

因为 $R_n(\tau-t) = R_n(t-\tau)$, 上式重积分中第一项和第二项相等。将式(2-93)代入式(2-92), 则最佳冲激响应 $h_0(t)$ 应满足如下方程:

$$\int_0^T \epsilon(t) \left[\int_0^T 2h_0(\tau)R_n(t-\tau)d\tau - \mu s(T-t) \right] dt = 0 \quad (2-94)$$

由于 $\epsilon(t)$ 的任意性, 上式等效于

$$\int_0^T 2h_0(\tau)R_n(t-\tau)d\tau - \mu s(T-t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2-95)$$

即

$$\int_0^T h_0(\tau)R_n(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\mu s(T-t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2-96)$$

因为拉格朗日乘数是一个常数, $\mu/2$ 只改变滤波器的增益, 对信号和噪声的影响相同, 并不改变信噪比, 我们不妨令它为 1。于是, 式(2-96)的最佳滤波器冲激响应应满足下述积分方程:

$$\int_0^T h_0(\tau)R_n(t-\tau)d\tau = s(T-t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2-97)$$

这就是匹配滤波器方程的普遍形式。该方程的物理意义为, 当滤波器输入端确知信号为 $s(t)$, 加性噪声的自相关函数为 $R_n(\tau)$ 时, 则满足这一积分方程的滤波器 $h_0(t)$ 使输出信噪比达到最

大。注意在推导上式时,我们并未对噪声的分布做任何假定。

把式(2-97)代入式(2-85)和式(2-87)中,就得到最佳滤波器的最大输出(功率)信噪比,即

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{\max} &= \frac{s_0^2(T)}{E\{n_0^2(T)\}} = \frac{\left[\int_0^T h_0(\tau)s(T-\tau)d\tau\right]^2}{\int_0^T h_0(\tau)\left[\int_0^T h_0(t)R_n(\tau-t)dt\right]d\tau} \\ &= \int_0^T h_0(\tau)s(T-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2-98)$$

为了具体求出最佳滤波器的冲激响应,需要解方程式(2-97),该方程是第一类弗雷霍姆(Fredholm)积分方程。一般来说,这样的积分方程不能直接求解。但当积分方程的核是有理核时可以直接求解,这在本书附录 B 中予以讨论。

2.3.3 白噪声背景下的匹配滤波器

有一种特殊而又常见的情况,就是噪声为白噪声,其自相关函数 $R_n(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$ 的情况,此时可以直接求解积分方程式(2-97),其解为

$$h_0(t) = \frac{2}{N_0}s(T-t) = cs(T-t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2-99)$$

式中, $c = 2/N_0$ 为一常数。这便是白噪声情况下匹配滤波器的冲激响应。根据式(2-98)和式(2-99),匹配滤波器的输出信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\max} = \int_0^T \frac{2}{N_0}s^2(\tau)d\tau = \frac{2E}{N_0} \quad (2-100)$$

它只与输入信号能量 E 和白噪声功率谱密度 $N_0/2$ 有关,而与输入信号的波形和噪声的概率分布无关。

应用式(2-99),可以得出匹配滤波器在时刻 T 的输出为

$$y_0(T) = \int_0^T x(t)h_0(T-t)dt = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t)dt \quad (2-101)$$

值得注意的是,匹配滤波器输出在 $t = T$ 时刻的抽样值与相关器输出相等,因此,可以用匹配滤波器来代替相关器组成最佳接收机。例如,图 2.4 所示的二元信号的相关接收机,可以改用匹配滤波器组成,如图 2.12 所示。

这里想强调一下,相关器与匹配滤波器的输出只是在 $t = T$ 时刻才相等,这点可以从图 2.13 看出。该图画出对于一段正弦波输入相关器和匹配滤波器的输出波形。相关器的输出以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 u du$ 表示,它在 $0 \leq t \leq T$ 内近似于线性增长;而匹配滤波器的输出则近似为线性调幅的正弦波,二者在 $t = T$ 时相等。

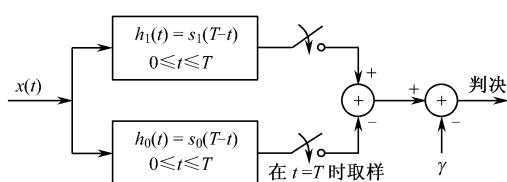


图 2.12 二元信号的等效最佳检测系统

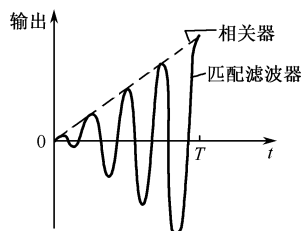


图 2.13 输入为正弦波时相关器与匹配滤波器的输出

相关器和匹配滤波器的实现各有其难处,采用哪个合适要视具体情况而定。一般而言,相关器需要一个有用信号 $s(t)$ 的本地复制品,而且要求它和接收信号 $x(t)$ 中的有用信号成分严格同步,这是它的难点。匹配滤波器不需要本地复制品,因此结构上比较简单。然而其冲击响应与有用信号的匹配往往是难以精确做到的。此外,要求有准确的抽样时刻,这也不是轻而易举能办到的。

由式(2-99)可见,在 Gaussian 白噪声情况下,匹配滤波器的冲激响应为输入信号的镜像函数,如图 2.14 所示。图中信号持续时间间隔为 $(0, T)$,观测时间为 t_f ,图 2.14(b)中实线表示 $t_f = T$ 时的情况,虚线表示 $t_f < T$ 时的情况。当 $t_f < T$ 时, $h_0(t)$ 为物理不可实现的,因为它需要在 $t < 0$ 时做出响应,也就是信号未出现前做出响应。对物理可实现滤波器来说,为了充分利用输入信号能量,必须选择观测时间 t_f 使之满足 $t_f \geq T$,但 $t_f > T$ 是没有必要的,一般选择 $t_f = T$ 。

在讨论了时域解之后,再回来研究匹配滤波器的频域传输函数。假定信号的傅里叶变换为

$$S(\omega) = \int_0^T s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-102)$$

滤波器的传输函数 $H(\omega)$ (为了书写方便,从下式开始,我们略去匹配滤波器冲激响应 $h_0(t)$ 的下标)

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-103)$$

将匹配滤波器冲击响应表示式(2-99)代入式(2-103),则有

$$H(\omega) = \int_0^T s(T-t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-104)$$

令 $\tau = T-t$, 得到

$$H(\omega) = \int_0^T s(\tau) e^{-j\omega(T-\tau)} d\tau \quad \text{即} \quad H(\omega) = e^{-j\omega T} \int_0^T s(\tau) e^{j\omega \tau} d\tau \quad (2-105)$$

上式积分为 $e^{-j\omega T} S^*(\omega)$, 所以在频域内匹配滤波器与信号的关系是

$$H(\omega) = K e^{-j\omega T} S^*(\omega), \text{通常取 } K = 1 \quad (2-106)$$

我们再从包络检波前的接收机输出信噪比关系来考察匹配滤波器。设输出信号为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j\omega t) S(\omega) H(\omega) d\omega \quad (2-107)$$

令 $y(T)$ 为 $y(t)$ 的最大值。滤波器输出端的噪声功率谱为

$$N(\omega) = \frac{N_0}{2} |H(\omega)|^2 \quad (2-108)$$

式中, $N_0/2$ 是滤波器输入端的噪声功率谱密度(以 W/Hz 为单位)。因为在分析过程中使用了负频率和正频率,则产生了 $1/2$ 的系数,而通常的噪声密度的定义只考虑正频率。因此平均噪声输出功率为

$$N = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

输入信号能量可写为

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (2-109)$$

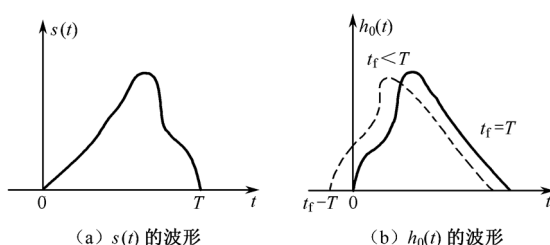


图 2.14 $h_0(t)$ 与 $s(t)$ 的关系

一个最佳雷达检测器必须使其输出端的峰值信号功率 $|y(T)|^2$ 与平均噪声功率 N 之比

$$\frac{|y(T)|^2}{N} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H(\omega) \exp(j\omega T) d\omega \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega} \quad (2-110)$$

达到最大。使这个比值达到最大的滤波器传输函数 $H(\omega)$ 可使用施瓦茨不等式求得,即

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) S(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (2-111)$$

可得

$$\frac{|y(T)|^2}{N} \leq \frac{2E}{N_0} \quad (2-112)$$

且在等式成立时得到最大输出信噪比。只有

$$H(\omega) = K S^*(\omega) e^{-j\omega T} \quad (2-113)$$

时,式(2-112)才变为等式。式中,“ $*$ ”表示复共轭; T 是使滤波器实际上能够实现匹配的时间延迟; K 是增益常数。式(2-113)便是匹配滤波器的传输函数表示式,与式(2-106)相同。

由此可见,除了相移 $e^{-j\omega T}$ 外,匹配滤波器的频率响应函数是接收信号频谱的共轭,其相移随频率而均匀变化,其作用是引入一个恒定的延时。结果,峰值信噪比为

$$\hat{S}/N = 2E/N_0$$

应注意, \hat{S} 是瞬时峰值信号功率, N 为平均噪声功率。因为在推导中未使用波形 $s(t)$ 的任何其他条件,所以只要是白噪声,无论什么信号,若它们所含能量相同,则在匹配滤波器输出端能够得到的最大信噪比是一样的。

再回到时域来看,匹配滤波器也可用冲激响应 $h(t)$ 来表示。式(2-113)描述的滤波器的冲激响应函数为

$$h(t) = K s^*(T-t) \quad (2-114)$$

也就是说,冲激响应是输入波形的时间倒置再经延时乘以简单的增益常数。因为滤波器的输出是输入信号和冲击响应的卷积,所以匹配滤波器输出 $y_0(t)$ 在没有噪声的情况下可以写成

$$y_0(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(\tau) s(\tau + T - t) d\tau = R(t - T) \quad (2-115)$$

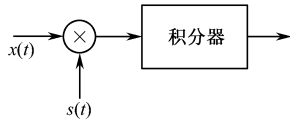


图 2.15 互相关接收机框图

此波形是输入信号的自相关 $R(t)$ 的时移复本。可见,匹配滤波器在被噪声污染了的接收信号和发射信号的复制品之间建立了互相关。

相关检测在数学中等效于匹配滤波检测,但实现的方法不同。在相关检测中,输入信号与延时的发射信号的样本相乘后,再通过积分器,如图 2.15 所示。在大多数情况下,都宁愿采用匹配滤波器或近似匹配滤波接收机,而不用相关接收机。

【例 2.1】 白噪声中单个矩形脉冲信号的匹配滤波器。

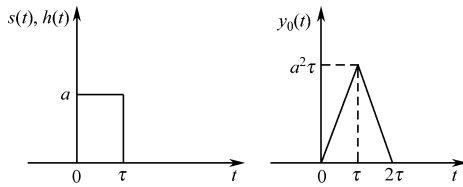
设脉冲信号 $s(t)$ 为

$$s(t) = \begin{cases} a, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t < 0 \text{ 或 } t > \tau \end{cases} \quad (2-116)$$

如图 2.16(a)所示。利用式(2-113)可以证明,匹配滤波器的传输函数为

$$H(\omega) = \frac{a}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) \quad (2-117)$$

输出信号波形如图 2.16(b)所示。滤波器的实现框图如图 2.17 所示。



(a) 输入信号及冲激响应 (b) 输出信号波形

图 2.16 矩形脉冲信号匹配滤波器的
 $s(t)$ 、 $h(t)$ 和 $y_0(t)$ 波形

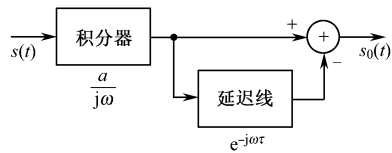


图 2.17 单个矩形脉冲信号匹配滤波器框图

【例 2.2】 白噪声中单个射频脉冲信号的匹配滤波器。

设接收波形中包含的信号 $s(t)$ 是矩形包络的射频脉冲, 脉冲宽度为 τ , 射频角频率为 ω_0 , 其表示式为

$$s(t) = aP(t)\cos\omega_0 t \quad (2-118)$$

式中

$$P(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t < 0 \text{ 或 } t > \tau \end{cases}$$

由式(2-113)不难求出匹配滤波器的传输函数为

$$H(\omega) = a \left[\frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{2j(\omega - \omega_0)} + \frac{1 + e^{-j\omega\tau}}{2j(\omega + \omega_0)} \right] \quad (2-119)$$

由式(2-112), 滤波器输出的最大信噪比为

$$(S/N)_{\max} = 2E/N_0 = a^2\tau/N_0 \quad (2-120)$$

下面讨论如何构成这种匹配滤波器。由式(2-119)可知, 当 $\omega > 0$ 时, 该式右边第一项远大于第二项, 故有

$$H(\omega) \approx \frac{a}{2j(\omega - \omega_0)}(1 - e^{-j\omega\tau}) \quad (2-121)$$

由式(2-121)可知, $H(\omega)$ 由两部分级联而成: 第一部分 $a/[2j(\omega - \omega_0)]$ 可用选择性很高的谐振放大器实现; 第二部分 $1 - e^{-j\omega\tau}$ 可用延迟线与相减器实现。匹配滤波器的框图如图 2.18 所示。

由例 2.2 可见, 实际上很难实现精确的射频脉冲匹配滤波器。工程上通常采用近似实现。可以指出, 最佳地选择给定类型的窄带滤波器的带宽, 就可取得与匹配滤波器相近的效果。表 2.1 列出了几种滤波器, 给出了它们对于矩形射频脉冲信号进行滤波的最佳 $B\tau$ 值, 以及相对于理想匹配滤波器的信噪比损失。由表 2.1 可见, 信噪比损失都在 1dB 以内, 因此, 这些滤波器通常称为准匹配滤波器。

表 2.1 准匹配滤波器与匹配滤波器的效果比较表

滤波器	最佳 $B\tau$	相对于匹配滤波器的 信噪比损失/dB
矩形	1.37	0.85
高斯形	0.72	0.49
单调谐电路	0.40	0.88
两级单调谐电路	0.613	0.56
五级单调谐电路	0.672	0.50

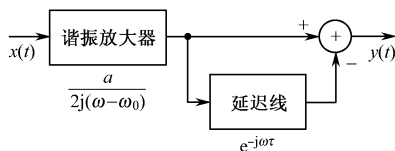


图 2.18 单个射频脉冲信号
匹配滤波器框图

注: B 为滤波器的半功率带宽, τ 为信号脉冲宽度。

信噪比损失 = $10\lg(\text{匹配滤波器输出信噪比}/\text{准匹配滤波器输出信噪比})$

基于上述匹配滤波器的概述,可进一步导出诸如各类脉冲压缩信号的匹配滤波器及实现方法,还可导出有关色噪声背景下的匹配滤波器。

2.3.4 色噪声背景下确知信号的匹配滤波器

前一节假定观测噪声是零均值白噪声,现在讨论非白噪声(即色噪声)的情况。设色噪声自相关函数为 $R_n(\tau)$ 。色噪声背景下确知信号的匹配滤波器一般称为广义匹配滤波器,它应满足积分方程式(2-97)。为方便起见,将式(2-97)重写如下

$$\int_0^T h(\tau) R_n(t-\tau) d\tau = s(T-t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2-122)$$

在已知 $R_n(\tau)$ 的情况下,可以求解该积分方程得出广义匹配滤波器的冲激响应 $h(t)$ 。该积分方程较严密的解法在附录 A 中讨论。下面先用卷积定理求出广义匹配滤波器的近似解。然后应用预白化方法求广义匹配滤波器的频域解。

为了求出式(2-122)的近似解,最直接的方法是把式(2-122)的积分限由 $(0, T)$ 扩充为 $(-\infty, \infty)$,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) R_n(t-\tau) d\tau = s(T-t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2-123a)$$

这相当于求 $h(t)$ 的近似最佳非因果解。积分限扩充之后,该方程可看做如下卷积运算:

$$h(t) * R_n(t) = s(T-t) \quad (2-123b)$$

上式取傅里叶变换,有

$$H(\omega) N(\omega) = S^*(\omega) e^{-j\omega T}$$

式中,在色噪声背景下,噪声功率密度谱用 $N(\omega)$ 来描述。于是,广义匹配滤波器的传输函数为

$$H(\omega) = \frac{KS^*(\omega) e^{-j\omega T}}{N(\omega)} \quad (2-124)$$

对于白噪声, $N(\omega) = N_0/2$, 式(2-124)变为式(2-106)。可见式(2-106)是式(2-124)的特例。应当注意,式(2-124)可能是一个非因果的滤波器。

下面采用预白化方法求解广义匹配滤波器,其结果将与式(2-124)相同。所谓预白化方法,是将含有色噪声的输入信号先通过一个白化滤波器,使色噪声变为白噪声,然后再串接一个白噪声背景下的匹配滤波器,从而得到广义匹配滤波器,将线性滤波器 $H(\omega)$ 分解成两个级联的滤波器 $H_w(\omega)$ 和 $H_m(\omega)$ 并示于图 2.19 中。

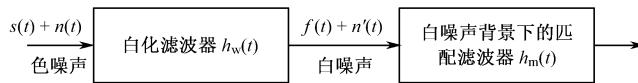


图 2.19 广义匹配滤波器

对于白化滤波器 $h_w(t)$,要使其输出噪声变为白噪声,则需满足

$$|H_w(\omega)|^2 \cdot N(\omega) = c$$

式中, c 为任意常数, $H_w(\omega)$ 为 $h_w(t)$ 的傅里叶变换,由上式可得

$$|H_w(\omega)|^2 = \frac{c}{N(\omega)} \quad (2-125)$$

另一方面,信号 $s(t)$ 也通过了白化滤波器 $h_w(t)$,其输出变为

$$f(t) = h_w(t) * s(t)$$

写成频域表达式为

$$F(\omega) = H_w(\omega)S(\omega) \quad (2-126)$$

在白化滤波器 $h_w(t)$ 后串接一个 $f(t)$ 的匹配滤波器(注意是白噪声下的匹配滤波器) $h_m(t)$, 由式(2-113)其传输函数为

$$H_m(\omega) = F^*(\omega)e^{-j\omega T} \quad (2-127)$$

它的输出端将给出最大信噪比。由此可知, 广义匹配滤波器可用 $H_w(\omega)$ 与 $H_m(\omega)$ 级联得到, 由式(2-125)、式(2-126)和式(2-127), 其传输函数应为

$$H(\omega) = H_w(\omega)H_m(\omega) = cS^*(\omega)e^{-j\omega T}/N(\omega) \quad (2-128)$$

式(2-128)与式(2-124)完全一致。

剩下的问题是如何确定白化滤波器 $H_w(\omega)$, 这是系统设计的关键。如果 $N(\omega)$ 可用有理函数表示, 则总有

$$N(\omega) = N^+(\omega)N^-(\omega) = N^+(\omega)[N^+(\omega)]^*$$

式中, $N^+(\omega)$ 的零、极点都在 S 的左半平面, $N^-(\omega)$ 的零、极点都在 S 的右半平面。由式(2-125)有

$$H_w(\omega)H_w^*(\omega) = \frac{c}{\{N^+(\omega)[N^+(\omega)]^*\}}$$

$$H_w(\omega) = \frac{\sqrt{c}}{N^+(\omega)} \quad (2-129)$$

从式(2-129)可看出, $H_w(\omega)$ 是一个物理可实现的滤波器。

应当指出, $H_w(\omega)$ 的物理可实现性并不意味着 $H(\omega)$ 的物理可实现, 这是因为即使 $s(t)$ 是时间有限的, $f(t)$ 也不一定是时间有限的。

【例 2.3】 已知输入色噪声具有 RC 型谱密度 $N(\omega) = 2\beta/(\omega^2 + \beta^2)$, 求白化滤波器传输函数 $H_w(\omega)$ 。

解: 因为

$$N(\omega) = N^+(\omega)N^-(\omega) = \left[\frac{\sqrt{2\beta}}{j\omega + \beta} \right] \left[\frac{\sqrt{2\beta}}{-j\omega + \beta} \right]$$

$$H_w(\omega) = \frac{1}{N^+(\omega)} = \frac{j\omega + \beta}{\sqrt{2\beta}}$$

应用式(2-126)和式(2-127), 由 $H_w(\omega)$ 和 $S(\omega)$ 可求出 $H_m(\omega)$, 于是可确定整个滤波器。

2.3.5 匹配滤波器的有关性质

白噪声背景下确知信号的匹配滤波器归纳起来, 具有以下性质。

性质 1: 在所有的线性滤波器中, 匹配滤波器输出的信噪比为最大, 即

$$(S/N)_{\max} = 2E/N_0$$

它与输入信号的形状以及白噪声的分布特性无关。

性质 2: 匹配滤波器的幅频特性与输入信号的幅频特性一致, 而匹配滤波器的相频特性与输入信号的相频特性相反, 并有一附加的相位项 ωT 。

$$\text{令} \quad S(\omega) = |S(\omega)| e^{j\varphi_s(\omega)} \quad H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi_h(\omega)}$$

则由式(2-113)可知

$$|H(\omega)| e^{j\varphi_h(\omega)} = |S(\omega)| e^{-j\varphi_s(\omega) - j\omega T}$$

$$\text{因此} \quad \varphi_h(\omega) = -\varphi_s(\omega) - \omega T \quad (2-130)$$

性质 3: 匹配滤波器若对 $s(t)$ ($0, T$) 匹配, 则对 $s_1(t) = As(t - \tau)$ 也匹配。

对于 $s_1(t)$ 匹配的滤波器, 其传输函数

$$H_1(\omega) = S_1^*(\omega) e^{-j\omega T'} = AS^*(\omega) e^{-j\omega(T' - \tau)} \quad (2-131)$$

对于 $s(t)$ 匹配的滤波器, 其传输函数为

$$H(\omega) = S^*(\omega) e^{-j\omega T} \quad (2-132)$$

将式(2-132)代入式(2-131), 可得

$$H_1(\omega) = AH(\omega) e^{-j\omega[T' - (T + \tau)]}$$

令 $T' = T + \tau$, 于是

$$H_1(\omega) = AH(\omega) \quad (2-133)$$

对于匹配滤波器而言, A 并不影响匹配滤波器的基本性质。可见, 与 $s(t)$ 匹配的滤波器对 $s_1(t) = As(t - \tau)$ 同样匹配, 仅仅是最大信噪比的输出时刻要后移 τ 。

性质 4: 匹配滤波器对频移信号不再匹配。

对于频移信号 $s_2(\omega) = s(\omega + \omega_d)$ 来说, 对应于 $s_2(t)$ 信号的匹配滤波器的传递函数为

$$H(\omega) = S_2^*(\omega) e^{j\omega T} = S^*(\omega + \omega_d) e^{-j\omega T} \quad (2-134)$$

因此, 它与原信号的匹配滤波器完全不同。这就是说, 频移后的信号通过原信号的匹配滤波器后, 不能给出最大的输出信噪比。在这种情况下应该采取随后将介绍的时变匹配滤波器, 它的传输函数与频率的变化有关。

性质 5: 匹配滤波器的输出信号是输入信号的自相关函数[见式(2-115)]。也就是说, 匹配滤波器的输出信号在形式上与输入信号的自相关函数 $R(t - T)$ 相同。可知匹配滤波器的输出信号 $y_0(t)$ 是对于 T 呈对称的波形。

性质 6: 匹配滤波器对于时延信号具有适应性。当 $y(t)$, ($0, T$) 输入到 $s(t)$ 匹配的匹配滤波器 $h(t) = s(T - t)$ 时, 其输出 $y_0(t)$ 在 $t = T$ 时刻的值等于 $y(t)$ 与 $s(t)$ 的相关, 即 $y_0(t = T) = \int_0^T y(t)s(t)dt$, 如图 2.20 所示。

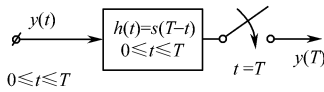


图 2.20 用匹配滤波器实现

$$\int_0^T y(t)s(t)dt$$

证明: 匹配滤波器的输出 $y_0(t) = \int_0^T s(T - \tau)y(t - \tau)d\tau$

在 $t = T$ 时刻, 有 $y_0(t = T) = \int_0^T s(T - \tau)y(T - \tau)d\tau$

令 $t' = T - \tau$, 则 $y_0(T) = \int_0^T s(t')y(t')dt' \quad (2-135)$

根据这一性质可推知, 相关接收机中观测样本与确知信号的相关可以由确知信号匹配滤波器输出在 $t = T$ 时刻的值得出。

2.3.6 时变匹配滤波器

$$H(\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \tau) e^{-j\omega(t - \tau)} d\tau \quad (2-136)$$

式中, $H(\omega, t)$ 是相应的时变的冲激响应。因此滤波器的输出信号为

$$y_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega \quad (2-137)$$

它在 T 时刻的瞬时功率为

$$|y_0(T)|^2 = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H(\omega, T) e^{j\omega T} d\omega \right|^2 \quad (2-138)$$

另外,在滤波器输出端的噪声平均功率为

$$\begin{aligned}\overline{n_0^2}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, u) h(t, v) R_n(u - v) du dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega, t)|^2 N(\omega) d\omega\end{aligned}\quad (2-139)$$

式中, $R_n(\tau)$ 为输入噪声的自相关函数, $N(\omega)$ 为其功率谱密度。现在假定输入为白噪声, 则 $N(\omega) = N_0/2$ 是常数。此时, 滤波器的输出信噪比为

$$\frac{\hat{S}}{N} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H(\omega, t) e^{j\omega T} d\omega \right|^2}{\frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega, t_0)|^2 d\omega}\quad (2-140)$$

利用许瓦兹不等式后得

$$\frac{\hat{S}}{N} \leq \frac{1}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{2E}{N_0}\quad (2-141)$$

式中, E 为信号能量, \hat{S} 为瞬时峰值功率。

当满足条件

$$H(\omega, T) = K S^*(\omega) e^{-j\omega T} \quad (\text{通常取 } K = 1)\quad (2-142)$$

时匹配滤波器可输出最大信噪比

$$(\hat{S}/N)_{\max} = 2E/N_0\quad (2-143)$$

比较式(2-142)和式(2-106), 可见它们的传输函数是相同的, 但是在时变条件下匹配滤波器的传输函数与时间有关, 它需在不同的时刻改变传输函数的匹配条件, 以适应不同频移信号。而时不变匹配滤波器的传输函数与时间无关, 因而无法适应不同的频移信号, 这是两者的区别。

2.4 随机参量信号的检测

前面所研究的问题都是在噪声中检测确知信号, 因此可称为简单的二元(或多元)假设检验。然而实际情况中, 被检测的信号除了加性噪声产生的不定性外, 还有由信号参量的随机性引起的不定性。所谓“随机参量信号”是指在信号中某个或某些参量是随机的。例如, 由被检测目标反射回来的雷达信号可能是幅度稳定而相位模糊的随相信号, 也可能是幅度和相位都是随机变化的随幅随相信号。在通信系统中也会遇到这类情况, 例如信号发生器的相位抖动就导致随相信号, 经过电离层或者对流层传播后接收到的多径信号就是随幅随相信号。此时, 信号一般地可表示为

$$s(t) = s(t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = s(t; \boldsymbol{\alpha})\quad (2-144a)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 为信号 $s(t)$ 的随机参量或未知的非随机参量。称这种含有随机或未知参量的信号为随机参量信号。这时, 考虑一般二元信号检测时, 在假设 H_0 和假设 H_1 下, 接收信号 $x(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned}H_0: x(t) &= s_0(t; \boldsymbol{\alpha}) + n(t) & 0 \leq t \leq T \\ H_1: x(t) &= s_1(t; \boldsymbol{\alpha}) + n(t) & 0 \leq t \leq T\end{aligned}\quad (2-144b)$$

关于随机参量的假设称为复合假设, 因而随机参量信号的检测是复合假设检验问题。

在实际中可能遇到的随机参量信号有三种情况, 即

- (1) 具有已知先验概率密度的随机参量信号。
- (2) 具有未知先验概率密度的随机参量信号。
- (3) 非随机的未知参量信号。

在这里仅研究第一种情况,即随机参量的先验概率密度是已知的。至于第二和第三种情况属于统计信号估值的问题,将在后面章节内研究。

本节着重研究在信道具有白色高斯噪声情况下的二元复合假设检验,但所用的方法可以推广到多元复合假设检验的情况。

令 $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ 表示与假设 H_0 有关的随机参量集合,例如 φ_1 代表随机相位, φ_2 代表随机幅度, φ_3 代表随机频率等。再令 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ 表示与假设 H_1 有关的随机参量集合,并且用 $p(\Phi)$ 和 $p(\Theta)$ 来表示随机参量 Φ 和 Θ 的先验概率密度。在这种情况下,代价函数也可以是 Φ 和 Θ 的函数,即 c_{00} 和 c_{10} 与 Φ 有关,同时 c_{11} 和 c_{01} 与 Θ 有关。

由于信号参量的随机性,输入到接收机的观测样值不仅受信道噪声的不确定性影响,而且还与随机参量有关。因此它们的似然函数可以写成 $p(\mathbf{x}|\Phi)$ 与 $p(\mathbf{x}|\Theta)$,前者对应于假设 H_0 ,后者对应于假设 H_1 。此时按照平均风险的定义式可以写成

$$\begin{aligned}\bar{R} = & P(H_0) \int_{D_0} \int_{\{\Phi\}} p(\mathbf{x}|\Phi) p(\Phi) c_{00}(\Phi) d\Phi d\mathbf{x} + \\ & P(H_0) \int_{D_1} \int_{\{\Phi\}} p(\mathbf{x}|\Phi) p(\Phi) c_{10}(\Phi) d\Phi d\mathbf{x} + \\ & P(H_1) \int_{D_0} \int_{\{\Theta\}} p(\mathbf{x}|\Theta) p(\Theta) c_{01}(\Theta) d\Theta d\mathbf{x} + \\ & P(H_1) \int_{D_1} \int_{\{\Theta\}} p(\mathbf{x}|\Theta) p(\Theta) c_{11}(\Theta) d\Theta d\mathbf{x}\end{aligned}\quad (2-145)$$

式中, D_0 和 D_1 分别为判决区域, $\{\Phi\}$ 和 $\{\Theta\}$ 是对多维随机变量 Φ 和 Θ 的积分域,显然这里都是多重积分。

已知 $\int_{D_1} p(\mathbf{x}|\Phi) d\mathbf{x} = 1 - \int_{D_0} p(\mathbf{x}|\Phi) d\mathbf{x}$ 和 $\int_{D_1} p(\mathbf{x}|\Theta) d\mathbf{x} = 1 - \int_{D_0} p(\mathbf{x}|\Theta) d\mathbf{x}$, 将它们代入式(2-145)后可得

$$\begin{aligned}\bar{R} = & P(H_0) \int_{\{\Phi\}} p(\Phi) c_{10}(\Phi) d\Phi + P(H_1) \int_{\{\Theta\}} p(\Theta) c_{11}(\Theta) d\Theta + \\ & \int_{Z_0} \left\{ P(H_1) \int_{\{\Theta\}} p(\mathbf{x}|\Theta) p(\Theta) [c_{01}(\Theta) - c_{11}(\Theta)] d\Theta - \right. \\ & \left. P(H_0) \int_{\{\Phi\}} p(\mathbf{x}|\Phi) p(\Phi) [c_{10}(\Phi) - c_{00}(\Phi)] d\Phi \right\} d\mathbf{x}\end{aligned}\quad (2-146)$$

现在采用 Bayes 准则,调整判决区域 Z_0 和 Z_1 ,使得平均风险最小。与过去一样,假定 $c_{10}(\Phi) - c_{00}(\Phi) > 0$ 和 $c_{01}(\Theta) - c_{11}(\Theta) > 0$,并且在

$$\begin{aligned}& P(H_0) \int_{\{\Phi\}} p(\mathbf{x}|\Phi) p(\Phi) [c_{10}(\Phi) - c_{00}(\Phi)] d\Phi > \\ & P(H_1) \int_{\{\Theta\}} p(\mathbf{x}|\Theta) p(\Theta) [c_{01}(\Theta) - c_{11}(\Theta)] d\Theta\end{aligned}\quad (2-147)$$

时判决为假设 H_0 ,否则就是假设 H_1 。

因此,式(2-147)可以写成

$$\Lambda(\mathbf{x}, \Phi, \Theta, c) = \frac{\int_{\{\Theta\}} p(\mathbf{x}|\Theta) p(\Theta) [c_{01}(\Theta) - c_{11}(\Theta)] d\Theta}{\int_{\{\Phi\}} p(\mathbf{x}|\Phi) p(\Phi) [c_{10}(\Phi) - c_{00}(\Phi)] d\Phi} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \quad (2-148)$$

它就是复合假设检验的 Bayes 准则,式中 $\Lambda(\mathbf{x}, \Phi, \Theta, c)$ 可称为复合假设检验的似然比。

通常可假定代价函数与随机参量 Φ 或 Θ 均无关,此时式(2-148)可简化为

$$\Lambda(\mathbf{x}, \Phi, \Theta) = \frac{\int_{\{\Theta\}} p(\mathbf{x} | \Theta) p(\Theta) d\Theta}{\int_{\{\Phi\}} p(\mathbf{x} | \Phi) p(\Phi) d\Phi} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} \quad (2-149)$$

已知

$$p(\mathbf{x} | \Theta) p(\Theta) = p(\mathbf{x}, \Theta), \quad p(\mathbf{x} | \Phi) p(\Phi) = p(\mathbf{x}, \Phi)$$

它们是联合概率密度。通过边际积分后可得

$$\int_{\{\Theta\}} p(\mathbf{x}, \Theta) d\Theta = p(\mathbf{x} | H_1), \quad \int_{\{\Phi\}} p(\mathbf{x}, \Phi) d\Phi = p(\mathbf{x} | H_0)$$

因此,式(2-149)又可简化为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | H_1)}{p(\mathbf{x} | H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} \quad (2-150)$$

可见在随机参量的概率密度已知、且代价函数与参量无关的情况下,复合假设检验可以简化为简单的假设检验,它们的区别就在于似然函数有所不同。

2.4.1 随机相位信号的检测

最常见的随机信号参量是相位。例如,在许多通信和雷达系统中,接收信号具有 $A \sin(\omega t + \theta)$ 的形式。信号存在于间隔 $(0, T)$ 上,且 $T \gg 2\pi/\omega$ 。接收信号相位取决于发射信号初相、信号传输路径上的延时,对雷达系统还取决于目标复反射系数的相位。在非相参系统中,发射信号的初相是随机的。对接收者来说,后面两项因素更是随机的,无法预先确定。因而通常假定 θ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布。相位均匀分布意味着完全缺乏相位信息,是一种最不利的分布。

假设被检测的二元信号为

$$\begin{aligned} s_0(t) &= 0 \quad (0 \leq t \leq T) \\ s_1(t) &= A \sin(\omega_0 t + \theta) \quad (0 \leq t \leq T) \end{aligned} \quad (2-151)$$

式中,振幅 A , 频率 ω_0 和到达时间是已知的,相位 θ 是随机变量。对于随机相位均匀分布情况,这是一种提供信息量最少的分布,其先验概率密度 $p(\theta)$ 是在 $(-\pi, \pi)$ 范围内均匀分布,即

$$p(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi & (0 \leq \theta \leq 2\pi) \\ 0 & (\text{其余}) \end{cases} \quad (2-152)$$

设噪声 $n(t)$ 是均值为零,功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。上述模型相当于检测具有随机初相的窄带雷达单个回波信号。此时,统计检验的假设为

$$\begin{aligned} H_0 : x(t) &= n(t) \quad (0 \leq t \leq T) \\ H_1 : x(t) &= s_1(t) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T) \end{aligned} \quad (2-153)$$

下面讨论随机相位信号最佳检测系统的结构及检测性能。

1. 最佳检测系统结构

最佳检测系统是似然比检测系统,不同的判决准则只影响门限值的大小,因此目前无须指定具体的准则。一般情况下,代价与 θ 无关,因而其平均似然比得出判决规则如下:

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | H_1)}{p(\mathbf{x} | H_0)} = \frac{\int_{\{\theta\}} p(\mathbf{x} | H_1, \theta) p(\theta) d\theta}{p(\mathbf{x} | H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0 \quad (2-154)$$

要计算似然比,首先需计算似然函数。

在雷达系统中假设 H_0 为目标不存在,此时 $x(t)=n(t)$,这里 $n(t)$ 是白色高斯噪声。根据式(2-35a)可知,它的似然函数为

$$p(\mathbf{x}|H_0) = F \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right\} \quad (2-155)$$

这里 F 为与信号无关的常数。

假设 H_1 为目标存在,此时 $x(t)=s(t)+n(t)$,将式(2-151)代入式(2-30b)后可得

$$p(\mathbf{x}|\theta) = F \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - A \sin(\omega_0 t + \theta)]^2 dt \right\} \quad (2-156)$$

此时平均似然函数为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}|H_1) &= \int_0^{2\pi} p(\mathbf{x}|\theta) p(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} F \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - A \sin(\omega_0 t + \theta)]^2 dt \right\} \frac{d\theta}{2\pi} \end{aligned} \quad (2-157)$$

式(2-157)可以展开成

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} F \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x^2(t) - 2Ax(t) \sin(\omega_0 t + \theta) + A^2 \sin^2(\omega_0 t + \theta)] dt \right\} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= F \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right\} \exp \left\{ -\frac{A^2 T}{2N_0} \right\} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T Ax(t) \sin(\omega_0 t + \theta) dt \right\} \frac{d\theta}{2\pi} \end{aligned} \quad (2-158)$$

将式(2-158)与式(2-155)相除后可得似然比为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_1)}{p(\mathbf{x}|H_0)} = \exp \left\{ -\frac{A^2 T}{2N_0} \right\} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T Ax(t) \sin(\omega_0 t + \theta) dt \right\} \frac{d\theta}{2\pi} \quad (2-159)$$

其中指数项内的积分可以展开成

$$\begin{aligned} &\frac{2A}{N_0} \int_0^T x(t) \sin(\omega_0 t + \theta) dt \\ &= \frac{2A}{N_0} \cos\theta \int_0^T x(t) \sin\omega_0 t dt + \frac{2A}{N_0} \sin\theta \int_0^T x(t) \cos\omega_0 t dt \end{aligned} \quad (2-160)$$

再令

$$\int_0^T x(t) \sin\omega_0 t dt = M \cos\theta_0 = M_I \quad (2-161)$$

$$\int_0^T x(t) \cos\omega_0 t dt = M \sin\theta_0 = M_Q \quad (2-162)$$

因此,式(2-160)可写成

$$\frac{2A}{N_0} \int_0^T x(t) \sin(\omega_0 t + \theta) dt = \frac{2A}{N_0} M \cos(\theta - \theta_0) \quad (2-163)$$

式中

$$M = \sqrt{\left[\int_0^T x(t) \sin\omega_0 t dt \right]^2 + \left[\int_0^T x(t) \cos\omega_0 t dt \right]^2} = \sqrt{M_I^2 + M_Q^2} \quad (2-164)$$

和

$$\theta_0 = \arctan \left\{ \frac{\int_0^T x(t) \cos\omega_0 t dt}{\int_0^T x(t) \sin\omega_0 t dt} \right\} = \arctan \left(\frac{M_Q}{M_I} \right) \quad (2-165)$$

因此,似然比公式(2-159)变成

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \exp \left\{ -\frac{A^2 T}{2N_0} \right\} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2AM}{N_0} \cos(\theta - \theta_0) \right\} \frac{d\theta}{2\pi} \quad (2-166)$$

由于 $I_0(x) = \int_0^{2\pi} \exp[x \cos(\theta - \theta_0)] \frac{d\theta}{2\pi}$, 它称为“修正的零阶第一类贝塞尔函数”, 因此

式(2-166)又可写成

$$\Lambda(x) = \exp\left\{-\frac{A^2 T}{2N_0}\right\} I_0\left(\frac{2AM}{N_0}\right) = \exp\left[-\frac{E_s}{N_0}\right] I_0\left(\frac{2AM}{N_0}\right) \quad (2-167)$$

式中 $E_s = (A^2 T)/2$ 是信号能量。

假定门限似然比为 Λ_0 ，它决定于所采用的判决准则，于是判别不等式可以写成

$$\exp\left(-\frac{E_s}{N_0}\right) I_0\left(\frac{2AM}{N_0}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0 \quad (2-168)$$

显然，上式中只有 M 与接收波形 $x(t)$ 有关。为了得出以 M 为检验统计量的判决准则，式(2-168)可改写为

$$I_0\left(\frac{2AM}{N_0}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0 \exp\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \quad (2-169)$$

由于函数 $I_0(x)$ 是其宗量 x 的单调上升函数，如图 2.21 所示。故以 $I_0(2AM/N_0)$ 进行判决完全等效于以统计量 M 进行判决，于是，判决规则可以写为

$$M \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma \quad (2-170)$$

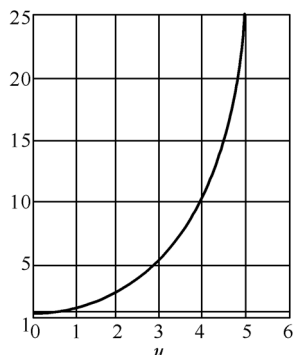


图 2.21 函数 $I_0(x)$ 曲线

式中， γ 是用 M 做检验统计量时的判决门限，对于雷达问题，其值由给定的虚警概率确定。这种随机相位信号的最佳检测系统如图 2.22 所示，通常称为正交接收机。

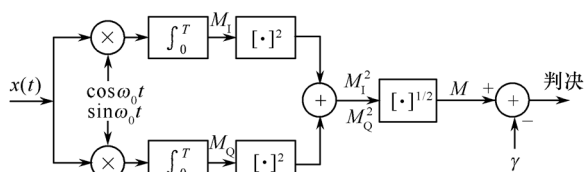


图 2.22 正交接收机

图 2.22 所示的正交接收机结构还可以进一步简化。为此，我们考虑一个与 $\sin\omega t$ 相匹配的滤波器，其冲激响应为

$$h(t) = \sin\omega(T-t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2-171)$$

当观测波形 $x(t)$ 输入到该滤波器时，其输出

为

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t x(\lambda) h(t-\lambda) d\lambda = \int_0^t x(\lambda) \sin\omega(T-t+\lambda) d\lambda \\ &= \sin\omega(T-t) \int_0^t x(\lambda) \cos\omega\lambda d\lambda + \cos\omega(T-t) \int_0^t x(\lambda) \sin\omega\lambda d\lambda \end{aligned}$$

$t=T$ 时， $y(t)$ 的包络值为

$$\left\{ \left[\int_0^T x(\lambda) \cos\omega\lambda d\lambda \right]^2 + \left[\int_0^T x(\lambda) \sin\omega\lambda d\lambda \right]^2 \right\}^{1/2}$$

这正好与式(2-164)一致，并等于 M 。由此可见，与信号 $\sin\omega t$ 匹配的滤波器，其后接上一个包络检波器，它在时刻 T 的输出与正交接收机的输出相同，都是 M 。匹配滤波器和包络检波器的组合常称为非相干匹配滤波器，如图 2.23 所示。可以进一步证明，对信号任何一个相位匹配的滤波器，都可以组成非相干匹配滤波器，我们把这个证明留给读者自行完成。



图 2.23 检测随机相位信号的非相干匹配滤波器

2. 检测性能

下面讨论随机相位信号最佳检测系统的检测性能。由于我们以 M 为检验统计量,要计算系统的检测特性,首先要求出 M 的条件概率密度。按照前面的定义有

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_Q^2} \quad (2-172)$$

式中, M_1 和 M_Q 由式(2-161)和式(2-162)确定。从 M_1 和 M_Q 的定义式可看出,由于 $x(t)$ 是高斯的, M_1 及 M_Q 也是高斯随机变量,只要求出其条件数学期望及方差,便可确定它们的条件概率密度。由于随机变量 M_1 及 M_Q 是由相位相差 90° 的通道获得的,可以证明它们不相关,因而是统计独立的。而 M 是这两个高斯随机变量的平方和再开方,可以预料 M 为莱斯分布的随机变量。下面进行具体的分析。

对于假设 H_1 及给定的初相 θ ,考虑到高斯白噪声 $n(t)$ 均值为零,则 M_1 的条件数学期望为

$$E[M_1|H_1, \theta] = E\left\{\int_0^T [A\sin(\omega t + \theta) + n(t)]\sin\omega t dt\right\} = (AT/2)\cos\theta \quad (2-173)$$

类似地, M_Q 的条件数学期望为

$$E[M_Q|H_1, \theta] = (AT/2)\sin\theta$$

考虑到白噪声 $n(t)$ 的自相关函数为 $(N_0/2)\delta(\tau)$, 则 M_1 的条件方差为

$$\begin{aligned} \text{Var}[M_1|H_1, \theta] &= E\{[M_1 - E(M_1|H_1, \theta)]^2\} \\ &= E\left\{\left[\int_0^T n(t)\sin\omega t dt\right]^2\right\} = E\left\{\int_0^T \int_0^T n(t)n(\tau)\sin\omega t \sin\omega\tau dt d\tau\right\} \\ &= \int_0^T \int_0^T R_n(t-\tau)\sin\omega t \sin\omega\tau dt d\tau = \frac{N_0}{2} \int_0^T \sin^2\omega t dt \approx \frac{N_0 T}{4} \end{aligned} \quad (2-174)$$

同理, M_Q 的条件方差为

$$\text{Var}[M_Q|H_1, \theta] \approx N_0 T/4$$

M_1 及 M_Q 的条件方差相同,我们用 σ_T^2 表示,即

$$\sigma_T^2 = N_0 T/4$$

此外,可以证明无论假设 H_1 或 H_0 为真,均有

$$E\{[M_1 - E(M_1)][M_Q - E(M_Q)]\} = 0$$

即 v_1 及 v_Q 是不相关的。由于它们是高斯随机变量,因而也是统计独立的。于是 v_1 及 v_Q 的联合条件概率密度函数是

$$p(M_1, M_Q|H_1, \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_T^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_T^2}\left[\left(M_1 - \frac{AT}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(M_Q - \frac{AT}{2}\sin\theta\right)^2\right]\right\} \quad (2-175)$$

利用变换

$$M_1 = M\cos\xi, \quad M_Q = M\sin\xi$$

所以 M 及 ξ 的联合条件概率密度是

$$p(M, \xi|H_1, \theta) = \frac{M}{2\pi\sigma_T^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_T^2}\left[M^2 + \left(\frac{AT}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{AT}{2}\right)M\cos(\theta - \xi)\right]\right\} \quad (2-176)$$

式中

$$\xi = \arctan(M_1/M_Q) \quad (0 \leq \xi \leq 2\pi)$$

式(2-176)对 ξ 积分得

$$p(M|H_1, \theta) = \int_0^{2\pi} p(M, \xi|H_1, \theta) d\xi = \frac{M}{\sigma_T^2} \exp\left[-\frac{M^2 + \left(\frac{AT}{2}\right)^2}{2\sigma_T^2}\right] I_0\left(\frac{MAT}{2\sigma_T^2}\right)$$

一般来说需要再对 θ 取统计平均,以便得到假设 H_1 下 M 的条件概率密度。但由于上式与 θ 无关,故有

$$p(M|H_1) = \frac{M}{\sigma_T^2} \exp \left[-\frac{M^2 + \left(\frac{AT}{2}\right)^2}{2\sigma_T^2} \right] I_0 \left(\frac{MAT}{2\sigma_T^2} \right) \quad (2-177)$$

对于假设 H_0 , 考虑以 $A=0, I_0(0)=1$, 故

$$p(M|H_0) = \frac{M}{\sigma_T^2} \exp \left[-\frac{M^2}{2\sigma_T^2} \right] \quad (2-178)$$

式(2-177)与式(2-178)分别为莱斯分布与瑞利分布。

于是, 虚警概率等于

$$P_{fa} = \int_{\gamma}^{+\infty} p(M|H_0) dM = \exp \left[-\frac{\beta^2}{2\sigma_T^2} \right] \quad (2-179)$$

检测概率等于

$$P_d = \int_{\gamma}^{+\infty} p(M|H_1) dM = \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{M}{\sigma_T^2} \exp \left[-\frac{M^2 + \left(\frac{AT}{2}\right)^2}{2\sigma_T^2} \right] I_0 \left[\frac{MAT}{2\sigma_T^2} \right] dM$$

利用 $z=M/\sigma_T$, 上式可化为

$$P_d = \int_{\gamma/\sigma_T}^{+\infty} z \exp \left[-\frac{z^2 + d}{2} \right] I_0(\sqrt{d}z) dz \quad (2-180)$$

该函数称为马库姆(Marcum) Q 函数, 其中 $d=2E/N_0$, $E=A^2 T/2, \sigma_T^2=N_0 T/4$ 。对于雷达系统, 由于采用奈曼-皮尔逊准则, 其检测特性可以这样求得: 给定虚警概率 P_{fa} , 由式(2-179)算出门限 γ ; 由 γ 和给定的信噪比 d , 利用式(2-180)就可算出检测概率 P_d , 也可查马库姆 Q 函数表得出 P_d 。图 2.24 给出了随机相位信号(非相干)检测系统检测特性的计算结果。将其与确知信号(即相干检测系统)的检测特性图 2.11 相比较, 发现前者略差于后者, 但在大部分区域内相差不到 1dB。非相参系统的性能之所以变坏, 是因为不知道或者未利用相位信息的缘故。值得指出: 虽然对于单个信号来说这一差别不是太大, 但是当检测多个脉冲时, 非相参接收机的性能明显变坏。这一点将在后面予以讨论。

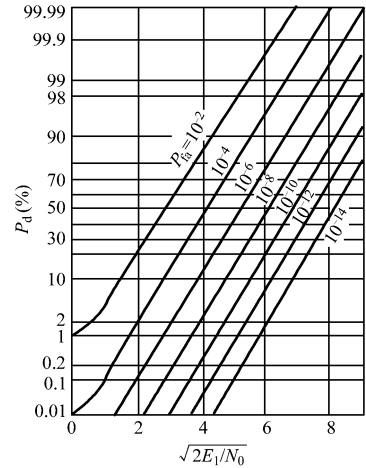


图 2.24 随机相位信号的检测特性

2.4.2 随机振幅信号的检测

由于在假设 H_0 时 $s_0(t)=0$, 故 $x(t)=n(t)$, 其中 $n(t)$ 是均值为零, 方差为 σ_n^2 的高斯噪声。在假设 H_1 时 $s_1(t)=A$, 故 $x(t)=A+n(t)$, 但这里 A 也是个高斯变量, 它的均值为 \bar{A} , 方差为 σ_A^2 。因此这属于在高斯信道中检测高斯信号的情况。 A 和 $n(t)$ 是彼此独立的。

为简单起见, 这里取一次观测样值进行检测, 因此在假设 H_0 时的似然函数可以写成

$$p(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma_n^2} \right\} \quad (2-181)$$

在假设 H_1 时的似然函数为

$$p(x|H_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, A) dA = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x|A) p(A) dA \quad (2-182)$$

式中

$$p(x|A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp \left\{ -\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2} \right\} \quad (2-183)$$

$$p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \exp\left\{-\frac{(A-\bar{A})^2}{2\sigma_A^2}\right\} \quad (2-184)$$

将它们代回式(2-182),得

$$p(x|H_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \exp\left\{-\frac{(A-\bar{A})^2}{2\sigma_A^2}\right\} dA \quad (2-185)$$

此时 Bayes 判决准则可写成

$$\Lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} \exp\left\{-\frac{A^2 - 2Ax}{2\sigma_n^2}\right\} \exp\left\{-\frac{(A^2 - 2\bar{A}A + \bar{A}^2)}{2\sigma_A^2}\right\} dA \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\geq}} \Lambda_B \quad (2-186)$$

式中, $\Lambda_B = \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})}$ 是 Bayes 门限似然比。

经过整理和变量变换后,式(2-186)左边的积分得

$$\Lambda(x) = \sqrt{\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \sigma_A^2}} \exp\left\{-\frac{\bar{A}^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_A^2)} + \frac{\sigma_A^2 x^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_A^2)\sigma_n^2} + \frac{\bar{A}x}{\sigma_n^2 + \sigma_A^2}\right\} \quad (2-187)$$

因此式(2-186)又可写成

$$-\frac{\bar{A}^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_A^2)} + \frac{\sigma_A^2 x^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_A^2)\sigma_n^2} + \frac{\bar{A}x}{\sigma_n^2 + \sigma_A^2} \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\geq}} \ln\left[\Lambda_B \sqrt{1 + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_n^2}}\right]$$

或者

$$x^2 + 2 \frac{\sigma_n^2 \bar{A}x}{\sigma_A^2} \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\geq}} \frac{\sigma_n^2 \bar{A}^2}{\sigma_A^2} + \frac{2\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \sigma_A^2)}{\sigma_A^2} \ln\left[\Lambda_B \sqrt{1 + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_n^2}}\right] \quad (2-188)$$

其中右边都是给定值,因此根据 x 值是否满足此不等式条件就可做出判决。

当 A 的均值为零时式(2-188)可简化为

$$x^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\geq}} \frac{2\sigma_n^2(\sigma_n^2 + \sigma_A^2)}{\sigma_A^2} \left[\ln\Lambda_B + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_n^2}\right) \right] \quad (2-189)$$

另外,这个问题也可按两个具有不同方差和均值的高斯噪声来处理,其中一个为均值为零、方差为 σ_n^2 的高斯过程,其概率密度示于式(2-181)。另一个可以看做是 $n(t)$ 和 $A(t)$ 两个高斯过程相加后的高斯过程,其均值 $\overline{n(t) + A(t)} = \bar{A}$, 方差为 $\sigma^2 = \sigma_n^2 + \sigma_A^2$, 因此它的概率密度为

$$p(x | H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{A})^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (2-190)$$

此时似然比可以写成

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \frac{\sigma_n}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{A})^2}{2\sigma} + \frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right\} \\ &= \frac{\sigma_n}{\sigma} \exp\left\{\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_n^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right) + \frac{\bar{A}}{\sigma^2}x - \frac{\bar{A}^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned} \quad (2-191)$$

将它代入判别不等式(2-186)后得

$$\frac{\sigma_n}{\sigma} \exp\left\{\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_n^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right) + \frac{\bar{A}}{\sigma^2}x - \frac{\bar{A}^2}{2\sigma^2}\right\} \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\geq}} \Lambda_B$$

或者

$$x^2 + \frac{2\sigma_n^2 \bar{A}x}{\sigma^2 - \sigma_n^2} \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\geq}} \frac{\sigma_n^2 \bar{A}^2}{\sigma^2 - \sigma_n^2} + \frac{2\sigma_n^2 \sigma^2}{\sigma^2 - \sigma_n^2} \ln\left[\Lambda_B \frac{\sigma}{\sigma_n}\right] \quad (2-192)$$

可见其结果与式(2-188)相同。

2.4.3 随机相位和振幅信号的检测

现在讨论信号振幅及相位都是随机的情况,它与随机相位或随机振幅的情况在概念上没有不同。此时统计检测的假设仍为

$$H_0: x(t) = n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$H_1: x(t) = s(t; A, \theta) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

被检测信号为

$$s(t; A, \theta) = A \sin(\omega t + \theta) \quad (2-193)$$

式中, 信号幅度 A 及相位 θ 都是随机参量, 它们在观测时间 $(0, T)$ 内为常数, 在各次观测中随机地取值。对于脉冲雷达回波信号而言, 两参量在脉冲持续时间内是不变的, 对于不同的脉冲则是变化的。幅度和相位的随机性是由于发射信号的起始相位、目标闪烁的反射特性和传播衰落等随机因素引起的。现假定信号相位在 $[-\pi, \pi)$ 上是均匀分布的, 振幅先验分布是瑞利的 (称为瑞利起伏), 即

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (2-194a)$$

$$p(A) = \frac{A}{A_0^2} \exp\left[-\frac{A^2}{2A_0^2}\right] \quad (A \geq 0) \quad (2-194b)$$

设角频率 ω 为已知, $n(t)$ 为零均值, 功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。并假设信号振幅的随机性与信号相位的随机性是相互统计独立的, 即 $p(A, \theta) = p(A)p(\theta)$, 下面分两个问题进行讨论。

1. 最佳检测系统结构

所讨论的问题中, H_0 是简单假设, H_1 是复合假设, 其似然比为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{\int_{\{A\}} \int_{\{\theta\}} [p(\mathbf{x}|H_1, A, \theta) p(A) p(\theta) dA d\theta]}{p(\mathbf{x}|H_0)}$$

其中, 已设幅度 A 与相位 θ 是统计独立的。直接用 2.4.1 节中的式(2-167), 有

$$\Lambda(\mathbf{x}|A) = \exp\left(-\frac{A^2 T}{2N_0}\right) I_0\left(\frac{2AM}{N_0}\right) \quad (2-195)$$

再将 $\Lambda(\mathbf{x}|A)$ 对 A 取统计平均, 求出似然比

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{x}) &= \int_{\{A\}} \Lambda(\mathbf{x}|A) p(A) dA = \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{A^2 T}{2N_0}\right] I_0\left(\frac{2AM}{N_0}\right) \frac{A}{A_0^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2A_0^2}\right) dA \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{A}{A_0^2} \exp\left[-\frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{A_0^2} + \frac{T}{N_0}\right)\right] I_0\left(\frac{2AM}{N_0}\right) dA \end{aligned} \quad (2-196)$$

利用积分公式

$$\int_0^{+\infty} t^{\mu-1} I_\nu(\alpha t) e^{-\beta^2 t^2} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^\nu}{2\beta^\nu \Gamma(\nu+1)} \exp\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right) F_1\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1, \nu+1; -\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right)$$

式中, Γ 为伽玛函数, ${}_1F_1$ 为合流超几何函数^①, 容易算出式(2-196)的积分, 结果是

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{N_0}{N_0 + TA_0^2} \exp\left[\frac{2A_0^2 M^2}{N_0(N_0 + TA_0^2)}\right] \quad (2-197)$$

利用对数似然比, 得出如下的判决规则

$$\ln \frac{N_0}{N_0 + TA_0^2} + \frac{2A_0^2 M^2}{N_0(N_0 + TA_0^2)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \Lambda_0$$

或等效为

① 函数 ${}_1F_1$ 的级数展开式为 ${}_1F_1(a, c; z) = 1 + \frac{az}{c} + \frac{a(a+1)z^2}{z! c(c+1)} + \dots$ 。

$$M \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \left\{ \frac{N_0(N_0 + TA_0^2)}{2A_0^2} \ln \left[\frac{A_0(N_0 + TA_0^2)}{N_0} \right] \right\}^{1/2} \triangleq \gamma \quad (2-198)$$

可见最佳检测系统的结构与随机相位信号检测系统是一样的,仍如图 2.19 所示,由匹配滤波器后接一包络检波器组成,所不同的只是判决门限的取值不同。对于其他形式幅度起伏信号的分析表明,其最佳检测系统均为这种结构,而与幅度 A 的先验概率分布无关。可见,检验统计量 M 提供了对于幅度 A 的一致最大势检验,即使幅度的先验分布未知,我们仍确信采用检验统计量 M 是最佳的。这一点对于雷达检测系统有实际意义,它表明对于不同幅度起伏特性的目标可用同一系统检测,只要恰当选择门限即可逼近最佳系统。

2. 检测性能

检验统计量 M 的条件分布已在 2.4.1 节中求出,采用奈曼-皮尔逊准则,则可由给定的虚警概率 P_{fa} 按式(2-179)来决定门限值 β 。现将式(2-179)重写如下

$$P_{fa} = \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{M}{\sigma_T^2} \exp\left[-\frac{M^2}{2\sigma_T^2}\right] dM = \exp\left[-\frac{\beta^2}{2\sigma_T^2}\right] \quad (2-199)$$

根据式(2-180),检测概率是 A 的函数,并可写为

$$P_d(A) = \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{M}{\sigma_T^2} \exp\left[-\frac{M^2 + \left(\frac{AT}{2}\right)^2}{2\sigma_T^2}\right] I_0\left(\frac{MAT}{2\sigma_T^2}\right) dM \quad (2-200)$$

由于已假定 A 为瑞利分布,如式(2-194)所示,则平均检测概率 P_d 为 $P_d(A)$ 对 A 取统计平均,结果为

$$P_d = \exp\left[-\frac{2\beta^2}{T(N_0 + TA_0^2)}\right] \quad (2-201)$$

对于给定的信号振幅 A ,在 $(0, T)$ 间隔内信号的能量等于 $A^2 T/2$,故信号的平均能量等于

$$\bar{E} = \int_0^{+\infty} \frac{A^2 T}{2} \frac{A}{A_0^2} \exp\left[-\frac{A^2}{2A_0^2}\right] dA = A_0^2 T \quad (2-202)$$

将此式代入式(2-201),得

$$P_d = \exp\left[-\frac{2\beta^2}{T(N_0 + \bar{E})}\right] \quad (2-203)$$

由式(2-199)、式(2-203)及 $\sigma_T^2 = N_0 T/4$,最后导出如下关系式

$$P_d = \left\{ \exp\left[-\frac{\gamma^2}{2\sigma_T^2}\right] \right\}^{1/(1+\frac{\bar{E}}{N_0})} = P_{fa}^{1/(1+\frac{\bar{E}}{N_0})} \quad (2-204)$$

由式(2-204)可以画出以虚警概率为参变量、检测概率 P_d 随信噪比变化的曲线,即检测特性曲线,如图 2.25 所示。图中还用虚线绘出了只有相位随机的情况。二者相比,可见在大信噪比条件下,振幅瑞利起伏会引起检测概率的降低。而在低信噪比情况下则相反,振幅起伏使检测概率有所提高。

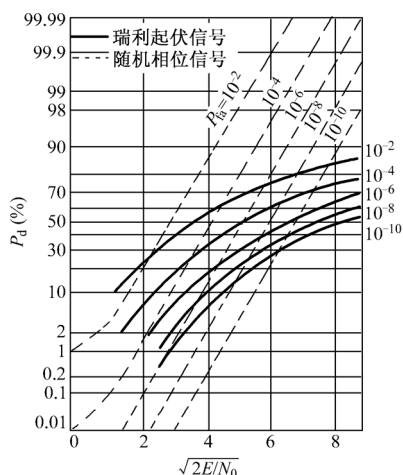


图 2.25 随机相位与
振幅信号的检测

2.4.4 随机频率信号的检测

信号中还有一个重要的参量是频率。频率随机的情况在雷达中是常见的。例如,如果目

标的径向速度是未知的,那么回波信号的多普勒频率也是未知的。与前面相似,只考虑二元信号的情况,假设

$$H_0: x(t) = n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$H_1: x(t) = A \sin(\omega t + \theta) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

假定噪声是高斯白噪声,信号振幅及到达时间已知,但相位 θ 为在 $(-\pi, \pi)$ 上均匀分布的随机变量,频率也是随机变量,其先验密度函数为 $p(\omega)$, $\omega_l \leq \omega \leq \omega_h$ 。

直接用式(2-167)可以得到以 ω 为条件的似然比

$$\Lambda(\mathbf{x}|\omega) = \exp\left[-\frac{A^2 T}{2N_0}\right] I_0\left(\frac{2AM}{N_0}\right) = \exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] I_0\left(\frac{2AM}{N_0}\right) \quad (2-205)$$

式中, $E = A^2 T/2$, 并且

$$M^2 = \left[\int_0^T x(t) \sin \omega t dt\right]^2 + \left[\int_0^T x(t) \cos \omega t dt\right]^2$$

将式(2-205)对 ω 求绝对平均,得平均似然比为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \int_{\{\omega\}} \Lambda(\mathbf{x}|\omega) p(\omega) d\omega \quad (2-206)$$

要求出这样的积分是不容易的,但可以用间隔任意小的离散密度函数来代替概率密度函数 $p(\omega)$,从而用近似的求和来代替积分。令

$$p(\omega) = \sum_{i=1}^m P(\omega_i) \delta(\omega - \omega_i)$$

选择适当的频率增量 $\Delta\omega$,则某一特定频率 ω_i 的出现概率为

$$P(\omega_i) = p(\omega_i) \Delta\omega$$

式中

$$m = (\omega_h - \omega_l) / \Delta\omega, \quad \omega_i = \omega_l + i\Delta\omega \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

于是式(2-206)变为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \Lambda(\mathbf{x}|\omega_i) P(\omega_i) = \sum_{i=1}^m \exp\left(-\frac{E}{N_0}\right) I_0\left(\frac{2AM_i}{N_0}\right) P(\omega_i) \quad (2-207)$$

图 2.26 示出了这种最佳接收机的构成框图,它的前面部分非常像实际中用的频谱分析仪。

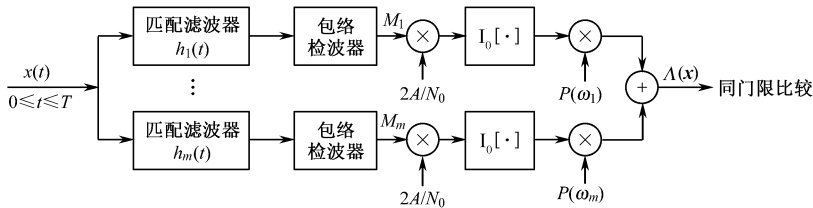


图 2.26 频率随机振幅恒定信号的最佳接收机

图中各匹配滤波器的冲激响应是

$$h_i(t) = \sin \omega_i (T - t) \quad (i = 1, 2, \dots, m; 0 \leq t \leq T)$$

对于小信噪比,贝塞尔函数可以近似为

$$I_0\left(\frac{2AM_i}{N_0}\right) \approx 1 + \left(\frac{AM_i}{N_0}\right)^2 \quad (2-208)$$

采用该式并假定频率的先验分布是均匀分布,即 $P(\omega_i) = 1/m$,则此时似然比为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \exp\left(-\frac{A^2 T}{2N_0}\right) \left[1 + \left(\frac{AM_i}{N_0}\right)^2\right] \quad (2-209)$$

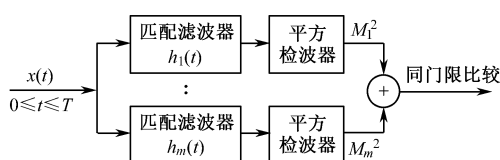


图 2.27 小信噪比及频率的先验分布
为均匀分布时的近似最佳接收机

因而判决规则可以表示为

$$\sum_i M_i^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0 \quad (2-210)$$

式中, Λ_0 是门限。这种情况的接收机示于图 2.27,要是没有输出求和,它就类似于一个带有平方检波器的频谱分析仪。

以上所述,为信号振幅已知的情况。下面讨论振幅为瑞利起伏的情况。对于这种情况我们做出和前面相同的假定,只是振幅 A 除外,它在任一次观测中在区间 $(0, T)$ 内是固定的,但对不同的观测则随机起伏,其分布密度为瑞利分布

$$p(A) = \frac{A}{A_0^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2A_0^2}\right)$$

于是,由式(2-197),令 $\epsilon = A_0^2 T / N_0 = \bar{E} / N_0$ 有

$$\Lambda(\mathbf{x}|\omega) = \frac{1}{1+\epsilon} \exp\left[\frac{[2A_0^2/N_0^2]M^2}{1+\epsilon}\right] \quad (2-211)$$

同前面一样

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \int_{\{\omega\}} \Lambda(\mathbf{x}|\omega) p(\omega) d\omega$$

仍用离散形式对频率的连续密度函数做近似,得到

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{1+\epsilon} \sum_{i=1}^m P(\omega_i) \exp\left[\frac{[2A_0^2/N_0^2]M_i^2}{1+\epsilon}\right] \quad (2-212)$$

这可以用图 2.28 来实现,这一接收机与振幅恒定情况下的图 2.26 十分相似。

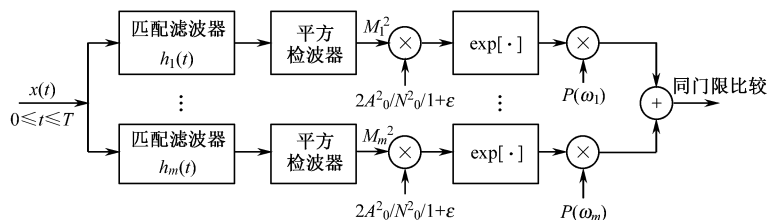


图 2.28 频率随机,振幅为瑞利起伏信号的最佳接收机

研究这一最佳接收机近似形式很有启发性。为此,我们先研究只有两个等概率频率信号的检测问题。此时式(2-212)变为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{1+\epsilon} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \exp\left[\frac{(2A_0^2/N_0^2)M_i^2}{(1+\epsilon)}\right] \quad (2-213)$$

判决规则为

$$\frac{1}{2(1+\epsilon)} \sum_{i=1}^2 \exp\left[\left(\frac{2A_0^2}{N_0^2}\right) \frac{M_i^2}{(1+\epsilon)}\right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0 \quad (2-214)$$

即

$$\exp\left[\left(\frac{2A_0^2}{N_0^2}\right) \frac{M_1^2}{(1+\epsilon)}\right] + \exp\left[\left(\frac{2A_0^2}{N_0^2}\right) \frac{M_2^2}{(1+\epsilon)}\right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 2(1+\epsilon) \Lambda_0 \triangleq \beta \quad (2-215)$$

上式可写成

$$e^{Q_1^2} + e^{Q_2^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \beta \quad (2-216)$$

式中

$$Q_i = [(2A_0^2/N_0^2)/(1+\epsilon)]^{1/2} \cdot M_i \quad (i=1,2) \quad (2-217)$$

对三种不同门限值 β , 用 Q_1 和 Q_2 表示的判决区域示于图 2.29。图中的 Q_2 是根据式(2-216),

对给定 β 值,代入不同的 Q_1 值计算得出的。由图可见,当门限 β 较高时,判决区域接近正方形。因而,我们可以把此正方形作为判决边界,只要 Q_1 或 Q_2 中之一超过 $\beta_Q = \sqrt{\ln(\beta-1)}$,就判 H_1 为真^①。于是判决规则为

$$\max\{Q_1, Q_2\} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \beta_Q$$

式中, $\max\{Q_1, Q_2\}$ 表示在 Q_1 和 Q_2 中选择最大者。又因 Q_i 正比于 M_i ,故判决规则可写为

$$\max\{M_1, M_2\} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \beta_M \quad (2-218)$$

其中 β_M 是用 M_i 作为判决时的门限。上述结果可以推广到 m 个频率,所以最佳接收机的近似形式是 m 个匹配滤波器和包络检波器的组合,并选择最大者与门限 β_M 进行比较。如图 2.30 所示。相应的判决规则为

$$\max\{M_1, M_2, \dots, M_m\} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \beta_M$$

上述处理随机频率信号的方法,属于复合假设检验问题,这种方法不去辨认信号的实际频率值。然而对图 2.30 所示的 m 个频率接收机来说,实际上可以判定信号的频率,因为我们考察了每个滤波器的检波输出。

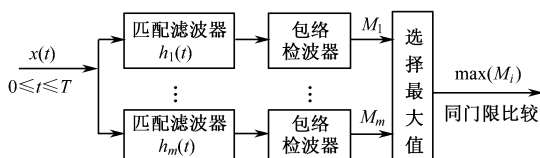


图 2.30 图 2.28 最佳接收机的近似形式

下面介绍处理随机频率信号的另一种方法,即多元信号检测方法。这种方法既能检测信号,又能识别其频率。

设信号频率具有 m 个可能值之一(如果频率是连续随机变量,则可用刚才所说的方法将它离散化),对每个离散频率 ω_i 安排一个假设 H_i ,即

$$\left. \begin{aligned} H_0 : x(t) &= n(t) \\ H_1 : x(t) &= A \sin(\omega_1 t + \theta_1) + n(t) \\ &\vdots \\ H_m : x(t) &= A \sin(\omega_m t + \theta_m) + n(t) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2-219)$$

假定各假设下相位在 $(-\pi, \pi)$ 上是均匀分布的。为简单起见,又设各频率等概率出现,因而 $P(\omega_i) = 1/m$ 。对于固定振幅的情况,第 i 个假设与零假设的似然比由式(2-167)给出:

$$\Lambda_i = \frac{p_i(\mathbf{x})}{p_0(\mathbf{x})} = \exp\left(-\frac{E}{N_0}\right) I_0\left(\frac{2AM_i}{N_0}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2-220)$$

式中 $E = A^2 T/2$ 。如果这些 Λ_i 值没有一个大于门限,就判 H_0 为真,否则判对应于最大 Λ_i 的

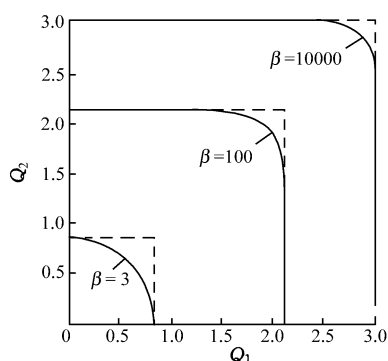


图 2.29 检测随机频率信号的判决区域:最佳判决区域由实线划分,近似判决区域由虚线划分

① 令式(2-216)中 $Q_1 = 0$,即得此式。

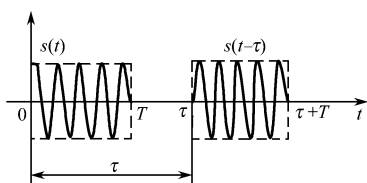


图 2.31 信号 $s(t)$ 及其延迟

假设 H_i 为真。由于 Δ_i 与 M_i 具有单调函数关系,故可直接用 M_i 作为检验统计量,这时判决规则可以表述为:若最大的 M_i 超过门限,则选择 H_i ,否则选择 H_0 。完成这一功能的结构正好与图 2.30 所示的系统相同。因此,所有频率等概率出现时的多元信号检测最佳接收机,与所有频率的信号组成一个复合假设时的二元检测近似与最佳接收机相同。对于

起伏信号也可以得到同样的结果。

2.4.5 随机到达时间信号的检测

随机到达时间信号如图 2.28 所示,这时可做出以下的假设:

$$H_0: x(t) = n(t) \quad \tau \leq t \leq \tau + T$$

$$H_1: x(t) = s(t - \tau) + n(t) \quad \tau \leq t \leq \tau + T$$

式中,噪声 $n(t)$ 是均值为零的加性高斯白噪声,信号 $s(t) = A \sin(\omega t + \theta)$, $(0 \leq t \leq T)$; A, ω 为常数, θ 是在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量,到达时间 τ 的概率密度 $p(\tau)$ 均匀分布在 $0 \leq \tau \leq \tau_m$ 。利用简单二元均匀分布的随机相位信号的结果,得 τ 给定条件下的似然比为

$$\Lambda(x | \tau) = \exp\left(-\frac{E}{N_0}\right) I_0\left[\frac{2AM(\tau + T)}{N_0}\right]$$

式中 $E = A^2 T/2$, 而

$$M^2(\tau + T) = \left[\int_{\tau}^{\tau+T} x(t) \sin \omega(t - \tau) dt \right]^2 + \left[\int_{\tau}^{\tau+T} x(t) \cos \omega(t - \tau) dt \right]^2 \quad (2-221a)$$

将式(2-221a)对 τ 求统计平均,则得平均似然比为

$$\Lambda(x) = \int_0^{\tau_m} \Lambda(x | \tau) p(\tau) d\tau = \int_0^{\tau_m} \exp\left(-\frac{E}{N_0}\right) I_0\left[\frac{2A}{N_0} M(\tau + T)\right] p(\tau) d\tau \quad (2-221b)$$

与随机频率信号相似,也可以把到达时间 τ 在 $(0, \tau_m)$ 范围内量化为一组等概率的离散时延 $\tau_i (i=1, 2, \dots, m)$; $P(\tau_i) = 1/m$ 。于是式(2-221a)变为

$$\Lambda(x) = \sum_{i=1}^m \exp\left(-\frac{E}{N_0}\right) I_0\left(\frac{2AM(\tau_i + T)}{N_0}\right) P(\tau_i) \quad (2-222)$$

考虑到 $\exp(-E/N_0) \cdot P(\tau_i)$ 为一常数,可以移入门限中,因此最佳接收机可以如图 2.32 那样构成。再考虑到 I_0 是其宗量的单调函数,接收机结构可以进一步简化,如图 2.33 所示。此时,接收机算出 $M(\tau_i + T)$ 的最大值,并根据它超过门限与否来决定选择假设 H_0 或 H_1 。

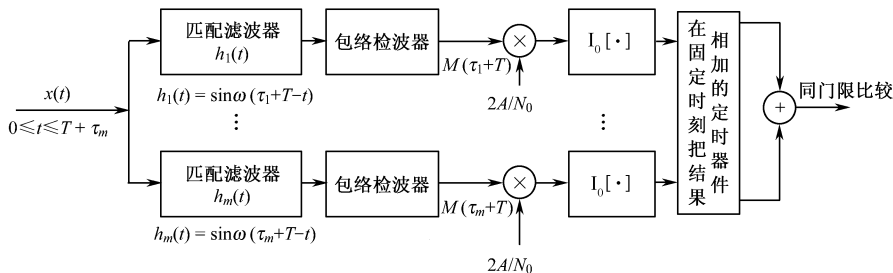


图 2.32 检测离散到达时间信号最佳接收机的一种实现方法

我们也可以采用多元信号检测的方法来确定信号是否存在,并识别它的到达时间。此时假设是

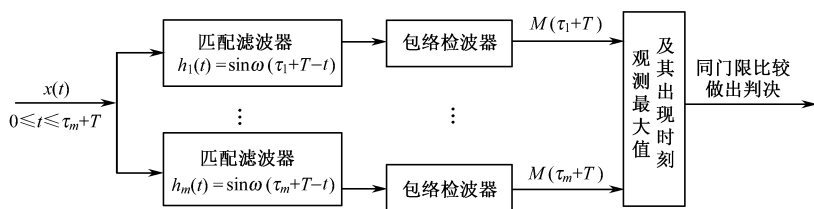


图 2.33 图 2.28 接收机的简化形式

$$\left. \begin{aligned} H_0 : x(t) &= n(t) \\ H_1 : x(t) &= s(t - \tau_1) + n(t) \\ &\vdots \\ H_m : x(t) &= s(t - \tau_m) + n(t) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t \leq \tau_m + T) \quad (2-223)$$

对于信号 $s(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ ($0 \leq t \leq T$) 和等概率到达时间的情况,接收机可以这样实现:选择非相干匹配滤波器输出 $M(\tau_i + T)$ 的最大值,然后将该值同门限比较,如果小于门限则选择 H_0 ,否则选择对应于 $M(\tau_i + T)$ 最大值的假设 H_i 。显然此时最佳接收机结构与图 2.30 完全相同。

考虑到匹配滤波器对于时延信号具有适应性(即如果滤波器对某一信号是匹配的,则它对该信号的延迟信号仍然匹配),如果信号到达时间划分得很精细,并且依然保持均匀,则图 2.34 所示的多路系统可用图 2.34 的单路系统实现。对于瑞利起伏信号也可以做同样的处理。这正是一般雷达系统测量目标回波到达时间的典型框图。

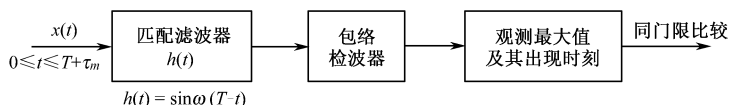


图 2.34 既检测信号又估计其到达时间的最佳接收机

2.5 信号的多脉冲检测

以上各节都是假定在观测时间间隔 $(0, T)$ 内,接收机收到的是单个的信号或单个的脉冲。但在实际应用中,接收机收到的脉冲往往不止一个而是多个。雷达接收机就是一个典型的例子。为了探测目标,雷达发射机按一定重复频率发射一串脉冲,接收机在收到目标反射回来的全部脉冲后才进行判决。天线环扫时,回波脉冲数 m 按下式计算

$$m = (\theta_{0.5} \cdot f_r) / \Omega \quad (2-224)$$

式中, $\theta_{0.5}$ 是天线半功率波束宽度($^\circ$); Ω 是天线扫描速度($^\circ/\text{s}$); f_r 是脉冲重复频率(Hz)。举一个数值例子:设 $\theta_{0.5} = 2^\circ$, $\Omega = 60^\circ/\text{s}$, $f_r = 300\text{Hz}$,则由上式算得 $m = 10$ 。即在这种情况下,接收机顺序收到 10 个脉冲。

在接收机利用多个脉冲进行判决的情况下,可以预期检测性能将得到改善。因为一般来说,各个脉冲携带着同样的信息;我们或者认为各个脉冲全都含有目标反射的信号,或者认为全都只含有噪声。这样,每个脉冲都包含有目标是否存在的信息,而每个脉冲所混杂的噪声,可以认为是相互统计独立的,当我们把这些回波脉冲按某种方式进行“积累”时,噪声平均功率由于其统计独立性将增加得不多,而信号功率则可能增加很多,因此我们预期利用信号积累可以增大信噪比。

在雷达情况下,接收机收到的多个脉冲称为回波脉冲串。脉冲串可以是确知的,也可能具有未知的随机参量。这两种情况我们都将讨论。

通信系统也有类似的情形。例如,通信系统中常采用分集技术来改善检测性能,分集技术与多脉冲检测有类似之点。

2.5.1 确知脉冲串信号的检测

当脉冲串信号 $s(t)$ 的波形及所有参量都已知时,该脉冲串信号称为确知脉冲串信号,这时未知的和应当确定的仅仅是脉冲串信号本身是否存在这一事实。显然要使脉冲串 $s(t)$ 为确知,不仅应当使 $s(t)$ 是相干的(即各子脉冲间的相对相位为已知),而且还必须已知脉冲串中每一脉冲的全部参量,比如已知振幅、载波频率、初相、出现时间、脉冲宽度等。

确知脉冲是确知信号的一种特殊情况,前面讨论过的检测确知信号的方法可以直接引用。但为了说明处理多脉冲检测问题的方法,本节详细考虑如下问题:一部雷达依次发射许多脉冲,在接收机处,我们收到含有 m 个脉冲组成的脉冲串。设每个脉冲的持续期均为 T ,脉冲串各子脉冲的样本函数为 $s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)$ 。若对每个脉冲抽样 n 次,则 $s_i(t)$ 是 n 维矢量。加性噪声仍设为高斯白噪声,其功率谱密度为 $N_0/2$,噪声的样本函数记为 $n_1(t), n_2(t), \dots, n_m(t)$ 。再假定各接收波形样本 $x_i(t) = s_i(t) + n_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, m$) 是统计独立的,要求根据这 m 个接收波形样本做出判决以确定目标是否存在。此时假设是:

H_0 : $x_i(t)$ 仅由噪声组成,即 $s_i(t) = 0$;

H_1 : $x_i(t)$ 含有信号和噪声,即 $s_i(t) \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, m$)。

对单脉冲检测方法加以推广,得似然比为

$$\Lambda(\mathbf{x}) \triangleq \frac{p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m / H_1)}{p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m / H_0)} \quad (2-225)$$

因为已假定各接收样本统计独立,故

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}_1 / H_1) \cdots p(\mathbf{x}_m / H_1)}{p(\mathbf{x}_1 / H_0) \cdots p(\mathbf{x}_m / H_0)} = \prod_{i=1}^m \frac{p(\mathbf{x}_i / H_1)}{p(\mathbf{x}_i / H_0)} = \prod_{i=1}^m \Lambda(\mathbf{x}_i) \quad (2-226)$$

式中, $\prod_{i=1}^m$ 表示 m 项连乘, $\Lambda(\mathbf{x}_i)$ 表示第 i 个脉冲的似然比。可见 m 个统计独立脉冲的似然比等于各个脉冲似然比之积。

容易看出第 i 个脉冲的似然函数是

$$p(\mathbf{x}_i / H_1) = F \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x_i(t) - s_i(t)]^2 dt \right\} \quad (2-227)$$

及

$$p(\mathbf{x}_i / H_0) = F \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T x_i^2(t) dt \right] \quad (2-228)$$

故第 i 个脉冲的似然比是

$$\Lambda_i(\mathbf{x}) = \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T s_i^2(t) dt \right] \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x_i(t) s_i(t) dt \right]$$

总似然比变为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^m \exp \left(-\frac{E_i}{N_0} \right) \prod_{i=1}^m \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x_i(t) s_i(t) dt \right] \quad (2-229)$$

式中, E_i 是第 i 个脉冲信号的能量

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt$$

利用对数似然比,判决规则为

$$-\left(\frac{1}{N_0}\right) \sum_{i=1}^m E_i + \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^m \int_0^T x_i(t) s_i(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \Lambda_0 \quad (2-230)$$

$\ln \Lambda_0$ 为门限, 由所选用的准则而定。重新排列这个不等式, 变成如下规则

$$\sum_{i=1}^m \int_0^T x_i(t) s_i(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{1}{2} N_0 \ln \Lambda_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i \triangleq \beta \quad (2-231)$$

由此可见, 最佳接收机结构和单个确知脉冲的情况相似, 只不过这里有 m 路相关器, 将这 m 路的输出相加起来同门限比较。实现这种接收机的一种方案如图 2.35 所示。但需注意, m 个接收信号的出现时间无论在式(2-231)还是在图 2.34 中都没有明确说明。如果各脉冲顺序出现, 那么在求和之前必须对这些信号加上相位的延时, 这可用存储器或按脉冲重复周期 T_r 依次抽头的抽头延迟线来实现。

【例 2.4】抽头延迟线积累器。

由熟知的相关器与匹配滤波器的等效性, 式(2-231)中的 m 路相关器均可用匹配滤波器代替。对于脉冲串信号, 如果 $s_i(t) = s_1[t - (i-1)T_r]$, m 路匹配滤波器又可合为一匹配滤波器, 该滤波器输出经抽头延迟线适当延迟后求和(或称为积累), 即可实现式(2-231)所示的运算。抽头延迟线积累器框图如图 2.36 所示。

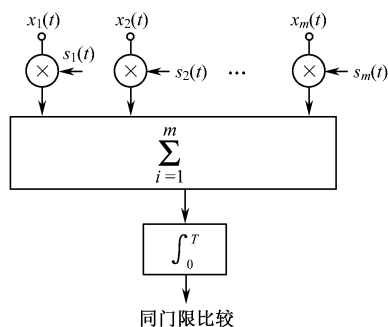


图 2.35 高斯白噪声中确知脉冲串信号的相关接收机(注意: 该图已将式(2-231)左端的积分与求和互换)

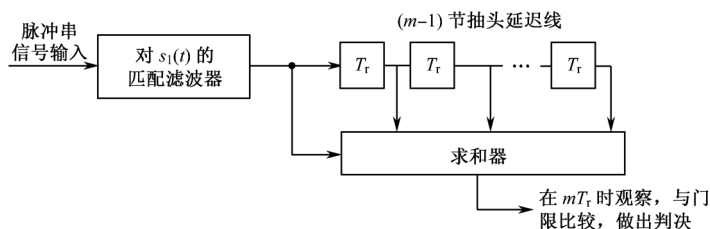


图 2.36 抽头延迟线积累器框图

下面计算图 2.35 所示的最佳接收机的性能。

由式(2-231)容易看出, 将下式作为检验统计量是方便的

$$G = \sum_{i=1}^m \int_0^T x_i(t) s_i(t) dt \quad (2-232)$$

因为已经假定脉冲串信号为确知, 噪声是统计独立的高斯白噪声, 故检验统计量 G 服从高斯分布。显然, 假设 H_0 下的均值 $E_0\{G\} = 0$, 假设 H_1 下的均值

$$E_1\{G\} = \sum_{i=1}^m E_i = E$$

E 为脉冲串的能量。两个假设下方差相等且等于

$$\text{Var}\{G\} = \sum_{i=1}^m N_0 E_i / 2 = N_0 E / 2$$

于是, 虚警概率为

$$P_{fa} = \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{(\pi N_0 E)^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{N_0 E}\right] dx = \operatorname{erfc}\left[\beta \sqrt{\frac{2}{N_0 E}}\right] \quad (2-233)$$

检测概率为

$$P_d = \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{(\pi N_0 E)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-E)^2}{N_0 E}\right] dx = \operatorname{erfc}\left[\beta \sqrt{\frac{2}{N_0 E}} - \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right] \quad (2-234)$$

可见,这些结果与式(2-82)和式(2-83)完全相同,因而仍可使用图 2.11 的曲线。对于所有脉冲能量都相等的特殊情况,有 $E/N_0 = mE_i/N_0$ 。因此,回波脉冲串内信号数目增加一倍,检测性能就有 3dB 改善。这正是脉冲雷达系统中要重复发射多个相干脉冲的原因。对确知脉冲串(相位相干脉冲串)的积累又称为相干积累。

2.5.2 随机相位脉冲串(非相参脉冲串)信号的检测

随机参量脉冲串信号可以是多种多样的,譬如各个脉冲的幅度、初相、载波频率、出现时刻和脉冲宽度等参量都可能是随机的。这里我们讨论一种最常见的情况——每个脉冲除相位是随机的以外,其他参量都是已知的。非相参脉冲雷达从固定点目标反射回来的回波脉冲串信号就是如此。

这里面临的仍然是二元复合假设检验问题,即根据观测波形 $x(t)$ 对下面两个假设 H_0 和 H_1 进行检验,即

$$H_0: x_i(t) = n_i(t)$$

$$H_1: x_i(t) = A \sin(\omega t + \theta_i) + n_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

式中, $n_i(t)$ 是均值为零、功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声;信号振幅 A 和频率 ω 是常数; θ_i 为 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布的统计独立随机变量,每个脉冲持续期为 T 。由式(2-167)可知,第 i 个脉冲的似然比为

$$\Lambda_i(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{A^2 T}{2N_0}\right) I_0\left(\frac{2AM_i}{N_0}\right)$$

根据式(2-164),有

$$M_i = \left\{ \left[\int_0^T x_i(t) \sin \omega t dt \right]^2 + \left[\int_0^T x_i(t) \cos \omega t dt \right]^2 \right\}^{1/2}$$

因假定 m 个脉冲统计独立,则总似然比为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^m \Lambda_i(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{mA^2 T}{2N_0}\right) \prod_{i=1}^m I_0\left(\frac{2AM_i}{N_0}\right) \quad (2-235)$$

利用对数似然比,判决规则为

$$-\frac{mA^2 T}{2N_0} + \sum_{i=1}^m \ln I_0\left(\frac{2AM_i}{N_0}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \Lambda_0$$

即

$$\sum_{i=1}^m \ln I_0\left(\frac{2AM_i}{N_0}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \Lambda_0 + \frac{mA^2 T}{2N_0} \triangleq \beta \quad (2-236)$$

式(2-236)描述的似然比接收机如图 2.37 所示。对每个脉冲而言,接收机算出 $\ln I_0(2AM_i/N_0)$, 其中 M_i 可由冲激响应为 $h(t) = \sin \omega(T-t)$ 的匹配滤波器后接一包络检波器得出。显然这种接收机比较复杂,特别是要用实现 $\ln I_0(\cdot)$ 运算的器件。但是对于不同的具体情况,可以做一些近似后简化实现。

对于小信噪比,近似有

$$I_0\left(\frac{2AM_i}{N_0}\right) \approx 1 + \left[\frac{AM_i}{N_0}\right]^2$$

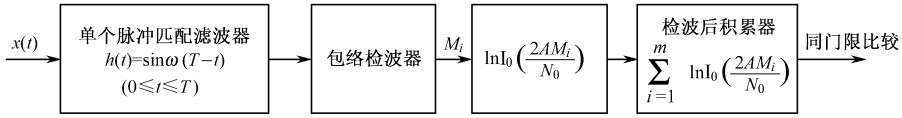


图 2.37 随机相位脉冲串信号的最佳接收机

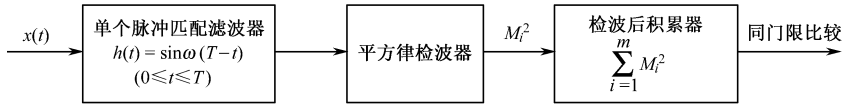
于是

$$\ln I_0\left(\frac{2AM_i}{N_0}\right) \approx \ln\left[1 + \left(\frac{AM_i}{N_0}\right)^2\right] \approx \left(\frac{AM_i}{N_0}\right)^2$$

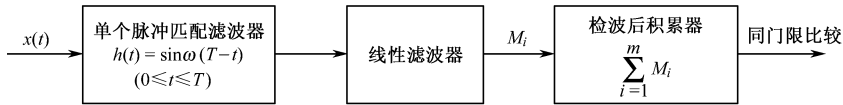
将上式代入式(2-236),得到如下判决规则:

$$\sum_{i=1}^m M_i^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \left(\frac{N_0^2}{A^2}\right)\beta \quad (2-237)$$

这样,在小信噪比情况下,最佳接收机可以用单个脉冲匹配滤波器,平方律检波器和积累器来近似实现,如图 2.38(a)所示。在雷达中,检波器的输出称为“视频”,因此,在检波器输出端对信号求和,称为视频积累或检波后积累。检波后积累没有利用各脉冲间的相位信息,亦称为非相干积累。



(a) 小信噪比情况



(b) 大信噪比情况

图 2.38 随机相位脉冲串信号最佳接收机的近似形式

对于大信噪比,近似有

$$I_0\left(\frac{2AM_i}{N_0}\right) \approx \frac{\exp(2AM_i/N_0)}{(4\pi AM_i/N_0)^{1/2}}$$

故

$$\ln I_0\left(\frac{2AM_i}{N_0}\right) \approx \frac{2AM_i}{N_0} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4\pi AM_i}{N_0}\right) \approx \frac{2AM_i}{N_0}$$

此时,判决规则为

$$\sum_{i=1}^m M_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{N_0}{2A}\beta \quad (2-238)$$

大信噪比情况下的近似最佳接收机如图 2.36(b)所示。与小信噪比情况不同,图 2.36(b)中采用线性检波器,其输出正比于输入的包络。

关于非相干脉冲串的检测性能,我们不做详细讨论,仅扼要指出其思路。显然,对于线性检波器,应以 $G = \sum_{i=1}^m M_i$ 作为检验统计量;而对于平方律检波器,则应以 $G = \sum_{i=1}^m M_i^2$ 作为检验统计量。因此,根据 M_i 的分布,可求出 G 的分布,再根据 G 的分布,最后求出虚警概率和检测概率。可以证明,线性检波器和平方律检波器两者的性能相差甚微,但在理论分析上,平方律检波器较之线性检波器易于处理。

1. 线性检波器

此时检验统计量 $G = \sum_{i=1}^m M_i$ 。有信号时 M_i 是莱斯分布[见式(2-177)], 无信号时 M_i 是瑞利分布[见式(2-178)]。由于数学上尚未找到莱斯分布、瑞利分布之和的分布的严格形式, 一般用格拉姆-查理(Gram-Charlier)级数来近似求解。所谓格拉姆-查理级数就是用高斯密度函数及其导数及所逼近的概率密度函数的各阶矩组成一个级数, 来对该概率密度函数作近似。用这个级数近似地表示出 G 的分布, 便可确定其检测性能。详细讨论可参看参考文献[5], 这里不再详述。

2. 平方律检波器

此时检验统计量是 $G = \sum_{i=1}^m M_i^2$, 其归一化统计量为

$$B = \sum_{i=1}^m (M_i^2 / \sigma_T^2) \quad (2-239)$$

式中 $\sigma_T^2 = N_0 T / 4$, $M_i^2 = M_{li}^2 + M_{Qi}^2$

当信号存在时, B 为 $2m$ 个自由度的非中心 χ^2 分布, 即

$$p(B|H_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{v} \right)^{\frac{m-1}{2}} \exp \left[-\frac{B}{2} - \frac{v}{2} \right] I_{m-1} [(Bv)^{1/2}] \quad (2-240)$$

式中, 非中心参量 v 为

$$v = \frac{mA^2 T^2}{4\sigma_T^2} = \frac{2mE_i}{N_0} \textcircled{1} = \frac{2E}{N_0} \quad (2-241)$$

当信号不存在时, B 为 $2m$ 个自由度的中心 χ^2 分布, 即

$$p(B|H_0) = \frac{1}{2^m \Gamma(m)} B^{m-1} e^{-\frac{B}{2}} \quad (2-242)$$

当检测门限是 G_T 时, 虚警概率为

$$P_{fa} = 1 - \int_0^{G_T} \frac{B^{m-1} e^{-\frac{B}{2}}}{2^m \Gamma(m)} dB = 1 - I \left(\frac{G_T}{2m^{1/2}}, m-1 \right) \quad (2-243)$$

式中, $I \left(\frac{G_T}{2m^{1/2}}, m-1 \right)$ 是不完全 Γ 函数的皮尔逊形式, 参考文献[10]中有其图表可查。而检测概率为

$$P_d = \int_{G_T}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{B}{v} \right)^{\frac{m-1}{2}} \exp \left(-\frac{B}{2} - \frac{v}{2} \right) I_{m-1} [(Bv)^{1/2}] dB = Q_m \left[\left(\frac{2mE_i}{N_0} \right)^{1/2}, G_T^{1/2} \right] \quad (2-244)$$

式中, $Q_m(\alpha, \beta)$ 称为广义马库姆 Q 函数, 它等于 1 减去 $2m$ 个自由度非中心 χ^2 分布的累积分布函数。参考文献[11]中有其图表可查。

由式(2-243), 当给定脉冲积累数 m 和虚警概率 P_{fa} 后, 便可求出门限值 G_T , 再根据式(2-244), 由给定的单个脉冲信噪比 E_i/N_0 , 脉冲积累数 m 及已得到的门限值 G_T , 便能求出检测概率 P_d 。参考文献[2]给出了不同 $m, E/N_0$ 时 P_d 与 P_{fd} 的大量曲线可供查用。

图 2.39 给出了非相参射频脉冲串的检测性能。为了比较, 也给出了相参射频脉冲串的检测性能。由曲线可见, 对于相参射频脉冲串信号, 相参积累获得的信噪比改善与积累的脉冲数

① $E_i = \frac{A^2 T}{2}$, 表示单个脉冲的能量, 脉冲串总能量 $E = \sum_{i=1}^m E_i = mE_i$ 。

成正比。当 m 从 1 增到 100 时,在同样检测性能条件下,所需要的单个脉冲信噪比减少到 $1/100$ (即 $1/m$),即 -20dB 。而对于非相参积累,其性能要比相参积累差一些,特别是在单个脉冲信噪比很小时(这正是需要设法提高检测性能的情况)与相参积累差距更大。非相参积累对信噪比的改善几乎与积累脉冲数的平方根成正比。

当然,以上所述均指 m 次观测中噪声样本统计独立的情况,若不是统计独立,则积累效果变差。

以上讨论的是相位随机(均匀分布),振幅已知且恒定的脉冲串信号,如果各脉冲振幅已知但不相等,即信号是

$$s_i(t) = A_i \sin(\omega t + \theta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

式中, A_i 已知但不相等,此时 m 个脉冲的似然比是

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \exp\left[-\sum_{i=1}^m \frac{A_i^2 T}{2N_0}\right] \prod_{i=1}^m I_0\left(\frac{2A_i M_i}{N_0}\right) \quad (2-245)$$

与式(2-235)比较,可知接收机结构仍如图 2.33 所示,但是各包络样本 M_i 应按各自振幅 A_i 加权。在雷达情况下,雷达回波信号的振幅受天线波瓣调制,因而其最佳接收机应对回波脉冲按天线方向图加权积累。

2.5.3 随机振幅随机相位脉冲串信号的检测

我们将上述振幅不等的情况加以推广,认为信号中各脉冲的振幅 A_i 为瑞利分布的统计独立随机变量:

$$p(A_i) = \frac{A_i}{A_0^2} \exp\left[-\frac{A_i^2}{2A_0^2}\right] \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

注意,这里假定各脉冲为矩形脉冲,脉冲内幅度不起伏,脉间幅度独立起伏,有的作者称为慢衰落,相位仍在 $(0, 2\pi)$ 内均匀分布。

由式(2-197),似然比为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^m \frac{N_0}{N_0 + TA_0^2} \exp\left[\frac{2A_0^2 M_i^2}{N_0(N_0 + TA_0^2)}\right] \quad (2-246)$$

判决规则为

$$\sum_{i=1}^m M_i^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \beta$$

所以最佳接收机结构与图 2.36(a) 相同。请注意,图 2.36(a) 对慢衰落信号是最佳的,而对固定振幅信号则是最佳接收机的一种近似形式。

为了确定接收机检测性能,我们仍利用归一化统计量

$$B = \sum_{i=1}^m (M_i^2 / \sigma_T^2)$$

于是虚警概率 P_{fa} 表示式应与式(2-243)相同。对于给定的 v (注意 v 是振幅 A_i 的函数,而 A_i

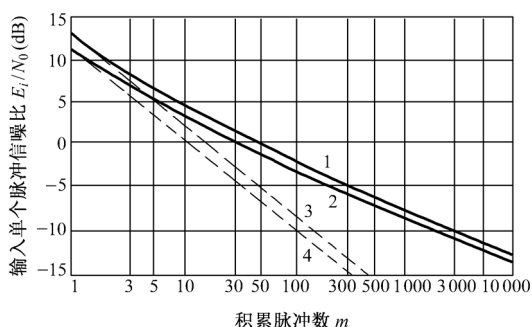


图 2.39 等幅辐射频脉冲串的检测性能

- ① 非相干检测: $P_d=0.80, P_{fa}=10^{-6}$;
- ② 非相干检测: $P_d=0.50, P_{fa}=10^{-6}$;
- ③ 相干检测: $P_d=0.80, P_{fa}=10^{-6}$;
- ④ 相干检测: $P_d=0.50, P_{fa}=10^{-6}$

是随机变量,故 v 也是随机变量),检测概率由式(2-244)给出

$$P_d(v) = \int_{G_T}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{B}{v} \right)^{\frac{m-1}{2}} \exp \left[-\frac{B}{2}, -\frac{v}{2} \right] I_{m-1} [(Bv)^{1/2}] dB$$

再用 v 的概率分布对 $P_d(v)$ 求平均,即得所需的检测概率,此处省去计算细节,其结果为

$$P_d = 1 - \int_0^{G_T/2(1+\epsilon)} \frac{z^{m-1} e^{-z}}{\Gamma(m)} dz \quad (2-247)$$

式中, $\epsilon = A_0^2 T / N_0$ 是单个脉冲信号的平均能量与噪声谱密度之比。参考文献[1]列出了不同 m 值和不同平均信噪比时 P_d 随 P_{fa} 变化的曲线。

雷达工作时经常遇到幅度起伏的非相干脉冲串。复杂目标(如飞机)是由许多反射单元所组成的,目标的运动等将使有效反射面积发生变化,从而使雷达回波脉冲的振幅成为随机量。振幅起伏一般分为两类:一类是扫描—扫描起伏,即在天线一次扫描期间收到的脉冲振幅可以认为是不变的,但各次扫描间的脉冲串振幅则随机变化且统计独立的。另一类是脉冲—脉冲起伏,即脉冲串中各脉冲间具有统计独立的随机振幅。

本节前面所讨论的慢衰落实际上是按脉冲—脉冲起伏的情况。对于扫描间慢起伏(比脉冲—脉冲起伏更慢)的情况,其检测概率应按随机相位脉冲串的式(2-244)求出给定振幅情况下的 P_d ,然后还需用给定的幅度分布进行统计平均,这里不再详细介绍。

本章小结

(1) 信号检测是统计信号处理的主要任务之一,它的功能是在接收到被噪声污染的信号波形中,能够最大可能地正确判决原发信号的状态存在,亦即将误判(包括虚报和漏报在内)降低到最小程度。因此统计信号检测在通信和雷达接收机中应用很广泛,其他如射电天文、遥控遥测等领域内也有应用。

(2) 从理论上讲,统计信号检测就是利用统计学上假设检验的方法,对接收到的随机信号(包括先验概率已知和未知两类)根据选定的判决准则进行 m 择一(简单的情况是二择一)的判决,其判决结果就相应于原发信号的状态。判决结果可能发生两种情况,其中大部分应该是正确判决,而小部分会出现错误判决,因而导致虚报或漏报。

(3) 信号检测模型可用三个概率空间和两次概率转换来描述,其中包括信号空间存在 m 个状态(二元信号只有两个状态)、观测空间存在 n 维随机噪声、而判决空间也存在 m 个判决结果。由于信号状态、多维噪声、判决结果都带有随机性,因此它们都是随机变量或随机过程,用概率空间来描述是正确的。第一次概率转换发生在信号空间和观测空间之间,即由 m 维原发信号转换为 n 维含噪信号。第二次概率转换则发生在观测空间与判决空间之间,即由 n 维含噪信号转换为 m 维判决结果,显然这次概率转换是发生在接收机内,而第一次概率转换则是发生在传输信号的信道内。

(4) 在信号检测模型的观测空间内存在着 m 个判决区域,含噪信号落在不同的判决区内会产生不同的判决结果,因此判决区域的正确划分是非常重要的。判决区域划分的原则称之为判决准则,它们的共同目的是要获得最大的正确检测结果(以概率来统计),或者说最小程度的风险。

(5) 常用的判决准则有最小平均风险准则(或称贝叶斯准则)、安全平均风险准则(或称极大极小化准则)、检测概率最大准则(或称奈曼-皮尔逊准则),以及错误概率最小准则、最大似然准则、最大后验概率准则六种。其中前三种准则应用较为普遍,尤其是贝叶斯准则最为有

名。后三种判决准则可以认为是在某些限制条件下的简化,但更为实用,特别是在通信系统中错误概率最小和似然函数最大的判决准则用得更加普遍和实用。在雷达系统中则应用奈曼-皮尔逊准则更为方便,它是在给定允许的虚警概率条件下力求获得最大的检测概率,即漏报最小,因为在雷达系统中信号的先验概率和风险代价系数都是无法获知的,这是奈曼-皮尔逊判决准则的特点。

(6) 根据计算,判决不等式中的判决门限决定于采用的不同判决准则,而判决门限又与多种因素有关,主要的有信号的先验知识、信道的概率分布(即统计特性)和风险代价系数的设定。另外,判决门限还与观测次数有关,观测次数越多就等于获得的观测样本数据越多,因此反映的统计特性越精确,从而计算出来的判决门限也应该更加正确。观测次数的具体确定应视不同的应用系统而定,同时也应考虑计算的复杂度和实时性。

(7) 二元假设检验是指信号空间仅有两个状态,而多元假设检验是在信号空间存在有 m 个状态,因此也应有 m 个判决区域和 $(m-1)$ 个判决门限。

(8) 复合假设检验是指在含噪信号中检测随机参量,如信号的随机幅度、随机频率、随机相位等,它们不仅可以单独存在,而且有时还可以同时存在,因此计算起来非常复杂。本章以检测随机幅值信号为例来说明计算判决不等式的过程。在通信系统中经常会遇到在高斯信道中接收高斯信号的检测问题,在雷达系统中经常会遇到随机相位信号,并假定随机相位呈均匀分布,计算其判决不等式比较复杂,但计算过程相类似。

基于上述 8 点,本章把第 1 章所讨论的信号检测理论应用于高斯白噪声背景下的信号检测这一经典问题,重点讨论二元信号检测。

首先讨论了确知信号的最佳检测,证明了其最佳检测系统为相关接收机,检测性能只与信噪比 E/N_0 和信号间的相关系数 r 有关,而与信号的具体形状无关。

接着讨论了以输出信噪比最大为准则的最佳滤波,即匹配滤波理论,证明了相关接收可等效为匹配滤波接收。

随后研究了随机参量信号的检测问题。随机相位信号的最佳检测系统为正交接收机,或等效为匹配滤波器串接包络检波器的非相干匹配滤波器。由于不能利用相位信息,其检测性能比确知信号差。随机频率信号和随机到达时间信号的最佳检测,可以采用将频率和到达时间离散化,然后用双择检测法或多元检测法分析。随机频率信号的最佳系统结构为多路非相干匹配滤波。

最后讨论了多脉冲信号检测。相干脉冲串的最佳检测系统由单脉冲最佳系统与积累器构成,称为相干积累。非相干脉冲串的近似最佳接收机由单脉冲非相干匹配滤波器与积累器构成,称为非相干积累。相干积累的检测性能较非相干积累好,前者的信噪比改善与积累脉冲数 m 成正比;后者近似与 m 的平方根成正比。

在下面几章中,我们将不受本章中两个基本假定(高斯白噪声背景和观测时间 T 不变)的限制,进而讨论更广泛的一类检测问题。

习 题 二

2.1 在二元数字通信系统中,两假设下的观测模型分别为

$$H_1: x = m + n_x, \quad H_0: x = n_x$$

式中,观测噪声 $n_x \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ 。若两假设是等可能的,且代价因子 $c_{00} = c_{11} = 0, c_{10} = c_{01} = 1$ 时,采用最小总错

误概率准则,试确定判决规则,并求总错误概率。

- 2.2 考虑与题 2.1 相同的问题,但假定假设的先验概率 $P(H_1)$ 和 $P(H_0)$ 未知。在这种情况下,将采用极大极小化准则。试确定检测门限和总错误概率。

- 2.3 在一般二元信号检测中,两个假设下的观测信号分别为

$$H_0: x_k = s_0 + n_k, \quad H_1: x_k = s_1 + n_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

式中, s_0 和 s_1 为确知信号,且满足 $s_1 > s_0$; 观测噪声 $n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 且 n 次观测相互统计独立; 似然比检测门限为 Λ_0 。

(1) 求贝叶斯判决表示式。

(2) 研究其检测性能。

(3) 如果约定 $s_1 \geq 0$, 且满足 $s_1 \geq |s_0|$, 如何设计信号 s_0 才能获得最好的检测性能。

- 2.4 在数字通信系统中,两个假设下的接收信号分别为

$$H_0: x_k = n_k, \quad H_1: x_k = A + n_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

式中, $A > 0$ (常数); 噪声 $n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 且 n 次接收信号之间统计独立; 先验概率 $P(H_0) = P(H_1) = 1/2$, 代价因子 $c_{00} = c_{11} = 0, c_{10} = c_{01} = 1$ 。

(1) 求最小平均错误概率准则判决表示式。

(2) 求最小平均错误概率 P_e 。

(3) 研究观测次数 n 对检测性能的影响。

(4) 如果信号 $A < 0$, 但绝对值不变, 试问对检测性能有无影响? 说明原因。

- 2.5 在雷达信号检测中,通常采用奈曼-皮尔逊准则。若两个与 2.4 题相似的假设下的接收信号分别为

$$H_0: x_k = n_k, \quad H_1: x_k = A + n_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

式中, $A > 0$ (常数); 噪声 $n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 且 $n_k (k=1, 2, \dots, n)$ 之间相互统计独立。试设计一个 $P(D_1 | H_0) = 0.1$ 的奈曼-皮尔逊接收机, 并研究其检测性能。

- 2.6 考虑四元信号通信信息,其信号为

$$s_j(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin\left(\omega_0 t + j \frac{\pi}{2}\right), \quad (0 \leq t \leq T; j=0, 1, 2, 3)$$

已知 $\omega_0 = 2n\pi/T$, n 为整数, 所以为四相信号通信系统。假设信号传输中叠加了功率谱密度 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声 $n(t)$; 各信号出现的先验概率 $P(H_j)$ 相等。请设计采用最小总错误概率准则的检测系统, 并研究其性能。

第3章 高斯色噪声中的信号检测

3.1 概述

第2章着重讨论了加性高斯白噪声下的信号检测问题。由于接收信号一般都是连续信号,即使在观测区间 $(0, T)$ 内。仍需要进行采样,才能进行数字化处理。对于 $(0, T)$ 时间内信号加白噪声的观测波形 $x(t)$,可以根据香农采样定理,在均匀时间间隔上对它进行幅度采样,或者说以辛克函数作为正交函数集对它进行展开,展开式的各项系数就是幅度采样值。根据采样定理,对 $x(t)$ 进行幅度采样,样本记为 $x_k, (k=1, 2, \dots, n)$ 。因为 $n(t)$ 是白噪声,所以在任意不同时刻采样所得的样本都是不相关的,即各样本 $x_k, (k=1, 2, \dots, n)$ 是不相关的。如果白噪声是属于高斯分布的,那么各样本 x_k 之间是相互统计独立的,从而能够比较容易地通过观测波形一维似然函数的连乘得出其多维似然函数。然而,在实际情况中有时遇到的不是高斯白噪声,而是高斯色噪声,其功率谱密度在频域上的分布是不均匀的。如噪声过程 $n(t)$ 经过窄带系统后,功率谱密度呈现为带宽有限的高斯有色噪声。对于非白噪声,各均匀间隔上的样本并不独立,因而难以直接用各样本的分布求出其多维分布。因此,对于含有非白噪声的观测波形,应该寻求根据噪声的自相关函数选择新的正交函数展开式,并要求展开式的各项系数是不相关的。当然,容易想到将观测波形用傅里叶级数展开,但遗憾的是只有当 T 趋于无穷时,展开式各项系数才是不相关的,这一点在实际中常常得不到满足。因此,有必要讨论非白噪声(色噪声)情况下信号检测的基本方法。通常有两种方法:一种是第2章中讨论过的白化处理法,它将非白噪声信号先通过一个白化滤波器,使滤波器输出信号变成白噪声,然后再按照白噪声的方法进行处理;另一种方法是下面讨论一种基于相关函数的最佳变换新的展开式,即卡亨南-洛维(Karhunen-Loeve)展开,用它可以把 $(0, T)$ 时间内的观测波形展开成一个特殊的级数,该级数的各项系数是不相关的。有的作者也把卡亨南-洛维(K-L)展开称为广义傅里叶级数。

3.2 基于相关函数的一种最佳变换——K-L 展开^[7]

3.2.1 连续随机信号的 K-L 展开

在 $(0, T)$ 域上定义的函数集 $\{f_k(t), k=1, 2, \dots\}$ 满足

$$\int_0^T f_i(t) f_j^*(t) dt = \begin{cases} C & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3-1)$$

式中, C 是非零常数,则称此函数集是正交函数集。若 $C=1$,则此函数集为归一化正交函数集。

若归一化正交函数集 $\{f_k(t), k=1, 2, \dots\}$ 对任意平方可积函数 $x(t)$,以下关系成立

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \left[x(t) - \sum_{k=1}^N x_k f_k(t) \right]^2 dt = 0 \quad (3-2)$$

相应地,可得

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k f_k(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k f_k(t) \quad (3-3)$$

为了确定系数 x_k , 用 $f_j^*(t)$ 乘以式(3-3)两边,并在 $(0, T)$ 时间内积分

$$\int_0^T x(t) f_j^*(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^T x_k f_k(t) f_j^*(t) dt$$

由 $C = 1$ 时的正交归一化性质式(3-1)可知,等式右边除了 $j = k$ 项外其余均为零,故

$$x_k = \int_0^T x(t) f_k^*(t) dt \quad (3-4)$$

则称 $\{f_k(t), k = 1, 2, \dots\}$ 为归一化完备正交函数集。由式(3-4)可知,这是一种相关运算。K-L

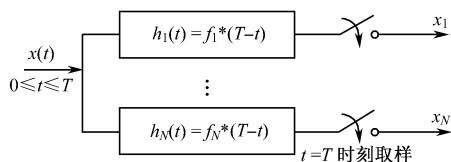


图 3.1 计算卡亨南-洛维系数的滤波器组

得到卡亨南-洛维系数 x_k , 如图 3.1 所示。当 $f_k(t)$ 是实函数时, x_k 可以表示为

$$x_k = \int_0^T x(t) f_k(t) dt \quad (3-5)$$

我们要求式(3-3)中各系数是互不相关的,下面我们来证明,如果要求展开式系数 x_k 不相关,正交函数集 $\{f_i(t)\}$ 必须满足什么条件。设接收波形 $x(t)$ 为确知信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 之和,即 $x(t) = s(t) + n(t)$, 其中 $n(t)$ 是均值为零、自相关函数为 $R_n(\tau)$ 的广义平稳噪声。由式(3-4),系数 x_k 的协方差为

$$\begin{aligned} E[(x_k - E\{x_k\})(x_j^* - E\{x_j^*\})] &= E\left\{\left[\int_0^T [s(t) + n(t)] f_k^*(t) dt - \int_0^T s(t) f_k^*(t) dt\right] \times \right. \\ &\quad \left. \left[\int_0^T [s^*(t) + n^*(t)] f_j(t) dt - \int_0^T s^*(t) f_j(t) dt\right]\right\} \\ &= E\left\{\int_0^T \int_0^T f_k^*(t_1) f_j(t_2) n(t_1) n^*(t_2) dt_1 dt_2\right\} \\ &= \int_0^T \int_0^T f_k^*(t_1) f_j(t_2) R_n(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (3-6)$$

对于完备正交函数集 $\{f_j(t)\}$ 应满足下列齐次积分方程

$$\int_0^T f_j(t_2) R_n(t_1 - t_2) dt_2 = \lambda_j \cdot f_j(t_1) \quad (0 \leq t_1 \leq T) \quad (3-7)$$

式中, $R_n(t_1 - t_2)$ 称为积分方程的核, $f_j(t)$ 称为积分方程的本征函数或特征函数(又可称为 K-L 展开的基函数),而 λ_j 称为本征值或特征值。积分方程(3-7)的解法将在附录 B 中介绍。把式(3-7)代入式(3-6)得

$$\begin{aligned} E[(x_k - E\{x_k\})(x_j^* - E\{x_j^*\})] &= \int_0^T \lambda_j f_j(t) f_k^*(t) dt \\ &= \begin{cases} \lambda_j & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases} \end{aligned} \quad (3-8)$$

综上所述,对于随机信号 $x(t)$ 的有限区间 $(0, T)$ 上的平方可积样本函数,可以把它表示成正交归一函数集的级数,此函数集满足积分方程式(3-7),这样的展开式就是卡亨南-洛维

(K-L)展开式,它是均方收敛的。K-L 展开式的主要特点是,它的诸系数是互不相关的,而且诸系数的方差等于其各自本征值 λ_j 。

现在对齐次积分方程式(3-7)的特征值与特征函数等的有关性质做扼要的介绍。

根据 $n(t)$ 的广义平稳性,积分方程(3-7)的核函数具有对称性

$$R_n(t_1 - t_2) = E[n(t_1)n^*(t_2)] = R_n^*(t_2 - t_1) \quad (3-9)$$

将式(3-7)中的变量互换,取共轭,并将 j 换为 l ,得

$$\int_0^T f_l^*(t_1)R_n^*(t_2 - t_1)dt_1 = \lambda_l^* f_l^*(t_2)$$

上式两端乘以 $f_j(t_2)$ 并在 $(0, T)$ 上对 t_2 积分,得

$$\int_0^T \int_0^T f_l^*(t_1)f_j(t_2)R_n^*(t_2 - t_1)dt_1 dt_2 = \int_0^T \lambda_l^* f_l^*(t_2)f_j(t_2)dt_2 \quad (3-10)$$

另一方面,式(3-7)两端直接乘以 $f_l^*(t_1)$ 并在 $(0, T)$ 上对 t_1 积分,得

$$\int_0^T \int_0^T f_l^*(t_1)f_j(t_2)R_n(t_1 - t_2)dt_1 dt_2 = \int_0^T \lambda_j f_l^*(t_1)f_j(t_1)dt_1 \quad (3-11)$$

比较式(3-10)与式(3-11)可见,两式左侧的双重积分的值彼此相等,因此将式(3-10)与式(3-11)相减,考虑到核的对称性,则显然有

$$(\lambda_j - \lambda_l^*) \int_0^T f_l^*(t)f_j(t)dt = 0 \quad (3-12)$$

于是,由式(3-12)可得出式(3-7)的解,并具有如下重要性质:

(1) 本征值为实数,这符合方差的性质。

因为在式(3-12)中令 $j = l$, 则

$$(\lambda_j - \lambda_j^*) \int_0^T f_j^*(t)f_j(t)dt = (\lambda_j - \lambda_j^*) \int_0^T |f_j(t)|^2 dt = 0$$

而根据式(3-1), $\int_0^T f_j(t)f_j^*(t)dt = 1$, 所以 $(\lambda_j - \lambda_j^*) = 0$, 即

$$\lambda_j = \lambda_j^* \quad (3-13)$$

这就证明了式(3-7)积分方程的特征值一定是实数。

(2) 不同本征值对应的本征函数是正交的。

因为,式(3-12)中若 $\lambda_j \neq \lambda_l$, 则必有 $\int_0^T f_l^*(t)f_j(t)dt = 0 (j \neq l)$, 即对应于不同本征值的本征函数是正交的。考虑到 $f_j(t)$ 乘以任意常数后仍满足式(3-7), 因此总可使 $\int_0^T f_l^*(t)f_j(t)dt = 1 (j = l)$ 。这就证明了满足式(3-7)的解必定满足式(3-1)所表示的正交归一性。

(3) 若 $\lambda_j = \lambda_l$, 则说明两个或更多的本征函数对应于相同的本征值,这种情况称为核的退化^①。可以对退化本征函数做适当加权线性组合,以使其正交归一化。

(4) 若核是实函数,即满足

$$R_n(t_1 - t_2) = R_n^*(t_2 - t_1) \quad (3-14)$$

并且核没有退化,则本征函数是实函数。

证明:此时式(3-7)可以写成

$$\int_0^T f_j^*(t_2)R_n(t_1 - t_2)dt_2 = \lambda_j f_j^*(t_1) \quad (3-15)$$

① 核的退化——两个以上的本征函数具有同样的本征值称为核的退化。

即本征函数 $f_j^*(t)$ 与 $f_j(t)$ 具有相同的核,所以只要 $R_n(t_1 - t_2)$ 没有退化,就有

$$f_j(t) = f_j^*(t) \quad (3-16)$$

即本征函数是实函数。

(5) 若核 $R_n(t_1 - t_2)$ 是半正定的,则本征值就是正数。

为了证明这一点,我们首先说明什么是半正定的(或非负定的)。

考虑不等式

$$E \left[\left| \int_0^T g(t) n(t) dt \right|^2 \right] \geq 0 \quad (3-17)$$

式中 $g(t)$ 是任意函数,所以式(3-17)可以写成

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^T g(t_1) g^*(t_2) E[n(t_1) n^*(t_2)] dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^T \int_0^T g(t_1) g^*(t_2) R_n(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (3-18)$$

$g(t)$ 为任意函数时,满足式(3-18)的核 $R_n(t_1 - t_2)$ 就是半正定的,即实对称核是半正定的。如果式(3-18)中的等号不成立,则核是正定的,两者的本征值都是正的。

下面来证明本征值是正值。令式(3-11)中 $l = j$,就有

$$\lambda_j \int_0^T f_j(t_1) f_j^*(t_1) dt_1 = \int_0^T \int_0^T f_j(t_2) R_n(t_1 - t_2) f_j^*(t_1) dt_1 dt_2 \quad (3-19)$$

又由本征函数 $f_j(t)$ 的正交归一性,有

$$\lambda_j = \int_0^T \int_0^T f_j(t_2) f_j^*(t_1) R_n(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \quad (3-20)$$

因为核是半正定的,上式右边 ≥ 0 ,所以本征值 $\lambda_j \geq 0$,即非零的本征值必为正数。

(6) 若核 $R_n(t_1 - t_2)$ 是正定的,则本征函数形成完备集,即与所有本征函数正交的任意函数只要它不为零,则必然也是一个本征函数。其数学表示式为:若对所有 j ,满足

$$\int_0^T g(t) f_j(t) dt = 0 \quad (3-21)$$

的唯一函数为 $g(t) = 0$,就称为函数集 $\{f_j(t)\}$ 是完备的。这意味着,如果 $g(t)$ 不恒等于零,则 $g(t)$ 必定是函数集 $\{f_j(t)\}$ 的一员。

(7) 默塞尔(Mercer)定理:还有一个可资利用的重要的性质,即 Mercer 定理。若 $R_n(t_1 - t_2)$ 是半正定的,则可用本征值和本征函数将其展开为

$$R_n(t_1 - t_2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j f_j(t_1) f_j^*(t_2) \quad (3-22)$$

证明:将式(3-22)代入式(3-7),有

$$\lambda_j f_j(t_1) = \int_0^T f_k(t_2) R_n(t_1 - t_2) dt_2 = \int_0^T f_k(t_2) \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j f_j(t_1) f_j^*(t_2) dt_2 \quad (3-23a)$$

$$= \lambda_j f_j(t_1) \quad (3-23b)$$

最后一步使用了本征函数的正交归一性。对比式(3-23a)和式(3-23b)可知,式(3-22)成立。

(8) 通常,随机信号 $\{x(t), 0 \leq t \leq T\}$ 可采用 K-L 展开为有限项之和,作为它自身的一种近似,即

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^m x_i f_i(t)$$

这时,由于近似引起的均方误差为

$$\begin{aligned}
\epsilon &= E \left\{ \int_0^T [x(t) - \hat{x}(t)]^2 dt \right\} = E \left\{ \int_0^T \left[x(t) - \sum_{i=1}^m x_i f_i(t) \right] \left[x(t) - \sum_{j=1}^m x_j f_j(t) \right]^* dt \right\} \\
&= E \left\{ \int_0^T \left[\sum_{i=m+1}^{+\infty} x_i f_i(t) \right] \left[\sum_{j=m+1}^{+\infty} x_j f_j(t) \right]^* dt \right\} = \sum_{i=m+1}^{+\infty} E \{ x_i^2 \}
\end{aligned} \quad (3-24)$$

【例 3.1】 本例采用 K-L 展开的观点来解释高斯白噪声中确知信号的检测问题。我们考虑二元假设检测：

$$\begin{aligned}
H_0 : x(t) &= n(t) \quad 0 \leq t \leq T \\
H_1 : x(t) &= s(t) + n(t) \quad 0 \leq t \leq T
\end{aligned}$$

式中, $s(t)$ 是确知信号, 其能量 $E = \int_0^T s^2(t) dt$; $n(t)$ 是零均值的高斯白噪声, 其功率谱密度为 $N_0/2$ 。我们要在区间 $(0, T)$ 内观测接收信号 $x(t)$, 构成检测统计量, 然后与门限相比较而做出判决。以 K-L 展开来表示 $x(t)$, 即

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k f_k(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

我们选择 $s(t)$ 作为第一个正交函数 $f_1(t)$, 这样, K-L 展开的第一个系数 x_1 为

$$\begin{aligned}
x_1 &= \int_0^T x(t) f_1^*(t) dt = \int_0^T x(t) s(t) dt \\
&= \begin{cases} \int_0^T n(t) s(t) dt = n_1 : H_0 \\ \int_0^T [s(t) + n(t)] s(t) dt = E + n_1 : H_1 \end{cases}
\end{aligned} \quad (3-25)$$

可见 x_1 是高斯随机变量。

余下的 $f_i(t) (i > 1)$ 可由任一正交归一函数集来构成, 此集合中的每一元素都与 $f_1(t) = s(t)$ 正交。这样, K-L 展开的第 i 个系数 $(i > 1)$ 为

$$x_i = \int_0^T x(t) f_i^*(t) dt = \begin{cases} \int_0^T n(t) f_i^*(t) dt = n_i : H_0 \\ \int_0^T [s(t) + n(t)] f_i^*(t) dt = n_i : H_1 \end{cases} \quad (3-26)$$

可见, $x_i (i > 1)$ 也是高斯变量。由式(3-25)和式(3-26)看出, 仅仅 x_1 依赖于那一个假设为真, 而其他的 $x_i (i > 1)$ 都与那个假设为真无关, 即它们不含有赖以做出判决的任何信息。因此, 可以只用 x_1 作为检测统计量, 与门限相比较而做出判决。而 $x_1 = \int_0^T x(t) s(t) dt$ 就是相关运算。可用图 3.1 所示的相关接收机或匹配滤波器来实现。

3.2.2 离散随机信号的 K-L 展开

在现代信号处理中, 即使是连续随机信号 $\{x(t), 0 \leq t \leq T\}$, 往往对它先做时域上的离散采样, 得到相应的离散随机信号 $\{x(k), k = 1, 2, \dots\}$, 当然, 很多情况下得到的数据本身就是离散随机信号。

对于长度为 n 的离散随机信号, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 它的每一个样本在归一化正交矢量 $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n$ 上的展开

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \vdots \\ \varphi_{1n} \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \\ \vdots \\ \varphi_{2n} \end{bmatrix} + \cdots + y_n \begin{bmatrix} \varphi_{n1} \\ \varphi_{n2} \\ \vdots \\ \varphi_{nn} \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

式中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_i &= [\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{in}]^T \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ y_i &= [\boldsymbol{\varphi}_i^*]^T \cdot [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

显然, $y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是随机变量。若要求

$$E\{[y_i - E(y_i)][y_j - E(y_j)]^*\} = \lambda_j \delta_{ji} \quad (3-28)$$

则可推得以下关系:

$$\begin{aligned} & E\left\{[\boldsymbol{\varphi}_i^*]^T \begin{bmatrix} x_1 - E(x_1) \\ x_2 - E(x_2) \\ \vdots \\ x_n - E(x_n) \end{bmatrix} [\boldsymbol{\varphi}_j]^T \begin{bmatrix} x_1 - E(x_1) \\ x_2 - E(x_2) \\ \vdots \\ x_n - E(x_n) \end{bmatrix}^* \right\} \\ &= E\left\{[\boldsymbol{\varphi}_i^*]^T \begin{bmatrix} x_1 - E(x_1) \\ x_2 - E(x_2) \\ \vdots \\ x_n - E(x_n) \end{bmatrix} [x_1 - E(x_1), x_2 - E(x_2), \dots, x_n - E(x_n)]^* [\boldsymbol{\varphi}_j] \right\} \\ &= [\boldsymbol{\varphi}_i^*]^T \text{Cov}\{\mathbf{x}, \mathbf{x}\} [\boldsymbol{\varphi}_j] = \lambda_j \delta_{ji} \quad (3-29) \end{aligned}$$

由上式, 不难推断: 正交矢量 $\boldsymbol{\varphi}_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 应是以下矩阵方程的解, 即 $\boldsymbol{\varphi}_j$ 应满足

$$\text{Cov}\{\mathbf{x}, \mathbf{x}\} \boldsymbol{\varphi}_j = \lambda_j \boldsymbol{\varphi}_j \quad (3-30)$$

显然, 这时

$$E\{[y_i - E(y_i)][y_j - E(y_j)]^*\} = [\boldsymbol{\varphi}_i^*]^T \lambda_j \boldsymbol{\varphi}_j = \lambda_j \delta_{ji} \quad (3-31)$$

在上式中, $\lambda_j, \boldsymbol{\varphi}_j$ 是矩阵方程式(3-30)的特征值与特征矢量。

若 \mathbf{x} 是实数随机矢量, $\text{Cov}\{\mathbf{x}, \mathbf{x}\}$ 是 $(n \times n)$ 阶实对称矩阵, 应有 n 个不同的实数特征值, 对应的是 n 个不同的彼此正交的特征矢量(归一化是很容易办到的)。

很容易证明, 这时由式(3-30)所确定的特征矢量是实数矢量。证明如下, 对式(3-30)两侧同时取共轭, 可得

$$\text{Cov}\{\mathbf{x}, \mathbf{x}\} \boldsymbol{\varphi}_j^* = \lambda_j \boldsymbol{\varphi}_j^*$$

显然, 若 $\boldsymbol{\varphi}_j$ 是 λ_j 对应的特征矢量, $\boldsymbol{\varphi}_j^*$ 亦应是矩阵方程的特征矢量; 由于 λ_j 对应的特征矢量只应有一个, 所以, $\boldsymbol{\varphi}_j^* = \boldsymbol{\varphi}_j$ 。可见, $\boldsymbol{\varphi}_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 都应是实数特征矢量。

因为, $y_i = [\boldsymbol{\varphi}_i]^T \mathbf{x} (i = 1, 2, \dots, n)$, 所以 y_i 同样是实数。

离散随机信号 \mathbf{x} 的 K-L 展开可表示为:

$$\mathbf{x} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n][y_1, \dots, y_n]^T = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{y} \quad (3-32)$$

$\boldsymbol{\varphi}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 $\text{Cov}\{\mathbf{x}, \mathbf{x}\}$ 的特征矢量。

若采用 \mathbf{x} 的前 k 项 K-L 展开作为对它的一种近似, 即

$$\hat{\mathbf{x}} = y_1 \boldsymbol{\varphi}_1 + \cdots + y_k \boldsymbol{\varphi}_k \quad (3-33)$$

则近似引起的均方误差为

$$\varepsilon = E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\}$$

$$= E\left\{\left[\sum_{i=k+1}^n y_i \boldsymbol{\varphi}_i\right]^T \left[\sum_{i=k+1}^n y_i \boldsymbol{\varphi}_i\right]\right\} = E\left\{\sum_{i=k+1}^n y_i^2\right\} \quad (3-34)$$

若 $E\{\mathbf{x}\} = 0$, 这时

$$\begin{aligned} \epsilon &= E\left\{\sum_{i=k+1}^n y_i^2\right\} = \sum_{i=k+1}^n E\left\{[\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{x}][\mathbf{x}^T \boldsymbol{\varphi}_i]\right\} \\ &= \sum_{i=k+1}^n \boldsymbol{\varphi}_i^T E\{\mathbf{x} \mathbf{x}^T\} \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=k+1}^n \boldsymbol{\varphi}_i^T \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=k+1}^n \lambda_i \end{aligned} \quad (3-35)$$

基于以上分析, 通常在进行随机信号的 K-L 展开时, 往往先对随机信号 \mathbf{x} 做以下变换: $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}$ 。 \mathbf{x}' 的均值 $E\{\mathbf{x}'\} = 0$, 然后对 \mathbf{x}' 再做 K-L 变换。

3.2.3 K-L 展开是最小均方误差意义下的一种最佳变换

对于 n 维实数随机矢量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 在任意归一化正交实矢量 $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n$ 上的展开 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}$, 式中, $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n]$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ 。 显见

$$\mathbf{x} = y_1 \boldsymbol{\varphi}_1 + y_2 \boldsymbol{\varphi}_2 + \dots + y_n \boldsymbol{\varphi}_n \quad (3-36)$$

对 \mathbf{x} 定义一种近似(不妨称为“估计”)

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k y_i \boldsymbol{\varphi}_i + \sum_{i=k+1}^n b_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad (3-37)$$

相应地可推得估计均方误差为

$$\epsilon = E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\} = \sum_{i=k+1}^n E\{(y_i - b_i)^2\} \quad (3-38)$$

现在提出这样的问题, $\boldsymbol{\varphi}_i$ 及 $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 应满足何种约束, 可使 ϵ 为最小。 在式(3-38)中, 对 $b_i (i = n+1, \dots, N)$ 求偏导数, 并令其等于 0, 可得

$$\frac{\partial}{\partial b_i} \epsilon = \frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{i=k+1}^n E\{(y_i - b_i)^2\} = -2E[y_i - b_i] = 0$$

所以

$$b_i = E\{y_i\} \quad (3-39)$$

已知: $y_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{x}$, 将此关系代入上式, 因此

$$b_i = \boldsymbol{\varphi}_i^T E\{\mathbf{x}\} \quad (3-40)$$

而

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{i=k+1}^n E\{(y_i - b_i)^2\} = \sum_{i=k+1}^n E\{\boldsymbol{\varphi}_i^T [\mathbf{x} - E(\mathbf{x})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^T \boldsymbol{\varphi}_i\} \\ &= \sum_{i=k+1}^n \boldsymbol{\varphi}_i^T \text{Cov}\{\mathbf{x} \mathbf{x}\} \boldsymbol{\varphi}_i \end{aligned} \quad (3-41)$$

采用拉格朗日待定常数法可确定 $\boldsymbol{\varphi}_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 这时, 目标函数为

$$T = \sum_{i=k+1}^n \{\boldsymbol{\varphi}_i^T \text{Cov}\{\mathbf{x} \mathbf{x}\} \boldsymbol{\varphi}_i - \lambda_i (\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i - 1)\} \quad (3-42)$$

式中, $\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i = 1$ 是归一化要求的约束。

求 T 对 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 的偏导数, 并令其等于零, 得

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\varphi}_i} = \text{Cov}\{\mathbf{x} \mathbf{x}\} \boldsymbol{\varphi}_i - \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i = 0 \quad (3-43)$$

由式(3-43)可得

$$\text{Cov}\{\mathbf{x} \mathbf{x}\} \boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad (3-44)$$

可见, 采用式(3-37)规定的估计 $\hat{\mathbf{x}}$, 使估计均方误差为最小的归一化正交函数集

$\boldsymbol{\varphi}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 应是 $\text{Cov}\{\mathbf{x} \mathbf{x}\}$ 的特征矢量, 而 $b_i = E\{y_i\} = E\{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{x}\}$ 。以上结论, 对于 $1 \leq i \leq n$ 都成立。据此, $\boldsymbol{\varphi}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 归一化正交函数集应是 $\text{Cov}\{\mathbf{x}, \mathbf{x}\}$ 的特征矢量。

综上所述, 当 $E\{\mathbf{x}\} \neq 0$ 时, K-L 变换是使由式(3-36)所描述的估计均方误差为最小的一种变换。

若随机矢量 \mathbf{x} 满足 $E\{\mathbf{x}\} = 0$, 则

$$b_i = E\{y_i\} = E\{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{x}\} = 0 \quad (3-45)$$

相应地, 式(3-44)应演化为

$$E\{\mathbf{x} \mathbf{x}^T\} \boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad (3-46)$$

可见, 当 $E\{\mathbf{x}\} = 0$ 时, K-L 变换是使估计 $\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k y_i \boldsymbol{\varphi}_i$ 的近似均方误差为最小的一种最佳变换。

不难证明, 当 n 取定以后, 近似引起的均方误差 $\epsilon_{\hat{\mathbf{x}}} = \sum_{i=k+1}^n y_i^2 = \sum_{i=k+1}^n \lambda_i$ 。这部分的证明请读者自行完成。

通常, 在进行离散随机信号的 K-L 变换时, 若 $E\{\mathbf{x}\} \neq 0$, 往往先对 \mathbf{x} 做以下处理, 令 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}$, 然后再由 $E\{\mathbf{x}' \mathbf{x}'^T\}$ 求出 λ_i 及 $\boldsymbol{\varphi}_i (i = 1, 2, \dots, n)$; 在此基础上对 \mathbf{x}' 做相应的 K-L 展开, 得 $\mathbf{x}' = \sum_{i=1}^n y_i \boldsymbol{\varphi}_i$, 而

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + E\{\mathbf{x}\} = \sum_{i=1}^n y_i \boldsymbol{\varphi}_i + E\{\mathbf{x}\} \quad (3-47)$$

由式(3-47)可构成对 \mathbf{x} 的近似

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k y_i \boldsymbol{\varphi}_i + E\{\mathbf{x}\} \quad (3-48)$$

这时, 由估计引起的近似均方误差为

$$\begin{aligned} \epsilon_{\hat{\mathbf{x}}} &= E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\} = E\{(\mathbf{x}' - \hat{\mathbf{x}}')^T (\mathbf{x}' - \hat{\mathbf{x}}')\} \\ &= \sum_{i=k+1}^n y_i^2 = \sum_{i=k+1}^n \lambda_i \quad (y_i = \mathbf{x}'^T \boldsymbol{\varphi}_i) \end{aligned} \quad (3-49)$$

式中, $\hat{\mathbf{x}}' = \sum_{i=1}^k y_i \boldsymbol{\varphi}_i$, $\boldsymbol{\varphi}_i$ 应是 $E\{\mathbf{x}' \mathbf{x}'^T\}$ 的特征矢量。

综上所述, 可见当 n 相同时, $\hat{\mathbf{x}}'$ 与式(3-48)定义的 $\hat{\mathbf{x}}$ 具有相同的近似均方误差。进一步不难证明, 当 n 相同时, 若采用式(3-47)的近似模型, 最终得到的 \mathbf{x} 的 K-L 展开近似引起的均方误差与上述结果完全一致。

3.3 平稳高斯色噪声中确知信号的检测

有了 K-L 展开式, 就能够处理高斯色噪声中确知信号的检测问题。仍然用似然比检测方法来确定最佳接收机结构。其基本思想是把观测信号做 K-L 展开, 即观测信号可用 K-L 展开式系数唯一地等效表示出来, 于是似然函数就是这些不相关的 K-L 展开式系数的联合概率密度。这样做的益处在于其数学处理简单易行。在这种意义上, K-L 系数就是信号的样本(系数), 即输入空间矢量 $\mathbf{x} \triangleq [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 。不同于第 2 章中对观测信号直接进行均匀采样的样本(系数)。

3.3.1 似然比计算和最佳处理器

考虑下面高斯色噪声下的二元假设检测问题

$$H_0 : x(t) = s_0(t) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$H_1 : x(t) = s_1(t) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

$x(t)$ 是接收波形, $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 是二元确知实信号, $n(t)$ 是均值为零、自相关函数为 $R_n(\tau)$ 的高斯色噪声。因为 $R_n(\tau)$ 为实对称函数, 则由式(3-14)和式(3-16)可知, $f_k(t)$ 应为实函数。由式(3-3), $x(t)$ 可写为

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k f_k(t)$$

由式(3-5), 系数为

$$x_k = \int_0^T x(t) f_k(t) dt$$

由于 x_k 是对高斯过程 $x(t)$ 做线性运算得到的, 所以 x_k 也是高斯分布的。又因为它们不相关, 所以诸 x_k 是统计独立的。因此, 为确定 x_k 的联合密度函数, 只需求出它们的均值和方差就够了。因为 $x(t) = s_i(t) + n(t)$ ($i = 0, 1$), 故

$$x_k = \int_0^T [s_i(t) + n(t)] f_k(t) dt$$

由此可见

$$E\{x_k\} = E\left\{\int_0^T s_i(t) f_k(t) dt + \int_0^T n(t) f_k(t) dt\right\} = \int_0^T s_i(t) f_k(t) dt$$

因而

$$\begin{cases} E\{x_k | H_0\} = s_{0k} \\ E\{x_k | H_1\} = s_{1k} \end{cases} \quad (3-50)$$

式中

$$\begin{cases} s_{0k} = \int_0^T s_0(t) f_k(t) dt \\ s_{1k} = \int_0^T s_1(t) f_k(t) dt \end{cases} \quad (3-51)$$

分别是确知信号 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 的卡亨南-洛维展开式系数。根据式(3-8), x_k 的方差等于 λ_k , 并且对每个假设都相同。于是似然函数为

$$p\{\mathbf{x} | H_1\} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2\pi\lambda_k}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x_k - s_{1k})^2}{2\lambda_k}\right]$$

$$p\{\mathbf{x} | H_0\} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2\pi\lambda_k}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x_k - s_{0k})^2}{2\lambda_k}\right]$$

似然比是

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left[\sum_{k=1}^n -(x_k - s_{1k})^2 / 2\lambda_k\right]}{\exp\left[\sum_{k=1}^n -(x_k - s_{0k})^2 / 2\lambda_k\right]}$$

即

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{s_{1k}}{\lambda_k} (2x_k - s_{1k}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{s_{0k}}{\lambda_k} (2x_k - s_{0k})\right]$$

对数似然比是

$$\ln \Lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{s_{1k}}{\lambda_k} (2x_k - s_{1k}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{s_{0k}}{\lambda_k} (2x_k - s_{0k}) \quad (3-52)$$

与白噪声情况类似, 我们需要求出 $n \rightarrow +\infty$ 时上述对数似然比的极限。为此, 令式(3-52)

第一项为

$$G_1(n) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{s_{1k}}{\lambda_k} (2x_k - s_{1k})$$

由式(3-51)和式(3-5)可见

$$2x_k - s_{1k} = 2 \int_0^T x(t) f_k(t) dt - \int_0^T s_1(t) f_k(t) dt = \int_0^T [2x(t) - s_1(t)] f_k(t) dt \quad (3-53)$$

故

$$G_1(n) = \int_0^T \left[x(t) - \frac{1}{2} s_1(t) \right] \sum_{k=1}^n \frac{s_{1k} f_k(t)}{\lambda_k} dt \quad (3-54)$$

以 $h_{1,n}(t)$ 表示式(3-54)中的求和项,则

$$G_1(n) = \int_0^T \left[x(t) - \frac{1}{2} s_1(t) \right] h_{1,n}(t) dt$$

式中

$$h_{1,n}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{s_{1k} f_k(t)}{\lambda_k}$$

在 $n \rightarrow \infty$ 的极限情况下,我们得

$$G_1 = \int_0^T \left[x(t) - \frac{1}{2} s_1(t) \right] h_1(t) dt \quad (3-55)$$

式中

$$h_1(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{s_{1k} f_k(t)}{\lambda_k} \quad (3-56)$$

下面进一步用较简明的方法来表示 $h_1(t)$, 用 $R_n(t-\tau)$ 乘以式(3-56)的两边,并在区间 $(0 \leq \tau \leq T)$ 上积分,则

$$\int_0^T R_n(t-\tau) h_1(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{s_{1k}}{\lambda_k} \int_0^T R_n(t-\tau) f_k(\tau) d\tau$$

右边的积分是 $\lambda_k f_k(t)$, 所以

$$\int_0^T R_n(t-\tau) h_1(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{+\infty} s_{1k} f_k(t) \quad (3-57)$$

式(3-57)右端即是 $s_1(t)$ 的卡亨南-洛维展开式,于是

$$s_1(t) = \int_0^T R_n(t-\tau) h_1(\tau) d\tau \quad (3-58)$$

显然,由式(3-58)可以解出 $h_1(t)$ 。类似地,当 $n \rightarrow +\infty$ 时式(3-52)的第二个求和项为

$$G_0 \triangleq \int_0^T \left[x(t) - \frac{1}{2} s_0(t) \right] h_0(t) dt \quad (3-59)$$

式中, $h_0(t)$ 是下面积分方程的解

$$s_0(t) = \int_0^T R_n(t-\tau) h_0(\tau) d\tau \quad (3-60)$$

于是根据式(3-52),判决规则变为 $G \triangleq (G_1 - G_0) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \Lambda_0$, 其中 Λ_0 由我们选用的准则而定。

将检测统计量 G 详细写出为

$$G = \int_0^T \left[x(t) - \frac{1}{2} s_1(t) \right] h_1(t) dt - \int_0^T \left[x(t) - \frac{1}{2} s_0(t) \right] h_0(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \Lambda_0 \quad (3-61)$$

等效的判决规则是

$$\int_0^T x(t) h_1(t) dt - \int_0^T x(t) h_0(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \Lambda_0 + \int_0^T \frac{1}{2} s_1(t) h_1(t) dt -$$

$$\int_0^T \frac{1}{2} s_0(t) h_0(t) dt \triangleq \gamma$$

由式(3-61)可以得出在高斯色噪声中检测确知信号的最佳接收机结构,图 3.2 示出了这种接收机的两种形式。第一种是图 3.2(a)所示的相关接收机,与在高斯白噪声中检测确知信号的图 2.3 非常相似,只是此处的本地信号不再是 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$,而是 $h_0(t)$ 和 $h_1(t)$,它们分别是积分式(3-58)和式(3-60)的解。第二种如图 3.2(b)所示,用匹配滤波器来实现相关运算,两个匹配滤波器分别对 $h_1(t)$ 和 $h_0(t)$ 匹配。

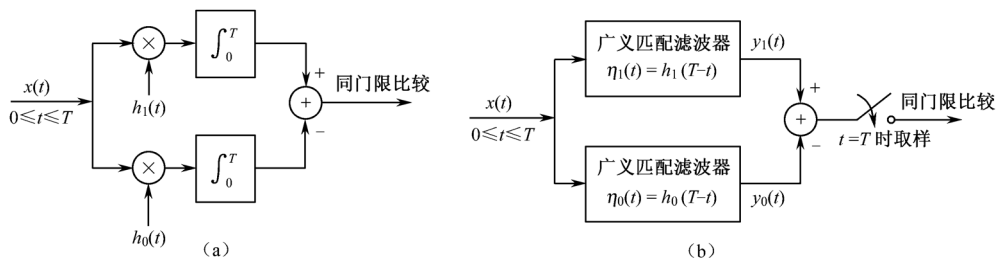


图 3.2 在高斯色噪声中检测确知信号的最佳接收机

两种接收机的等效性是容易证明的。例如,我们来看图 3.2(b)的上支路。显然

$$y_1(t) = x(t) * \eta_1(t) = \int_0^T x(\tau) \eta_1(t - \tau) d\tau$$

在 $t = T$ 时采样,得

$$y_1(T) = \int_0^T x(\tau) \eta_1(T - \tau) d\tau = \int_0^T x(\tau) h_1(T - T + \tau) d\tau = \int_0^T x(\tau) h_1(\tau) d\tau$$

可见与图 3.2(a)上支路所表示的相关运算相同。同理可证两种接收机的下支路也完全等效。

其次,我们要指出,在第二种形式中的两个滤波器实际上是分别与 $s_1(t)$ 和 $s_0(t)$ 相匹配的广义匹配滤波器。只需对滤波器 $\eta_1(t)$ 加以说明就够了。因为 $\eta_1(t) = h_1(T - t)$, 故 $h_1(\tau) = \eta_1(T - \tau)$, 式(3-58)变为

$$s_1(t) = \int_0^T R_n(t - \tau) \eta_1(T - \tau) d\tau$$

令 $T - x = t, T - \tau = z$, 则上式变为

$$s_1(T - x) = \int_0^T R_n(x - z) \eta_1(z) dz \quad (0 \leq x \leq T)$$

此式与第 2 章式(2-97)一致。当噪声自相关函数 $R_n(\tau)$ 给定时,上式给出了使信噪比达到最大的广义匹配滤波器冲激响应 $\eta_1(t)$ 。

不难验证,第 2 章中讨论的高斯白噪声下确知信号检测问题,可以看做是本节结果的特殊情况,我们把这个证明留给读者自行完成。

【例 3.2】 考虑如下检测问题:

$$H_0: x(t) = n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$H_1: x(t) = s(t) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

$s(t)$ 为确知信号, $n(t)$ 为高斯色噪声, 设其相关函数 $R_n(\tau) = \alpha e^{-\beta|\tau|}$ 。试求最佳接收机结构。

解: 显然,只要求出相关接收机(只有一路)的本地信号即可。为求近似解,把观测区间扩展为 $(-\infty, +\infty)$ 。由式(3-58),可得下列卷积积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_n(t - \tau) h(\tau) d\tau = s(t)$$

两边取傅里叶变换,得

$$H(j\omega)S_n(\omega) = S(j\omega)$$

噪声功率谱密度 $S_n(\omega)$ 为

$$S_n(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_n(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2\alpha\beta}{\omega^2 + \beta^2}$$

故 $h(t)$ 的傅里叶变换 $H(j\omega)$ 等于

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{S_n(\omega)} = \frac{1}{2\alpha\beta}(\omega^2 + \beta^2)S(j\omega)$$

上式取傅里叶反变换,得

$$h(t) = \frac{1}{2\alpha\beta} \left(-\frac{d^2}{dt^2} + \beta^2 \right) s(t)$$

这就是相关接收机的本地信号。这时,最佳接收机只有一个相关器,且积分限应扩展为 $(-\infty, +\infty)$ 。可用类似于图 2.5 所示的最佳相关接收机来近似实现,即 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t)dt$ 。

3.3.2 检测系统性能

检测系统常用的性能指标是一种有限样本容量下的指标,对于雷达系统,最佳处理器的性能指标用虚警概率和检测概率(或漏极概率)来表征。对于通信系统,常用平均错误概率来表征。为了求出错误概率,首先必须确定检测统计量 G 的概率密度函数。因为统计量 G 是对高斯过程 $x(t)$ 进行式(3-61)所示的线性运算得到的,所以 G 也是高斯分布的。考虑到噪声均值为零,应用式(3-61)可求得在各假设下 G 的均值为

$$E\{G | H_1\} = \frac{1}{2} \int_0^T s_1(t)h_1(t)dt - \frac{1}{2} \int_0^T [2s_1(t) - s_0(t)]h_0(t)dt \quad (3-62)$$

和
$$E\{G | H_0\} = -\frac{1}{2} \int_0^T s_0(t)h_0(t)dt + \frac{1}{2} \int_0^T [2s_0(t) - s_1(t)]h_1(t)dt \quad (3-63)$$

引入积分方程逆核 $R_n^{-1}(t-\tau)$ 的概念,可以给分析带来方便。逆核(或色噪声自相关函数的逆) $R_n^{-1}(t-\tau)$ 定义为

$$\int_0^T R_n^{-1}(t-\tau)R_n(\tau-z)d\tau = \delta(t-z) \quad (0 \leq t, z \leq T) \quad (3-64)$$

考虑 $h_1(t)$ 的式(3-58),有

$$s_1(t) = \int_0^T R_n(t-\tau)h_1(\tau)d\tau \quad (3-65)$$

将式(3-64)定义的逆核,并利用实对称核的性质可写成 $R_n^{-1}(t-\tau) = R_n^{-1}(z-t)$,并乘以式(3-65),再在区间 $(0 \leq t \leq T)$ 上对 t 积分

$$\int_0^T h_1(\tau)d\tau \int_0^T R_n(t-\tau)R_n^{-1}(z-t)dt = \int_0^T s_1(t)R_n^{-1}(z-t)dt$$

上式左边的第二层积分恰好是 $\delta(z-\tau)$,因此上式左边的表示式是 $h_1(z)$,故

$$\left. \begin{aligned} h_1(z) &= \int_0^T s_1(t)R_n^{-1}(z-t)dt \\ h_1(t) &= \int_0^T s_1(\tau)R_n^{-1}(t-\tau)d\tau \end{aligned} \right\} \quad (3-66)$$

即

用类似的方法得

$$\left. \begin{aligned} h_0(z) &= \int_0^T s_0(t) R_n^{-1}(z-t) dt \\ h_0(t) &= \int_0^T s_0(\tau) R_n^{-1}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (3-67)$$

即

将它们代入式(3-62)及式(3-63),经过整理得

$$E\{G | H_1\} = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)] R_n^{-1}(t-x) [s_1(x) - s_0(x)] dt dx \quad (3-68)$$

$$E\{G | H_0\} = -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)] R_n^{-1}(t-x) [s_1(x) - s_0(x)] dt dx \quad (3-69)$$

令

$$\sigma_G^2 = \int_0^T \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)] R_n^{-1}(t-x) [s_1(x) - s_0(x)] dt dx \quad (3-70)$$

则

$$E\{G | H_1\} = -E\{G | H_0\} = \sigma_G^2/2 \quad (3-71)$$

下面求两种假设情况下 G 的方差。在假设 H_1 下,由式(3-61)和式(3-62),可得

$$[G - E\{G\}] / H_1 = \int_0^T n(t) [h_1(t) - h_0(t)] dt$$

显然此差值与假设无关,于是两假设下 G 的方差相同,记为 $\text{Var}\{G\}$,等于

$$\begin{aligned} \text{Var}\{G\} &= E\{[G - E\{G\}]^2\} \\ &= \int_0^T \int_0^T R_n(t-\tau) [h_1(t) - h_0(t)] [h_1(\tau) - h_0(\tau)] dt d\tau \end{aligned} \quad (3-72)$$

但是由式(3-58)和式(3-60),有

$$s_1(t) - s_0(t) = \int_0^T R_n(t-\tau) [h_1(\tau) - h_0(\tau)] d\tau$$

将上式代入式(3-72),得

$$\text{Var}\{G\} = \int_0^T \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)] [h_1(t) - h_0(t)] dt \quad (3-73)$$

将式(3-66)和式(3-67)二者相减,得

$$h_1(z) - h_0(z) = \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)] R_n^{-1}(z-t) d\tau$$

将上式代入式(3-73),得

$$\text{Var}\{G\} = \int_0^T \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)] R_n^{-1}(t-\tau) [s_1(\tau) - s_0(\tau)] dt d\tau = \sigma_G^2 \quad (3-74)$$

于是统计量 G 的概率密度函数表示为

$$p(G | H_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma_G^2)^{1/2}} \exp\left[-(G + \frac{1}{2}\sigma_G^2)^2 / 2\sigma_G^2\right] \quad (3-75)$$

$$p(G | H_1) = \frac{1}{(2\pi\sigma_G^2)^{1/2}} \exp\left[-(G - \frac{1}{2}\sigma_G^2)^2 / 2\sigma_G^2\right] \quad (3-76)$$

若采用最小错误概率准则,且两种假设的检验概率相等,则 $\Lambda_0 = 1$,判决规则变成 $G \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 0$,这时系统的平均错误概率是

$$\begin{aligned} \bar{P}_e &= P(D_0 | H_1) = P(D_1 | H_0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2\pi\sigma_G^2)^{1/2}} \exp\left[-\left(G + \frac{\sigma_G^2}{2}\right)^2 / 2\sigma_G^2\right] dG \\ &= \int_{\sigma_G/2}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-z^2/2} dz = \text{erfc}\left(\frac{\sigma_G}{2}\right) \end{aligned} \quad (3-77)$$

该式说明,错误概率随 σ_G 增大而单调地减少。比较这个结果与第 2 章高斯白噪声中检测确知信号所导出的式(2-72),我们发现,除了以 $\sigma_G/2$ 代替 $[(1-r)E/N_0]^{1/2}$ 外,其余相同。式(2-72)中的 P_e 是式(3-77)的特例,为了证明这一点,只需将噪声相关函数 $R_n(\tau)$ 用 δ 函数代替即可。

最后说明两点:其一,这里讨论的是分析与处理问题的基本方法,根据给定的信号和噪声模型(相关函数)具体地求解积分方程,是十分冗繁的;其二,对于色噪声中检测确知信号的问题,除了上述方法外,也可以采用预白化处理的方法,即先把观测波形 $x(t)$ 通过白化滤波器,使其中的色噪声转换为白噪声,然后再按熟知的白噪声中检测确知信号的方法进行处理。

3.4 随机相位信号的检测

本节研究高斯色噪声背景下随机相位信号的检测问题。其特点是信号的初相随机未知,并在 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布,所以除要按复合假设检测理论对似然比求平均外,其他情况与信号确知的情況相类似。对于雷达型问题,两个假设为

$$H_0: x(t) = n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$H_1: x(t) = s(t) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

式中, $s(t) = A(t)\cos(\omega t + \theta)$ 是接收信号, $A(t)$ 是其包络, 相位 θ 是随机的, 且在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布。 $n(t)$ 是窄带高斯色噪声, 其均值为零, 相关函数已知为 $R_n(\tau)$ 。仍然采用似然比方法进行检测。为了求出两种假设下的似然函数, 我们先对最常见的色噪声——窄带噪声, 做一些讨论。

1. 窄带噪声的复包络

我们知道, 若信号为 $f(t)$, 则其预包络(或称为解析信号)为

$$f_p(t) \triangleq f(t) + j \cdot \mathcal{H}[f(t)]$$

式中, $\mathcal{H}[f(t)]$ 是 $f(t)$ 的希尔伯特变换。另一方面, 预包络又可写成 $f_p(t) = \tilde{f}(t)e^{j\omega t}$, 其中 $\tilde{f}(t)$ 是信号 $f(t)$ 的复包络。

窄带噪声可表示为

$$n(t) = u(t)\cos\omega t - v(t)\sin\omega t \quad (3-78)$$

$u(t)$ 和 $v(t)$ 是 $n(t)$ 的两个正交分量。 $n(t)$ 的希尔伯特变换为

$$\mathcal{H}[n(t)] = u(t)\sin\omega t + v(t)\cos\omega t$$

于是 $n(t)$ 的预包络为

$$n_p(t) = n(t) + j \cdot \mathcal{H}[n(t)] = [u(t) + jv(t)]e^{j\omega t} \quad (3-79)$$

显然

$$\tilde{z}(t) = u(t) + jv(t)$$

就是窄带噪声 $n(t)$ 的复包络。

我们来证明, 窄带噪声复包络的相关函数等于噪声相关函数复包络的 2 倍。噪声复包络的相关函数为

$$\begin{aligned} E\{\tilde{z}(t)\tilde{z}^*(t-\tau)\} &= E\{[u(t) + jv(t)][u(t-\tau) - jv(t-\tau)]\} \\ &= R_u(\tau) + R_v(\tau) - jR_{uv}(\tau) + jR_{vu}(\tau) \end{aligned}$$

考虑到两个正交分量的相关函数相等, 并且因为 $u(t)$ 、 $v(t)$ 是 t 的实函数, 故有

$$R_{vu}(\tau) = R_{uv}(-\tau) = -R_{uv}(\tau)$$

于是,窄带噪声复包络的相关函数为

$$E\{\tilde{z}(t)\tilde{z}^*(t-\tau)\} = 2[R_u(\tau) - jR_{uv}(\tau)] \quad (3-80)$$

另一方面,窄带噪声的相关函数为

$$R_n(\tau) = R_u(\tau)\cos\omega\tau + R_{uv}(\tau)\sin\omega\tau$$

利用上述求复包络的方法,易证 $R_n(\tau)$ 的复包络 $\tilde{R}_n(\tau) = R_u(\tau) - jR_{uv}(\tau)$, 故

$$E\{\tilde{z}(t)\tilde{z}^*(t-\tau)\} = 2\tilde{R}_n(\tau)$$

所以,噪声复包络的自相关函数等于噪声自相关函数复包络的 2 倍。

2. 似然函数

信号的信息全由其复包络携带,故下面对采用复包络进行推导。首先推导假设 H_1 下接收波形的似然函数。接收波形 $x(t)$ 可表示为

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{x}(t)e^{j\omega t}\} \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}(t)e^{j\theta} + \tilde{z}(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

式中, $\tilde{x}(t)$ 是接收波形复包络。 $\tilde{A}(t)e^{j\theta}$ 和 $\tilde{z}(t)$ 分别是信号和噪声的复包络, $\tilde{A}(t)$ 是 t 的已知复函数^①。将 $\tilde{x}(t)$ 做卡亨南-洛维展开,得

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k f_k(t)$$

$f_k(t)$ 满足以下积分方程

$$\int_0^T \tilde{R}_n(t-\tau) f_k(\tau) d\tau = \lambda_k f_k(t) \quad (3-81)$$

式中, $\tilde{R}_n(\tau)$ 为噪声自相关函数 $R_n(\tau)$ 的复包络。展开系数 x_k 由下式给出

$$x_k = \alpha_k + j\beta_k = \int_0^T \tilde{x}(t) f_k^*(t) dt \quad (3-82)$$

在无信号条件下,用类似于证明式(3-8)所用的方法,并考虑到本节中关于窄带噪声复包络的知识,易得

$$E\{x_k x_m^*\} = 2\lambda_k \delta_{km}$$

这表明复系数 x_k 是不相关的,由于它们又是高斯的,因此它们统计独立。注意 x_k 是二元高斯变量,因为它有由 α_k 和 β_k 分别给出的实部和虚部。

还可以证明 $E\{\tilde{x}(t)\tilde{x}(u)\} = 0$, 并由此得到 $E\{x_k x_m\} = 0$, 所以对于所有的 k 和 m 有

$$E\{\alpha_k \alpha_m\} = E\{\beta_k \beta_m\} = \lambda_k \delta_{km} \quad \text{及} \quad E\{\alpha_k \beta_m\} = 0$$

因此, x_k 的实部和虚部是统计独立的。请注意,以上结论虽然是在无信号条件下得到的,但是可以证明,在信号存在条件下它们仍然成立。

给定 θ 时, x_k 的数学期望是

$$\begin{aligned} E\{x_k | \theta\} &= E\left\{\int_0^T [\tilde{A}(t)e^{j\theta} + \tilde{z}(t)] f_k^*(t) dt\right\} \\ &= \left[\int_0^T \tilde{A}(t) f_k^*(t) dt\right] e^{j\theta} = a_k e^{j\theta} \end{aligned}$$

式中, a_k 是信号复包络 $\tilde{A}(t)$ 的卡亨南-洛维系数。

因为 $x_k = \alpha_k + j\beta_k$, 故

^① 虽然信号复包络与随机相位 θ 有关,但在计算接收波形似然函数时, θ 将作为杂散参量被平均掉,函数 $\tilde{A}(t)$ 实际上包含了信号的全部有用信息。因此,在下面的叙述中,有时也将 $\tilde{A}(t)$ 称为信号复包络。

$$E\{\alpha_k | \theta\} = \text{Re}\{a_k e^{j\theta}\}, \quad E\{\beta_k | \theta\} = \text{Im}\{a_k e^{j\theta}\}$$

式中, Re、Im 表示取实部和取虚部。这样, 对于前 n 个卡亨南-洛维系数, $x(t)$ 的似然函数是 $2n$ 维高斯密度函数

$$p\{\mathbf{x} | \theta\} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2\pi\lambda_k} \right) \exp \left[-\frac{(\alpha_k - \text{Re}\{a_k e^{j\theta}\})^2}{2\lambda_k} - \frac{(\beta_k - \text{Im}\{a_k e^{j\theta}\})^2}{2\lambda_k} \right]$$

注意到指数项可以写成绝对值

$$-\frac{1}{2\lambda_k} |\alpha_k - \text{Re}\{a_k e^{j\theta}\} + j(\beta_k - \text{Im}\{a_k e^{j\theta}\})|^2$$

即等效于

$$-\frac{1}{2\lambda_k} |\alpha_k + j\beta_k - a_k e^{j\theta}|^2 = -\frac{1}{2\lambda_k} |x_k - a_k e^{j\theta}|^2$$

故似然函数变为

$$p\{\mathbf{x} | \theta\} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2\pi\lambda_k} \right) \exp \left[-\sum_{k=1}^n |x_k - a_k e^{j\theta}|^2 / (2\lambda_k) \right]$$

当 n 趋于无穷时, 上式的极限是

$$p\{\mathbf{x} | \theta\} = c \cdot \exp \left[-\sum_{k=1}^n |x_k - a_k e^{j\theta}|^2 / (2\lambda_k) \right] \quad (3-83)$$

为了得出平均似然函数, 我们把式(3-83)的指数项化做另一种形式。先从绝对值项入手, 因为

$$\begin{aligned} |x_k - a_k e^{j\theta}|^2 &= (x_k - a_k e^{j\theta})(x_k^* - a_k^* e^{-j\theta}) \\ &= |x_k|^2 + |a_k|^2 - 2\text{Re}\{x_k a_k^* e^{-j\theta}\} \end{aligned}$$

于是

$$p\{\mathbf{x} | \theta\} = c \cdot \exp \left[\sum_{k=1}^n \frac{|x_k|^2 + |a_k|^2}{-2\lambda_k} \right] \cdot \exp \left[\sum_{k=1}^n \text{Re} \left\{ \frac{x_k a_k^* e^{-j\theta}}{\lambda_k} \right\} \right] \quad (3-84)$$

为方便计算, 定义两个实统计量 D 和 η , 分别表示为

$$D = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k a_k^*}{\lambda_k} \right|, \quad D e^{j\eta} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k a_k^*}{\lambda_k} \quad (3-85)$$

因此, 式(3-84)中第二个指数项变为

$$\text{Re}\{D e^{j(\eta-\theta)}\} = D \cos(\eta - \theta)$$

于是式(3-84)变为

$$p\{\mathbf{x} | \theta\} = c \cdot \exp \left[\sum_{k=1}^n \frac{|x_k|^2 + |a_k|^2}{-2\lambda_k} \right] \cdot \exp[D \cos(\eta - \theta)]$$

用相位的密度函数对似然函数进行平均, 求出平均似然函数为

$$p\{\mathbf{x}\} = c \cdot \exp \left[\sum_{k=1}^n \frac{|x_k|^2 + |a_k|^2}{-2\lambda_k} \right] I_0(D) \quad (3-86)$$

为了确定 D 的等效表示式, 由式(3-82)得

$$D e^{j\eta} = \int_0^T \tilde{x}(t) \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^* f_k^*(t)}{\lambda_k} \right] dt = \int_0^T \tilde{x}(t) \tilde{h}^*(t) dt \quad (3-87)$$

式中

$$\tilde{h}^*(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^* f_k^*(t)}{\lambda_k} \quad (3-88)$$

于是

$$D = \left| \int_0^T \tilde{x}(t) \tilde{h}^*(t) dt \right| \quad (3-89)$$

由式(3-89)可看出, 为了得到统计量 D , 应把接收波形 $x(t)$ 送入复冲激响应为 $\tilde{h}^*(T-t)$ 的滤波器, 取其输出的包络, 并在 $t=T$ 时采样。

剩下的问题是求滤波器函数复包络 $\tilde{h}(t)$ 的等效表达式。由式(3-88)有

$$\tilde{h}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k f_k(t)}{\lambda_k}$$

两边乘以 $\tilde{R}_n(t-\tau)$, 并对 τ 积分, 得

$$\int_0^T \tilde{R}_n(t-\tau) \tilde{h}(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \int_0^T \tilde{R}_n(t-\tau) f_k(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k f_k(t) \quad (3-90)$$

上式右边的求和项正是信号的已知复包络 $\tilde{A}(t)$ 的展开式。于是滤波器冲激响应 $\tilde{h}(t)$ 是下面积分方程的解

$$\int_0^T \tilde{R}_n(t-\tau) \tilde{h}(\tau) d\tau = \tilde{A}(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3-91)$$

综上所述, 平均似然函数(对随机相位取平均)由式(3-86)给出, 其中统计量 D 由式(3-89)给出, 而 $\tilde{h}(t)$ 则是积分方程(3-91)的解。

3. 最佳判决规则

与前面相同, 我们仍是将似然比与某一门限进行比较而做出判决。对于雷达检测问题, 在假设 H_1 下, 似然函数为

$$p\{\mathbf{x} | H_1\} = c \cdot \exp\left[\sum_{k=1}^n \frac{|x_k|^2 + |a_k|^2}{-2\lambda_k}\right] I_0(D)$$

在假设 H_0 下, 似然函数为

$$p\{\mathbf{x} | H_0\} = c \cdot \exp\left[\sum_{k=1}^n \frac{|x_k|^2}{-2\lambda_k}\right]$$

于是似然比为

$$\Lambda(x) = \frac{p(\mathbf{x} | H_1)}{p(\mathbf{x} | H_0)} = \exp\left[\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|^2}{-2\lambda_k}\right] I_0(D)$$

设门限为 Λ_0 , 则判决规则为

$$I_0(D) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0 \cdot \exp\left[\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|^2}{2\lambda_k}\right]$$

考虑到 I_0 是其宗量的单调增函数, 故判决规则最后可写成

$$D \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \beta \quad (3-92)$$

其中统计量 D 由式(3-89)给出。

本章小结

本章是在第2章讨论的加性高斯白噪声下的信号检测的基础上, 拓展到高斯色噪声情况下信号的检测。在实际情况中, 可能产生高斯色噪声的主要原因有:

(1) 实际噪声源和接收机的检测器之间存在诸如天线和射频滤波器等某种形式通带部件, 使白噪声通过之后产生频谱的再分布, 从而形成色噪声。

(2) 在接收信号中还可能含有高斯特征的干扰信号等色噪声信号。

关于在高斯色噪声中检测信号的方法。在第2章中已介绍过“预白化”方法。让接收信号通过白化滤波器, 使加性色噪声变成白噪声, 于是可以利用在高斯白噪声中检测信号的熟知办法来解决问题。

本章介绍另一种方法——基于相关函数的一种最佳变换,即卡亨南-洛维展开。我们知道,对于白噪声,按采样定理的规定,可对观测信号进行等间隔采样,各样点值是统计独立的。然而在色噪声情况下,再按采样定理对观测信号直接均匀抽样,无法达到各样点值是统计独立的。而 K-L 展开,它能在 $[0, T]$ 时间内把观测信号展开成一个特殊级数。其系数是不相关的,由于是高斯变量,所以也是独立的。这样就便于采用这些统计独立的系数作为接收信号的样本而写出似然函数的具体形式,从而构成似然比检测。

本章还讨论了在 K-L 展开基础上的高斯色噪声中确知信号的检测和检测功能。为高斯色噪声下的信号检测建立分析的理论基础和方法。对这部分内容未做深入展开讨论,感兴趣的读者可参考有关文献。

习 题 三

- 3.1 考虑启闭式二元数字通信系统,信源以等概率产生 0 和 1 码,通信系统采用调幅(ASK)方式。在假设 H_0 下和假设 H_1 下的接收信号模型为

$$H_0: x(t) = n(t), 0 \leq t \leq T$$

$$H_1: x(t) = as(t) + n(t), 0 \leq t \leq T$$

式中,信号 $as(t)$ 的振幅为 a , $s(t)$ 是归一化的确知信号,即

$$\int_0^T s^2(t) dt = 1$$

$n(t)$ 是均值为零、功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声。试分别用正交级数展开法和充分统计量的方法导出最小平均错误概率准则的信号检测判决表示式和最佳检测系统,并研究其检测性能。

- 3.2 在高斯白噪声中,一般二元确知信号波形检测的信号模型为

$$H_j: x(t) = s_j(t) + n(t), 0 \leq t \leq T, j = 0, 1$$

式中, $s_j(t)$ 是确知信号,能量为 E_{s_j} ($j = 0, 1$); $n(t)$ 是均值为零、功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声。现采用充分统计量的分析方法,已知在假设 H_0 下,接收信号 $x(t)$ 的前两个展开系数为

$$x_1 = \rho \sqrt{E_{s_0}} + n_1, x_2 = \sqrt{(1-\rho^2)E_{s_0}} + n_2$$

在假设 H_1 下,接收信号 $x(t)$ 的前两个展开系数为

$$x_1 = \sqrt{E_{s_1}} + n_1, x_2 = n_2$$

式中, ρ 是信号 $s_0(t)$ 与 $s_1(t)$ 的波形相关系数,定义为

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_{s_0} E_{s_1}}} \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt, |\rho| \leq 1$$

设 $x = (x_1, x_2)^T$ 是充分统计量,请利用概率密度函数 $p(x_1, x_2 | H_1)$ 和 $p(x_1, x_2 | H_0)$ 构成似然比检验,导出信号检测的判决表示式。

- 3.3 考虑发送信号周期为 $T = 2\pi/\omega_0$ 的二元移频键控(FSK)通信系统。在假设 H_0 下和假设 H_1 下发送的信号分别为

$$s_0(t) = a \sin \omega_0 t, 0 \leq t \leq T$$

$$s_1(t) = a \sin 2\omega_0 t, 0 \leq t \leq T$$

式中,信号的振幅 a 和频率 ω_0 已知,并假定各假设是等先验概率的。信号在信道传输中叠加了均值为零、功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声 $n(t)$ 。现采用最小平均错误概率准则,试用充分统计量的分析方法设计信号检测系统,并计算平均错误概率 P_e 。

第4章 序列检测

4.1 概述

到目前为止所考虑的问题中,信号检测是在预先确定好的观测时间内完成的,或者说观测样本数是固定的,称为固定样本检测或固定时间检测。这种检测是在固定样本检测中的一次观测或 n 次观测,而且证明观测次数 n 越大,准确度就越高。这里,观测值的总数 n 是固定的。然而在许多实际问题中,各观测值是按顺序得到的,如果不事先规定观测次数,而视实际状况而定,就可能在平均意义上使检测时间有所减少。把这种检测称为“序列检测”,也称为“序贯检测”。它是指那种事先不确定观测时间而留待检测过程中确定的检测,即做出判决时,观测样本“个数”或“维数”不是固定的假设检测。在许多情况中,如果观测之前不确定观测时间,而将何时终止观测这个问题,放在观测过程中根据所求结果的情况来决定,有可能获得更好的结果。事实上,在有些检测问题中,信噪比很大,致使信号的检测有可能在很短的时间内完成,而事先规定的时间(或次数)就显得过长(或过多)了。尤其像在雷达系统中,要求检测时间越短越好,但又要保证准确可靠,这两者是矛盾的。如何解决这一矛盾,在两者之间调整到恰到好处,这就是序列检测要解决的问题。

对于序列检测,观测时间 T_s 是一个随机变量,它随检测情况的不同而随机变化,在大信噪比情况下 T_s 可能很短,而在小信噪比情况下 T_s 可能较长。序列检测的特点就是把观测时间 T_s 作为随机变量而留待实验中确定,因而我们关心的也是它的平均检测时间 $E[T_s]$ 。当采样时间间隔 Δt 皆相等时,研究平均采样数目 $E[n]$ 与 $E[T_s]$ 是等效的,它们之间的简单依从关系是

$$E[T_s] = E[n] \cdot \Delta t \quad (4-1)$$

序列检测与固定样本数检测相比,其主要优点是其平均观测时间 $E[T_s]$ 小于固定样本数的观测时间 T ,尤其在大信噪比的情况下更是如此。其缺点是检测时间具有随机性,在信噪比小的情况下,检测时间可能很长,甚至于 $E[T_s] \gg T$ 。

为了简单起见,这里仅限于讨论二元假设检验问题,即双检测问题的序列检测。虽然它可以使用 Bayes 法,但由于这种检测在计算上的复杂性,且得到的结果相当复杂。因而把注意力集中在修正的检测概率最大(NP)(等同于修正的奈曼-皮尔逊准则)的检测上,这个检验又称作瓦尔德序列检验或序列概率比检验(SPRT)。在许多应用领域如模式识别、雷达中正适合于 NP 检测。同时,在讨论中仍采用似然比检测表示式。

序列检测在进行假设检验时,不预先规定观测样本的数目 n ,而是从获得第一个样本就开始考察其所要研究的指标,如果在满足性能要求的前提下能做出判决,则检测过程便告结束。否则,再取第二个观测样本,然后根据这两个样本进行处理和判决,以决定是否需要进行观测。如此进行,逐步增加观测样本数目,增多信息量,直到能做出满足性能指标要求的判决为止。序列检测的最大优点是在给定的检测性能要求下,它所用的平均检测时间最短。

根据 NP 准则,在 n 次观测后进行判决,其判别式为

$$\Lambda(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_{NP} \quad (4-2)$$

其中,门限似然比 Λ_{NP} 是由给定的虚警概率 $P_{fa} = P(D_1 | H_0) = \alpha$ 所决定的。

与固定维数样本的假设检验不同点在于序列检测门限,序列检测设置上门限与下门限两个门限,当检验统计量大于或等于上门限时,判为 H_1 ;而当检验统计量小于或等于下门限时,判为 H_0 ;若检验统计量处于上、下门限之间,不做判决,顺序增加观测样本数,再计算相应的检验统计量,按照类似规则与门限做比较,直到做出判决为止。可见,做出判决时序列检测的观测样本的维数是不固定的。由此可见,序列检测是分阶段进行的,它将观测过程分成许多持续期 Δt 足够小的阶段,阶段的数目 n 是个随机变量,它的具体值要在检测过程中确定。在每个这样的小阶段终了时,检测系统都要根据事先规定好的判决规则,进行一次判决,把似然比与所确定的两个门限值 Λ_{NP0} 和 Λ_{NP1} 进行比较,选择三种可能之一:

$$(1) \Delta x \geq \Lambda_{NP1}, \text{判断假设 } H_1 \text{ 成立,判定有信号;} \quad (4-3)$$

$$(2) \Delta x \leq \Lambda_{NP0}, \text{判断假设 } H_0 \text{ 成立,判定无信号;} \quad (4-4)$$

$$(3) \Lambda_{NP0} < \Delta x < \Lambda_{NP1} \text{ 时,转入下一阶段。} \quad (4-5)$$

其中, Λ_{NP0} 和 Λ_{NP1} 分别由给定的错误概率 $P_{fa} = P(D_1 | H_0) = \alpha$, $P_m = P(D_0 | H_1) = \beta$ 来计算,因此在第 j 个阶段终了时(j 泛指检测终止前的任一阶段),只能有两个结果之一,即或因做出了“有”、“无”信号的判断而检测告终;或因不能做出上述判断而继续进行下一阶段的检测。结束检测的阶段 n 称为终止阶段,且将总阶段数 n 称为采样数目。由于一般都使每一个阶段的持续时间(即采样时间) Δt 相等,故总的观测时间为

$$T_s = n\Delta t \quad (4-6)$$

采样数目 n 是一个随机变量,因而 T_s 也是一个随机变量。

对于第 j 个阶段,若相继得到的接收波形的采样值序列为 (x_1, x_2, \dots, x_n) ,那么该序列的一切可能取值的集合构成一个 n 维空间。序列检测的判决规则,实际上是将观测空间 x 划分为三个相邻但不重叠的区域 D_0 、 D_1 和 D_2 ,如图 4.1 所示。如果在第一个检测阶段内,得到的观测波形采样值 x_1 落入区域 D_1 或 D_0 ,则相应地做出“有”或“无”信号的判决而结束检测;如果 x_1 落入区域 D_2 ,则转入第二个检测阶段继续进行检测。如果从头两个阶段得到的采样值 (x_1, x_2) 落入区域 D_1 或 D_0 ,则相应做出“有”或“无”信号的判决而终止检测;如果 x_1, x_2 落入区域 D_2 ,则转入第三个检测阶段继续进行检测,以次类推,一直进行到在第 n 个阶段内,采样值 (x_1, x_2, \dots, x_n) 落入区域 D_1 或 D_0 时而相应做出“有”或“无”信号的判断为止。显然,现在的关键是根据给定值 α 和 β 来确定门限 Λ_{NP0} 和 Λ_{NP1} ,使观测空间的划分在某种意义上保证最佳检测,即平均风险 \bar{R} 最小。

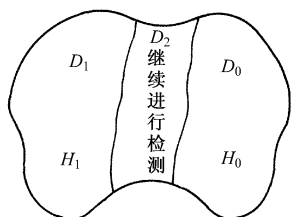


图 4.1 观测空间 x 的划分

这种采用修正的奈曼-皮尔逊准则的“序列似然比检测”就是所谓“瓦尔特序列检测”,而雷达系统也正适合于这种检测。当然也可以在序列检测中应用贝叶斯准则,但得到的结果要复杂得多。

4.2 瓦尔特序列检测

设计瓦尔特序列检测的关键问题是根据指定的虚警概率 $P_a = P(D_1 | H_0)$ 和漏报概率 $P_m = P(D_0 | H_1)$ 值计算 Λ_{NP0} 和 Λ_{NP1} 。解决这一类问题的基本方法是将观测矢量的序列求平均值。

合理地选取每一阶段的持续时间 Δt ,它应当是保证各采样值为统计独立条件的最小时间

间隔。由此,得到一系列观测样值 $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots$ 。第 j 阶段似然比计算如下

$$\Lambda(\mathbf{x}_j) = \frac{p(\mathbf{x}_j | H_1)}{p(\mathbf{x}_j | H_0)} \quad (4-7)$$

一般说来,在每一步(也就是对每一个 j 值)计算似然比 $\Lambda(\mathbf{x}_j)$ 时,要求知道直到该步的诸采样值 x_1, x_2, \dots, x_j 的联合概率密度函数。但是,如果这些采样值是互相独立同分布的,则用如下的递推法。

多次观测时,每观测一次,增加一批数据,所以每次使用的似然比都不同,因而构成不同的似然比序列。

第一次观测时对 x_1 个矢量有 j 个采样: $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1j}$, 共有 j 个样本,这时似然比为

$$\Lambda(x_1) = \Lambda(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1j}) = \frac{p(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1j} | H_1)}{p(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1j} | H_0)} = \frac{p(x_1 | H_1)}{p(x_1 | H_0)}$$

第二次观测时对 x_1, x_2 有 j 个采样: $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2j}$, 共有 $2j$ 个样本,似然比为

$$\begin{aligned} \Lambda(x, x_2) &= \Lambda(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1j}; x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2j}) \\ &= \frac{p(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1j}; x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2j} | H_1)}{p(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1j}; x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2j} | H_0)} = \frac{p(x_1, x_2 | H_1)}{p(x_1, x_2 | H_0)} \end{aligned}$$

第 k 次观测时对 k 个矢量 x_1, x_2, \dots, x_k , 又有 j 个采样,共有 kj 个样本。似然比为

$$\Lambda(x_1, x_2, \dots, x_k) = \dots = \frac{p(x_1, x_2, \dots, x_k | H_1)}{p(x_1, x_2, \dots, x_k | H_0)}$$

用递推法容易计算似然比为

$$\begin{aligned} \Lambda(x_j) &= \frac{p(x_j | H_1)}{p(x_j | H_0)} = \prod_{i=1}^j \frac{p(x_i | H_1)}{p(x_i | H_0)} \\ &= \frac{p(x_j | H_1)}{p(x_j | H_0)} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{p(x_i | H_1)}{p(x_i | H_0)} = \Lambda(x_j) \Lambda(x_{j-1}) \end{aligned} \quad (4-8)$$

其初始条件是

$$\Lambda(x_1) = \Lambda(x_1) \quad (4-9)$$

式中, x_j 是 j 维矢量,因而 $p(x_j | H)$ 是 j 维概率密度。

根据虚警概率 p_{fa} 和漏报概率 p_m 来决定门限。设指定的错误概率为

$$p_{fa} = P(D_1 | H_0) = \alpha, p_m = P(D_0 | H_1) = \beta \quad (4-10)$$

现在推导 α, β 和门限 $\Lambda_{NP0}, \Lambda_{NP1}$ 之间的基本关系。虚警概率和检测概率分别定义为

$$P_{fa} = P(D_1 | H_0) = \int_{D_1} p(\mathbf{x}_j | H_0) d\mathbf{x}_j \quad (4-11)$$

$$P_d = P(D_1 | H_1) = \int_{D_1} p(\mathbf{x}_j | H_1) d\mathbf{x}_j = \int_{D_1} \Lambda(\mathbf{x}_j) p(\mathbf{x}_j | H_0) d\mathbf{x}_j \quad (4-12)$$

式中, D_1 表示判决为 H_1 的区域。当假设 H_1 为真并且判决也是 H_1 时,必有 $\Lambda(\mathbf{x}_j) \geq \Lambda_{NP1}$ 。因此式(4-12)可写成

$$P(D_1 | H_1) \geq \Lambda_{NP1} \int_{D_1} p(\mathbf{x}_j | H_0) d\mathbf{x}_j \quad (4-13)$$

由于式(4-13)右边的积分是虚警概率,其值等于 α , 而

$$P(D_1 | H_1) = 1 - P(D_0 | H_1) = 1 - \beta \quad (4-14)$$

将式(4-14)代入式(4-13),得

$$\Lambda_{NP1} \leq \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (4-15)$$

同理,根据式(4-4),当判断为 H_0 时,应有

$$p(\mathbf{x}_j | H_1) \leq \Lambda_{NP0} p(\mathbf{x}_j | H_0) \quad (4-16)$$

在 D_0 区域积分

$$\int_{D_0} p(\mathbf{x}_j | H_1) d\mathbf{x}_j \leq \int_{D_0} \Lambda_{NP0} p(\mathbf{x}_j | H_0) d\mathbf{x}_j \quad (4-17)$$

$$\text{即} \quad \beta \leq \Lambda_{NP0} (1 - \alpha) \quad \text{或} \quad \Lambda_{NP0} \geq \frac{\beta}{1 - \alpha} \quad (4-18)$$

由式(4-15)和式(4-18)所求得的只是 Λ_{NP1} 的上界和 Λ_{NP0} 的下界。准确地确定 Λ_{NP1} 和 Λ_{NP0} 还是困难的,因为似然比是随 j 变化的函数,在实验终止时,通常不可能恰到门限值,而很可能要越过门限值,此称为“越界”现象。通常假设“越界”不大,特别当 j 较大时,“越界”可忽略,即假定实验终止时,似然比恰等于门限值 Λ_{NP0} 和 Λ_{NP1} ,而不发生“越界”。在选取 Δt 很小时,这种假定是完全可信的,因为第 $n-1$ 阶段未越界,而第 n 阶段实验终止,两阶段的似然比相差甚微,便可认为与边界重合。在此假定下,式(4-15)和式(4-18)中等号成立,即

$$\Lambda_{NP0} = \frac{\beta}{1 - \alpha}, \quad \Lambda_{NP1} = \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (4-19)$$

这就是根据 α, β 确定门限的简单公式。当 $n \gg 1$ 时,该公式及根据它导出的一些近似关系式,实际上都足够准确。

应该指出,这里还必须满足 $\alpha \leq 0.5, \beta \leq 0.5$ (否则,两门限 Λ_{NP0} 和 Λ_{NP1} 倒置)。不过在实际中,这个条件一般都是满足的。

我们来考虑在每个假设下做出判决所需要的平均观测次数,即采样数目。为便于计算,采用对数似然比。由式(4-8)可得到递推公式

$$\ln \Lambda(\mathbf{x}_j) = \ln \Lambda(\mathbf{x}_{j-1}) + \ln \Lambda(x_j) \quad (4-20)$$

及相应的门限 $\ln \Lambda_{NP0}$ 和 $\ln \Lambda_{NP1}$ 。如果似然比的增量 $\ln \Lambda(x_j)$ 很小,至多超过门限很少一点,于是使得在观测终止时 $\ln \Lambda(x_j)$ 超过门限 $\ln \Lambda_{NP1}$ 不多(或者低于门限 $\ln \Lambda_{NP0}$ 不多)则由式(4-19)和式(4-20)两边分别取对数,得

$$\ln \Lambda_{NP1} \approx \ln \left(\frac{1 - \beta}{\alpha} \right), \quad \ln \Lambda_{NP0} \approx \ln \left(\frac{\beta}{1 - \alpha} \right) \quad (4-21)$$

求序列检测平均观测次数,也就是求在假设 H_1 或假设 H_0 为真的条件下做出判决所需要的观测次数的平均数 $E(n | H_1)$ 和 $E(n | H_0)$,其中 n 是终止阶段的采样数,是个随机变量。假定 n 次观测后结束实验,则意味着 $\ln \Lambda(x_n)$ 取 $\ln \Lambda_{NP0}$ 和 $\ln \Lambda_{NP1}$ 之一。如果假设 H_0 为真,而 $\ln \Lambda(x_n) \geq \ln \Lambda_{NP1}$,则为虚报,概率为 α ,于是 $P\{\ln \Lambda(x_n) \leq \ln \Lambda_{NP0}\} = 1 - \alpha$ 。如果假设 H_1 为真,而 $\ln \Lambda(x_n) \leq \ln \Lambda_{NP0}$,则为漏报,概率为 β ,于是 $P\{\ln \Lambda(x_n) \geq \ln \Lambda_{NP1}\} = 1 - \beta$ 。由于随着观测次数的增加, $\ln \Lambda(x_n)$ 的每一步增量都很小,故可认为最终采样 x_n 的 $\ln \Lambda(x_n)$ 只取两个数,或者等于 $\ln \Lambda_{NP0}$,或者等于 $\ln \Lambda_{NP1}$,因此, $\ln \Lambda(x_n)$ 的条件数学期望分别等于

$$E\{\ln \Lambda(\mathbf{x}_n) | H_0\} = \alpha \cdot \ln \Lambda_{NP1} + (1 - \alpha) \cdot \ln \Lambda_{NP0} \quad (4-22)$$

$$\text{和} \quad E\{\ln \Lambda(\mathbf{x}_n) | H_1\} = (1 - \beta) \ln \Lambda_{NP1} + \beta \cdot \ln \Lambda_{NP0} \quad (4-23)$$

现在定义一个二元变量 k_j , 即

$$k_j = \begin{cases} 1, & \text{到}(j-1) \text{步尚未做出判决} \\ 0, & \text{(}j-1\text{)步前已做出了判决} \end{cases} \quad (4-24)$$

由于假定第 n 步结束检测,所以可利用式(4-20)和式(4-24)写出

$$\ln \Lambda(\mathbf{x}_n) = \sum_{j=1}^n \ln \Lambda(x_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} k_j \ln \Lambda(x_j) \quad (4-25)$$

在每个假设下对式(4-25)两边取数学期望,得

$$\begin{aligned} E[\ln\Lambda(\mathbf{x}_n) | H_i] &= E\left[\sum_{j=1}^{+\infty} k_j \ln\Lambda(x_j) | H_i\right] \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} E[k_j | H_i] \cdot E[\ln\Lambda(x_j) | H_i] \quad (i = 0, 1) \end{aligned} \quad (4-26)$$

若在每一个假设下,观测测量都是独立同分布的,则

$$\ln\Lambda(x_n) = \ln \prod_{k=1}^n \Lambda(x_k) = \sum_{k=1}^n \ln\Lambda(x_k) = n \ln\Lambda(x) \quad (4-27)$$

式中, $\Lambda(x)$ 是任意一次观测的似然比。这样对于所有 j , 满足

$$E[\ln\Lambda(\mathbf{x}_j) | H_i] = E[\ln\Lambda(\mathbf{x}) | H_i] \quad (4-28)$$

$$\text{则有} \quad E[\ln\Lambda(\mathbf{x}_n) | H_i] = E[\ln\Lambda(\mathbf{x}) | H_i] \sum_{j=1}^{+\infty} E[k_j | H_i] \quad (4-29)$$

根据式(4-24) k_j 的定义,容易推得

$$E[k_j] = P(n \geq j) \quad (4-30)$$

$$\text{因此} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} E[k_j] = \sum_{j=1}^{+\infty} P(n \geq j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j P(n = j) = E[n] \quad (4-31)$$

这样,有

$$E[\ln\Lambda(x_n) | H_1] = E[n \ln\Lambda(x) | H_1] = E[\ln\Lambda(x | H_1)] E(n | H_1) \quad (4-32)$$

于是

$$E(n | H_1) = \frac{E[\ln\Lambda(x_N) | H_1]}{E[\ln\Lambda(x | H_1)]} \quad (4-33)$$

由式(4-31)、式(4-32)和式(4-23),得到假设 H_1 为真时的平均采样数为

$$E[n | H_1] = \frac{(1 - \beta) \ln\Lambda_{NP1} + \beta \ln\Lambda_{NP0}}{E[\ln\Lambda(\mathbf{x}) | H_1]} \quad (4-34)$$

同样,由式(4-30)、式(4-31)和式(4-22),得

$$E[n | H_0] = \frac{\alpha \ln\Lambda_{NP1} + (1 - \alpha) \ln\Lambda_{NP0}}{E[\ln\Lambda(\mathbf{x}) | H_0]} \quad (4-35)$$

式中

$$E[\ln\Lambda(\mathbf{x}) | H_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\Lambda(\mathbf{x}_j) p(\mathbf{x}_j | H_i) d\mathbf{x}_j \quad (i = 0, 1) \quad (4-36)$$

这样,可求出总平均采样数为

$$E[n] = qE[n | H_0] + pE[n | H_1] \quad (4-37)$$

其中 $p = P(H_1)$ 和 $q = P(H_0)$ 分别是有信号和无信号时的先验概率。瓦尔特和沃尔福维茨证明了,对给定值 α, β , 序列似然比检测使平均观测次数 $E[n | H_0]$ 和 $E[n | H_1]$ 最小。

在以上讨论中看到,由于出现了不做出最后判决的中间结果,那么序列检测过程是否会在 Λ_{NP0} 和 Λ_{NP1} 之间发生振荡而无止境呢? 瓦尔特证明了,如果观测信号的采样值 x_j 是统计独立的,则实验终止的概率为 1,以数学式表达,即

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P(n \geq j) = 0 \quad (4-38)$$

当 $\ln\Lambda_{NP0} < \ln\Lambda(\mathbf{x}) < \ln\Lambda_{NP1}$ 时,则需再一次采样。在一般情况下,可以令 $\delta = \ln\Lambda_{NP1} - \ln\Lambda_{NP0}$, 则有

$$P\{|\ln\Lambda(x_i)| < \delta\} = p < 1 \quad (4-39)$$

前 j 阶段的观测值都使得 $|\ln\Lambda(x_i)| < \delta$ 概率就是 p^j 。随着 j 趋向无穷大时,这个概率趋于零,从而,式(4-38)成立。尽管如此,由于 n 的随机性,在小信噪比检测中, n 可能很大,即检测时间长,这就是这种方法的基本特点。弥补的办法是,最好把 n 的上限 n_{\max} 固定在允许的采样

总数上,这称做截断的序列似然比检测。最后达到 n_{\max} 个采样值时,就转为固定观测次数的检验方法,强制做出假设 H_1 或是假设 H_0 成立的判决。

在固定数量检测中,我们曾用检测错误概率 P_e 或平均风险 \bar{R} 为指标来评价检测质量。同样的,在序列似然比检测中,可以用检测错误概率和平均观测时间的线性组合来评价检测质量,即广义平均风险 $E\{R_s\}$

$$E\{R_s\} = c_1 P(H_0)P_{fa} + c_2 P(H_1)P_m + c_3 \bar{T} \quad (4-40)$$

其中, c_3 也是代价函数,它反映了大的平均观测时间的相对危害性。 \bar{T} 是平均观测时间,即式(4-1)中的 $E[T_s]$,对照式(4-37),则有

$$\bar{T} = P(H_0)\bar{T}_0 + P(H_1)\bar{T}_1 \quad (4-41)$$

显然, $E\{R_s\}$ 越小,检测系统的质量越好。能保证广义平均风险最小的序列检测系统就是最佳序列检测系统。这种准则称为最小广义平均风险准则。在给定 $\alpha, \beta, P(H_0), P(H_1), c_1, c_2$ 和 c_3 的条件下,最小广义风险准则便等效于最小总平均检测时间准则。序列似然比检测方法在上述条件下,给出最小平均检测时间。

4.3 序列检测与固定样本检测的比较

下面举一个例子来说明序列检测相对于固定样本数检测的优越性。

【例 4.1】 类似于例 4.1,本例讨论在高斯噪声下,恒定电压信号序列的检测问题。两个假设为

$$H_1 : x_i = s_i + n_i, \quad H_0 : x_i = n_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (4-42)$$

式中,恒定电压 $s_i = a_1$; 高斯噪声样本 n_i 的均值为零,方差为 σ_n^2 ,而且诸 n_i 统计独立。于是有信号和无信号时, x_i 的概率密度分别为

$$p(x_i | H_1) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp[-(x_i - a_1)^2 / 2\sigma_n^2] \quad (4-43)$$

$$p(x_i | H_0) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp(-x_i^2 / 2\sigma_n^2) \quad (4-44)$$

$$\text{因而} \quad \ln \Lambda(x_i) = \ln \frac{p(x_i | H_1)}{p(x_i | H_0)} = \frac{a_1 x_i}{\sigma_n^2} - \frac{a_1^2}{2\sigma_n^2} = \frac{a_1 x_i}{\sigma_n^2} - \frac{d}{2} \quad (4-45)$$

式中, $d = \frac{a_1^2}{\sigma_n^2}$ 是功率信噪比。由式(4-43)至式(4-45)可得

$$E[\ln \Lambda(x) | H_0] = -d/2 < 0 \quad (4-46)$$

$$E[\ln \Lambda(x) | H_1] = d/2 > 0 \quad (4-47)$$

将式(4-46)和式(4-47)分别代入式(4-35)和式(4-36),得

$$E[n_x | H_1] = \frac{(1 - \beta) \ln \Lambda_{NP1} + \beta \ln \Lambda_{NP0}}{d/2} \quad (4-48)$$

$$E[n_x | H_0] = \frac{(1 - \alpha) \ln \Lambda_{NP0} + \alpha \ln \Lambda_{NP1}}{-d/2} \quad (4-49)$$

在等采样间隔 Δt 条件下,有信号和无信号时,序列检测的平均检测时间分别为

$$E[n_x | H_1] \Delta t, \quad E[n_x | H_0] \Delta t$$

另一方面,在相同的条件下,对于固定时间 $T = n\Delta t$ 的检测可得如下结果。设独立高斯分布的样本和 $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, 则

$$p(x|H_0) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi n}} \exp(-x^2/2n\sigma_n^2) \quad (4-50)$$

$$p(x|H_1) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi n}} \exp[-(x - na_1)^2/2n\sigma_n^2] \quad (4-51)$$

于是虚警概率为

$$P_{fa} = \int_T^{+\infty} p(x|H_0) dx = \alpha = 1 - \Phi\left(\frac{T}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) = \Phi\left(-\frac{T}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) \quad (4-52)$$

而正确检测概率为

$$P_d = P(D_1|H_1) = 1 - \beta = \int_T^{+\infty} p(x|H_1) dx = \Phi\left(-\frac{T - na_1}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) \quad (4-53)$$

联立求解式(4-52)和式(4-53),可得

$$n = \frac{-\sigma_n^2 [\Phi^{-1}(\alpha) - \Phi^{-1}(1 - \beta)]^2}{a_1^2} \quad (4-54)$$

式中, $\Phi(\cdot)$ 是标准正态累积分布函数。 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 是 $\Phi(\cdot)$ 的逆。

至此,我们就可以对两种检测方法进行比较了。由式(4-48)、式(4-49)及式(4-54),可得序检测的平均采样数与固定样本检测的采样数之比,在两种假设下分别为

$$\frac{E[n_x|H_1]}{n} = -2 \frac{\beta \ln \Lambda_{NP0} + (1 - \beta) \ln \Lambda_{NP1}}{[\Phi^{-1}(\alpha) - \Phi^{-1}(1 - \beta)]^2} \quad (4-55)$$

$$\text{和} \quad \frac{E[n_x|H_0]}{n} = 2 \frac{(1 - \alpha) \ln \Lambda_{NP0} + \alpha \ln \Lambda_{NP1}}{[\Phi^{-1}(\alpha) - \Phi^{-1}(1 - \beta)]^2} \quad (4-56)$$

两式所得值又称为采样数的缩短因子

在 $\alpha = 10^{-4}$ 和 $0.1 < \beta < 0.5$ 的条件下,式(4-55)和式(4-56)可简化为

$$\frac{E[n_x|H_1]}{n} \approx \frac{-2 \left[\beta \ln \beta + (1 - \beta) \ln \left(\frac{1 - \beta}{\alpha} \right) \right]}{[\Phi^{-1}(\alpha) - \Phi^{-1}(1 - \beta)]^2} \quad (4-57)$$

$$\text{和} \quad \frac{E[n_x|H_0]}{n} \approx \frac{2 \ln \beta}{[\Phi^{-1}(\alpha) - \Phi^{-1}(1 - \beta)]^2} \quad (4-58)$$

将式(4-57)和式(4-58)给出的 $E[n_x|H_i]/n, (i = 0, 1)$ 对发现概率 $P(D_1|H_1)$ 的函数关系绘成曲线示于图 4.2 中。由此图可以看出:

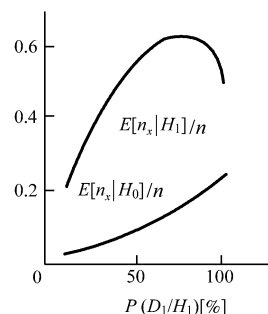


图 4.2 $E[n|H_1]/n$ 和 $E[n|H_0]/n$ 对 $P(D_1|H_1)$ 的关系曲线

(1) 在所有条件下,序列检测的平均采样数都比固定样本数检测的采样数要少。例如在 $P(D_1|H_1) = 50\%$ (即 $\beta = 0.5$) 的区域内,有信号时的缩短因子为 $3/5$,而无信号时的缩短因子为 $1/10$ 。

(2) 无信号时采用序列检测获得的好处比有信号时要大。

(3) $E[n_x|H_i]/n, (i = 0, 1)$ 在相当大的范围内都是 $P(D_1|H_1)$ 的递增函数, $P(D_1|H_1)$ 越小(即 β 越大)时, $E[n_x|H_i]/n (i = 0, 1)$ 也越小,也就是序列检测的优越性越显著。

基于上述三点结论,序列检测最好应用于这样的情况:(1) $\alpha \ll \beta$; (2) 无信号的概率远大于有信号的概率,即 $q \ll p$ 。雷达经常遇到的正是这样一种情况,因此序列检测很适合于雷达系统。在最佳序列检测准则下,可使总平均采样数做到最小,从而节省了雷达搜索目标的时间,提高了搜索的效率。

4.4 序列检测在雷达中的实际应用^[13]

在雷达应用中序列检测的定义如下：

序列检测是一种自动检测方法，它分成两个步骤或多个步骤，正常情况下，第一步采用大的虚警概率，最后一步采用低的虚警概率。在可控扫描的雷达中，可利用首次检测使扫描返回到可疑目标位置，停留在可疑目标位置或在可疑目标处停留更长的时间。

对于序列检测，在 20 世纪 50 年代和 60 年代进行过大量的分析，但这项技术直到部署了电扫雷达之后才得以有效的开发和利用。该类雷达通常采用简单的两步序列检测，称为检测—确认法。

通过序列检测法获得的灵敏度的提高，取决于目标可以处于的距离—多普勒检测单元数、扫描程序的灵活性和在第一步产生告警信号的那些波束位置进行反复观察的可用时间。灵敏度的提高范围从 4.4dB(每个波束有 30 个检测单元)到 3.2dB(每个波束有 300 个检测单元)。

4.4.1 两步序列探测概率

在两步序列检测法的设计中，通常将固定的脉冲数 n_1 和 n_2 分配给驻留在特定位置的两个波束。只有在首次检测产生告警信号的情况下才会出现第二次波束停留。目标检测要求两次停留时都有通过门限。在采用窄波束进行空域搜索的三坐标雷达和多功能雷达里，时间安排的限制通常要求只安排一个首次驻留脉冲($n_1=1$)，而二次驻留(确认)的更多能量是在 $n_2>1$ 或 $n_2=1$ 以及有更大脉冲能量的情况下获得的。波束位置中输出虚警的概率 P_{fas} 由下式给出

$$P_{\text{fas}} = P_{\text{f1}} P_{\text{f2}} = [1 - (1 - p_{\text{fa1}})^{n_{\text{d1}}}] [1 - (1 - p_{\text{fa2}})^{n_{\text{d2}}}] \approx n_{\text{d1}} p_{\text{fa1}} n_{\text{d2}} p_{\text{fa2}} \quad (4-59)$$

式中， P_{f1} 和 P_{f2} 为第一次和第二次驻留的虚警概率， p_{fa1} 和 p_{fa2} 为第一次和第二次驻留每个检测单元的虚警概率， $n_{\text{d1}} = n_{\text{t1}} n_{\text{f1}}$ 和 $n_{\text{d2}} = n_{\text{t2}} n_{\text{f2}}$ (其中 n_{t} 为距离门单元数， n_{f} 为多普勒滤波器单元数)为观测的距离—多普勒检测单元数。第一次驻留必须对所有可能的目标距离—多普勒单元进行观测，但第二次驻留可将灵敏单元限制在第一次驻留所产生告警信号的邻近一个或几个单元里，其数量取决于响应第一次驻留所产生的告警信号的滞后时间 t_x 。在 1000 或更多波束位置扫描期间，要使虚假输出少于 1 次，通常要求 P_{fas} 在 $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 的数量级上。这时，虚警率 $n_{\text{d1}} P_{\text{f1}}$ 和 $n_{\text{d2}} P_{\text{f2}}$ 将位于 0.001 和 0.1 之间。对于第一次驻留，通常会选择高的值。

两步法的探测概率 P_{ds} 是第一步探测概率 P_{d1} 和第二步探测概率 P_{d2} 的乘积，第二步在第一步检测之后。由于起伏目标的两步概率并不是独立的，所以不可总是采用简单的概率的乘积，下面将给出其计算方法。由于观测少些单元($n_{\text{d2}} \ll n_{\text{d1}}$) 允许的门槛低，并在第二步中的能量足够，所以整个探测概率通常接近第一步的探测概率： $P_{\text{ds}} \rightarrow P_{\text{d1}}$ 。

4.4.2 有快速确认的序列检测

对序列检波器的分析必须考虑起伏目标的特性和对第一步告警信号响应的滞后时间 t_x 。如果目标正在起伏(这种情况几乎不可避免)，那么最好立即采用相同的载波频率做出响应，以确保在第一次驻留中检测到的信号不在获得确认($t_x \ll t_c$) (t_c 为固定目标的相关时间)前衰落。当两步的信号之间相关时，就不能简单地采用所选的两个探测概率 P_{d1} 和 P_{d2} 之积来计算得到给定的联合探测概率 P_{ds} 所需的 SNR。

从另一方向入手，当给定了两个输入 SNR 值时，可求得下列联合概率：

$$P_{ds} = P_{d1} \left(\frac{S_1}{L_f(P_{ds})}, p_{fa1}, n_1 \right) P_{d2} \left(\frac{S_2}{L_f(P_{ds})}, p_{fa2}, n_2 \right) \quad (4-60)$$

式中, L_f 为起伏损耗; S_1 和 S_2 分别为第一步和第二步计算中的信—噪比, 并用一个解方程式的程序来解输出探测概率 P_{ds} 。

4.4.3 延迟确认的序列检测

如果对每一步告警信号的响应延迟了 $t_x \geq t_c$, 那么就可认为第一步及接下来各步的探测概率是独立的。现在, 对上述求解 P_{ds} 的步骤进行一些改动, 以利用各个独立的起伏损耗的值。起伏损耗的值是以探测概率 P_{d1} 和 P_{d2} 而不是以输出 P_{ds} 为基础的。给定输入 SNR 后, 要解的方程式为

$$\left. \begin{aligned} P_{d1} &= P_d \left(\frac{S_1}{L_f(P_{d1})}, p_{fa1}, n_1 \right) \\ P_{d2} &= P_d \left(\frac{S_2}{L_f(P_{d2})}, p_{fa2}, n_2 \right) \\ P_{ds} &= P_{d1} P_{d2} \end{aligned} \right\} \quad (4-61)$$

4.4.4 序列检测的能量和时间要求

两步序列检测的每个波束位置的总能量比要求为

$$E = n_1 D_{11} + p_{f1} n_2 D_{12} \quad (4-62)$$

式中, D_1 为单个脉冲能量比。假定真实目标数量少, 以至于大多数第一步告警信号都是虚假的。单步过程的性能提高取决于第一步告警信号概率 p_{fa1} 的可检测性因子(见图 4.3), 与在没有确认步骤即 $P_{fa} = P_{fas}/n_{d1}$ 时适用的可检测性因子之间的差。对于低探测概率和高虚警概率(图 4.3 曲线的左下部), 可检测性因子间的差最大。随着检测单元数 n_{d1} 的增加, P_{fa} 和 P_{fa1} 都会降低, 但可检测性因子之间的差也减小了, 相应的检测性能的改进幅度也小些。一般情况下可提高 1dB 或 2dB。

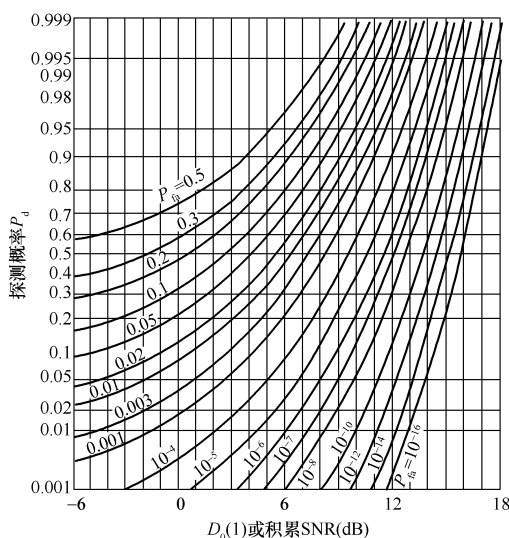


图 4.3 稳定目标的可检测性因子 $D_0(1)$

本章小结

序列检测也称瓦尔特检测, 是一种比较先进的信号检测方法。它是在事先不规定观测次数(或观测时间)的情况下, 根据按自然顺序得到的观测值, 随时进行处理和做出判决, 因此, 从平均意义上来说它可以节省观测时间, 同时又保持和固定样本容量相同的风险。本章以雷达系统接收二元信号为例, 采用修正的奈曼—皮尔逊准则, 说明瓦尔特检测方法的计算过程。在瓦尔特检测中采用检测概率和平均观测时间的线性组合作为评价检测质量的指标, 它就是广义平均风险[式(4-41)]。显然广义平均风险最小就是最佳的序列检测接收机, 并把这种修正

的奈曼-皮尔逊准则称为最小广义平均风险准则。

我们仅对序列检测做了概念性介绍。序列检测的突出优点是高样本效率,与固定样本数检测相比,一般情况下可节省样本数 $1/2$ 以上。它的缺点是,在检测的每一步都要重新调整检验统计量,并在做出判决之前还必须存储用过的样本。

最后,介绍了序列检测在雷达中实际应用—检测—确认法。

习 题 四

4.1 在二元数字通信系统中,两个假设下的观测信号分别为

$$H_1: x_k = 1 + n_k, \quad H_0: x_k = n_k \quad (k=1, 2, \dots)$$

式中,观测噪声 n_k 是均值为零、方差 $\sigma_n^2=1$ 的高斯噪声,各次观测统计独立,且观测是顺序进行的。试确定在 $P_{fa}=P(D_1|H_0)=\alpha=0.1$ 和 $P_m=P(D_0|H_1)=\beta=0.1$ 时的判决规则,并计算在每个假设下,观测次数 N 的期望值。

4.2 在信号的序列检测中,若两个假设下的观测信号分别为

$$H_0: x_k = s_{0k}, \quad H_1: x_k = s_{1k} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

式中, s_{0k} 和 s_{1k} 是均值、方差分别为 σ_0^2 和 σ_1^2 相互统计独立的高斯随机信号,且 $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ 。设 $P_{fa}=P(D_1|H_0)=0.2$, $P_m=P(D_0|H_1)=0.1$, 若已知 $\sigma_0^2=1$, $\sigma_1^2=4$, $P(H_0)=1/2$, 试求结束试验所需的平均观测次数。

第5章 非参量检测

5.1 概述^[4]

雷达环境的统计特性比较复杂。除本机噪声(热噪声,其概率分布为高斯分布)以外,还有不需要的目标,如各地地形地物、云雨、海浪等所反射的雷达电波对雷达本身回波信号形成干扰,这就是雷达杂波。杂波特性随时间空间的变化而变化,其统计特性难于精确地描述,通常这类杂波的分布未知的。因此,人们自然想到把非参量统计方法用于雷达信号的检测。非参量检测是一个数理统计的检测方法,其基本思想是在概率特性做某些基本假设的条件下,通过检测单元与邻近的若干参考单元相比较,统计地确定有无信号存在。

在第2章第3章中,讨论了在高斯噪声背景下各种信号的检测方法。它们都是以似然比处理器(或对数似然比处理器)为基础的。为了求得某一准则下的最佳接收机,要求知道接收样本统计特性的精确描述,它是以干扰(或噪声)的统计特性已经全部掌握(即干扰或噪声的概率密度函数已知)为前提的。在检测中只需对干扰或噪声的某些参量进行估值就可以了。例如,若干扰为瑞利分布,则只需估计杂波强度一个参数,就能够构成适当的检验统计量和门限,从而达到要求的恒虚警率,保证必要的检测性能。因此,将这种信号检测称为参量检测。这种参量检测大体上是以高斯分布的干扰(或噪声)为基础研究出来的。至少(通过实验手段或分析方法,也可二者结合)使得干扰的分布规律是已知的(某些分布参量可以待测),也就是要求完全掌握接收机环境的统计特性,用以建立干扰分布的数学模型,并根据数学模型设计恒虚警率处理电路。这种要求是苛刻的,实际环境常常得不到满足。而且,一旦环境改变,原来设计成最佳的检测器,其检测性能将明显恶化,不仅恒虚警损失 L_{CFAR} 会增大,而且还可能达不到恒虚警检测的目的。因而参量检测法有一定的局限性。

在检测理论的许多应用领域中,常常要求检测器性能对于环境的变化不敏感。具体地说,当环境统计特性改变时,要求检测器性能变化小,相对稳定;对于雷达检测器,则要求其虚警概率基本上保持恒定,即具有恒虚警率(CFAR)特性。参量型检测器虽然能使检测性能最佳,但它本身并不具备这种恒虚警率特性。回忆一下,如果令 $p(x|H_0)$ 代表无信号(仅有噪声)假设下的似然函数或 H_0 为真时接收样本的概率密度, U_T 代表判决门限,则在单个样本情况下,虚警概率等于

$$P_{fa} = \int_{U_T}^{+\infty} p(x | H_0) dx$$

显然,对于固定的 U_T , $p(x|H_0)$ 改变, P_{fa} 将发生相应的变化;即使 $p(x|H_0)$ 形式不变,其参量改变(例如噪声平均功率或噪声方差改变), P_{fa} 也要随之改变。为了解决这个问题,需要采取使虚警概率保持恒定的措施。信号的非参量检测成为恒虚警率处理的一个重要分支而得到发展。因为它不需要知道干扰环境属于何种分布,因此,非参量检测也称为自由分布检测。

在第7章将要讨论的雷达恒虚警率(CFAR)检测是专门为抑制由不同电平的噪声、杂波或 ECM 引起的虚警而设计的门限或增益控制装置性能的检测技术。要使接收机具有恒虚警

率特性,大体上有三种方法:

第一种方法是利用接收机的非线性实现恒虚警率,譬如说,在接收机中采用对数放大器。由于对数放大器输出噪声的方差基本上等于一个常数而与其输入噪声的方差无关,故能达到控制虚警的目的。

第二种方法是当噪声方差改变时,自适应地改变检测器判决门限以保持恒虚警率,这就是所谓自适应门限恒虚警率处理器或称参量型恒虚警率处理器,其基本原理是假定噪声分布形式已知而试图估计其未知的参量,采用的基本方法是单元平均法及其变形。这种参量型恒虚警率处理器仅能根据噪声的特定分布(如瑞利分布,对数正态分布等)进行设计,一旦假定的分布与接收机环境不一致,其性能将明显变坏。此外,参量型恒虚警率处理器要求准确地估计噪声的平均功率,如果估计不准确,虚警概率将随估计误差的增大而急剧变化。可以引用 C. M. Dillard 等人给出的曲线来说明这一点(见图 5.1)。图中横坐标 r 是真实平均噪声功率与估计的平均噪声功率之比。假定采用平方律检波器。在无信号情况下,似然函数由下式给出

$$p(\mathbf{x} | H_0) = \frac{1}{\Psi} \exp \left[\frac{\mathbf{x}}{\Psi} \right] \quad (5-1)$$

式中,参量 Ψ 是中频的真实平均噪声功率。图中给出两种参量型恒虚警率检测器的虚警概率随比值 r 的变化情况。对于二进积累器曲线,在信噪比为 3dB 和虚警概率为 10^{-6} 情况下,已选择第一门限和第二门限之值使检测概率为最大。由图可见,当比值 r 仅为 1.1 时,虚警概率已约为其所需值(10^{-6})的 10 倍。对于这方面恒虚警处理内容,我们将在第 7 章中介绍。

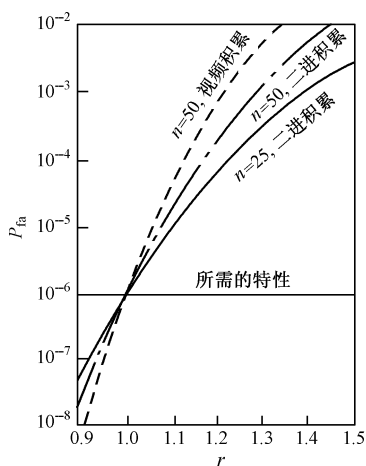


图 5.1 虚警概率 P_{fa} 与 r 的关系
(平方律检波器)

$$r = \frac{\text{真实平均噪声功率}}{\text{估计的平均噪声功率}};$$

$n = \text{脉冲积累数}$

第三种,也是本章要着重讨论的一种方法,就是用非参量检测方法实现恒虚警率。非参量检测器亦称自由分布检测器,因为当检测器环境发生变化时,其虚警概率基本上保持恒定,即虚警概率与输入数据的分布无关。非参量检测器不要求精确知道输入数据的统计特性。它的特点是适应性强,抗各类干扰,其性能都比较好,尤其恒虚警性能比较好,即不论实际干扰的统计特性如何,概率分布为何种形式,非参量检测的性能不变,恒虚警性能不变。非参量检测的实质就是把未知统计特性(概率密度分布)的干扰变成概率密度函数为已知的干扰。因此,非参量检测器是一种有实用价值和发展前途的信号检测系统。

在实际的检测问题中,往往会遇到这样的情况,对于输入为噪声(H_0 为真)时观测样本的概率密度函数是未知的,而只知道概率密度函数非常一般的信息,也即能对其概率特性做一些基本的假设,例如, H_0 假设下,噪声呈对称概率分布等,在这些比较宽松的假定条件下,设计某种检测器,使其虚警概率不随具体分布的变化而变化,从而呈现恒虚警的检测特性。具有这样特点的(恒虚警)检测器称为非参量检测器。

然而,与参量型检测相比较,由于非参量检测没有利用干扰的先验知识,虽然其适应性强,但针对性差。因此针对某种已知统计特性的干扰来说,非参量检测器的性能一般低于参量型

检测器的性能,而且设备量也比参量型检测器的大。

现在进一步以假设检验的语言来讨论非参量检测,也就是对概率特性在基本的假设条件下做假设检验。考虑下面的二元假设检验问题:

$$\begin{cases} H_0 : x_i = n_i \\ H_1 : x_i = as_i + n_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5-2)$$

式中, $\{x_i\}$, $\{n_i\}$ 和 $\{s_i\}$ 分别是观测信号、噪声和有用信号的样本序列,有时以矢量 \mathbf{x} , \mathbf{n} 和 \mathbf{s} 表示。 a 是代表有用信号强度的参量。假定诸 x_i 样本是统计独立的,进一步假定诸噪声样本是独立同分布的随机变量,整个观测样本的概率密度函数为 $p(\mathbf{x})$, 概率分布函数为 $F(\mathbf{x})$ 。这样,在非参量假设的情况下,式(5-2)可以写成

$$\begin{cases} H_0 : x_i \text{ 具有已知的分布函数 } F(\mathbf{x}) \\ H_1 : x_i \text{ 具有已知的分布函数 } F(\mathbf{x} - as_i) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5-3)$$

如果噪声的统计分布未知或不是确知的,譬如,只知道噪声分布的中位数是零,其余都不知道,那么,这种非参量假设检验可表示为

$$\begin{cases} H_0 : F(0) = 1/2, \text{其他未知} \\ H_1 : F(as_i) = 1/2, \text{其他未知} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5-4)$$

如果我们进一步知道噪声的密度函数是对称的,则非参量假设检验可表示为

$$\begin{cases} H_0 : p(x_i) = p(-x_i), \text{其余未知} \\ H_1 : p(x_i - as_i) = p(as_i - x_i), \text{其余未知} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5-5)$$

式(5-3)~式(5-5)是两类典型的非参量假设检验。非参量检测理论的目的就在于,对于这种非参量假设检验,要寻求性能较好的检测器形式。

为了阐明非参量检测器的工作原理,下面首先介绍基本定义和术语,然后讨论两种基本的非参量检测器。

5.2 非参量检测中常用的公式和性能指标^[2]

5.2.1 常用的公式

现在先引入非参量检测中常用的一些公式和术语,它们对第6章 Robust 检测也是适用的。

在下面的讨论中,我们仍然主要关心二元判决问题,即将输入数据进行某些处理后,与一特定门限 C_T 做比较,以判断有用信号是否存在。输入数据用 \mathbf{x} 表示,它或者是一个随机过程 $\{\mathbf{x}(t), 0 \leq t \leq T\}$, 或者是随机变量的有限序列 $\{x_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ 。 \mathbf{x} 的概率分布用 $F(\mathbf{x})$ 表示, $F(\mathbf{x})$ 是对 \mathbf{x} 的统计特性的完全描述。对于二元判决问题,可以提出两个假设。与前面所用符号相同,令 H_0 代表原假设或无信号假设,在 H_0 为真时, \mathbf{x} 表示仅有噪声的数据;令 H_1 代表备择假设或有信号假设,在 H_1 为真时, \mathbf{x} 表示信号加噪声的数据。如果假设由具有完全确定形式的概率分布 $F(\mathbf{x})$ 表征,则它们称之为简单假设,否则称为复合假设。在复合假设情况下,如果表征假设的概率分布 $F(\mathbf{x})$ 不能用有限个实参量来描述,则该复合假设称为非参量复合假设。

用 D 代表检测器,它对输入数据进行处理,以判断两个假设 H_0 、 H_1 中哪一个为真。因此检测器 D 可用图 5.2 表示,其中 \mathbf{x} 是 D 的输入数据,而 D 的输出是判决函数或统计检验函数

$D(\mathbf{x})$ 。 $D(\mathbf{x})$ 是一个随机变量, 对于二元判决, 其可能取值为 0 或 1, 它们是判决空间的两个元素。如果 $D(\mathbf{x})=0$, 我们接受假设 H_0 ; 如果 $D(\mathbf{x})=1$, 便接受假设 H_1 。

因为 $D(\mathbf{x})$ 是随机变量, 且仅取 0 和 1 两个数值, 所以可以计算它的期望或均值。令 β_D

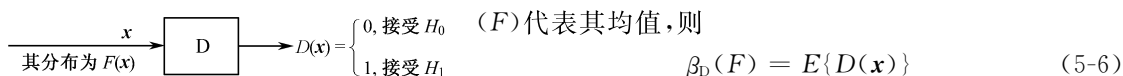


图 5.2 检测器图示

显然 $\beta_D(F)$ 满足不等式

$$0 \leq \beta_D(F) \leq 1 \quad (5-7)$$

$\beta_D(F)$ 称为检测器 D 的势函数, 它是无论哪一个假设 (H_0, H_1) 为真时, 接受假设 H_1 的概率。当 H_1 为真时, 有

$$\begin{aligned} \beta_D(F) &= E\{D(\mathbf{x})\} = 0 \times P(\text{接受 } H_0 | H_1) + 1 \times P(\text{接受 } H_1 | H_1) \\ &= P(\text{接受 } H_1 | H_1) \end{aligned} \quad (5-8)$$

这时 $\beta_D(F)$ 是 H_1 为真时正确判决的概率即检测概率。正如符号本身所表明的, $\beta_D(F)$ 依赖于检测器 D 的形式和输入数据 \mathbf{x} 的分布 $F(\mathbf{x})$ 。如果两个检测器具有相同的工作特性, 则称它们是等效的。

检测器 D 可能犯两类错误。假设 H_0 为真却接受假设 H_1 , 称为第 I 类错误或虚警错误; 假设 H_1 为真却接受假设 H_0 , 称为第 II 类错误或漏报错误。如果 $F(\mathbf{x}) \in H_0$ ^①, 用类似于推导式(5-8)的办法可以证明, 这时 $\beta_D(F)$ 就代表虚警概率, 并且

$$\sup_{F(\mathbf{x}) \in H_0} \beta_D(F) = \alpha^{(2)} \quad (5-9)$$

α 称为(检测的)尺度或检验水平, 也可称检测器 D 的最大虚警概率。如果 $F(\mathbf{x}) \in H_1$, 则如式(5-8)所表明的 $\beta_D(F)$ 就代表检测概率, 也称为检测器 D 对于备择 $F(\mathbf{x})$ 的势。在可实现性、价格、复杂性等限制条件下, 大多数检测器的设计目标是使虚警概率尽可能小而检测概率尽可能大。

设 Δ 代表满足下式的一类检测器

$$\beta_D(F) \leq \alpha \quad [\text{对于所有的 } F(\mathbf{x}) \in H_0] \quad (5-10)$$

一个检测器 $D_0 \in \Delta$, 如果满足

$$\beta_{D_0}(F) \geq \beta_D(F) \quad [\text{对于所有的 } F(\mathbf{x}) \in H_1 \text{ 和所有 } D \in \Delta] \quad (5-11)$$

即在虚警概率不大于检验水平 α 的条件下, 检测器 D_0 能获得最大检测概率, 或称 D_0 在奈曼-皮尔逊意义下, 对于假设 H_0, H_1 , 检验水平 α 最佳。

另一种有用的准则是广义奈曼-皮尔逊准则, 它适用于检测弱信号的情况。广义奈曼-皮尔逊准则要求在固定虚警概率为 α^* 的条件下, 使检测器的势函数在原点的斜率达到最大, 即要求(对于二元检测)

$$\beta_{D_1}(0/p) = \beta_D(0/p) = \alpha^* \quad (5-12a)$$

$$\left. \frac{\partial \beta_{D_1}(a/p)}{\partial a} \right|_{a=0} \geq \left. \frac{\partial \beta_D(a/p)}{\partial a} \right|_{a=0} \quad (5-12b)$$

在噪声密度 $p(\mathbf{x})$ 满足一定正则条件的情况下, 上述要求等效于在 $a=0$ 附近足够小的范围内

① 符号 $F(\mathbf{x}) \in H_0$ 和 $F(\mathbf{x}) \in H_1$ 分别代表 $F(\mathbf{x})$ 属于 H_0 和 $F(\mathbf{x})$ 属于 H_1 。前者表示 $F(\mathbf{x})$ 是仅有噪声时 \mathbf{x} 的分布, 而后者表示 $F(\mathbf{x})$ 是信号加噪声时 \mathbf{x} 的分布。这样表示仅仅是为了简便, 严格地说不恰当的, 因为 $F(\mathbf{x})$ 是数学函数, 而 H_0 和 H_1 却代表假设。

② 符号 $F(\mathbf{x}) \in H_0$ 称为上确界或最小上界。因此, 式(5-11)表示虚警概率的最小上界等于 α^* , 这个最小上界是对具有分布 $F(\mathbf{x}) = H_0$ 的所有数据定义的。

使势函数最大。势函数在 $a=0$ 处的斜率有时称为局部势。所以这种检测器 D_1 称为局部最大势检测器或局部最优势检测器,简称为局部最佳检测器。

可以证明,局部最优势检测的判决规则为

$$\left. \frac{\partial \ln \Lambda(\mathbf{x}, a)}{\partial a} \right|_{a=0} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} C_T \quad (5-13)$$

式中, $\Lambda(x, a)$ 为似然比, 门限 C_T 应选择使虚警概率 α (即 P_{fa}) 等于给定的检测水平 α^* , 在假设检验为式(5-12)的情况下

$$\ln \Lambda(\mathbf{x}, a) = \ln \prod_{i=1}^m \frac{p(x_i - as_i)}{p(x_i)} = \sum_{i=1}^m \ln \frac{p(x_i - as_i)}{p(x_i)}$$

$$\left. \frac{\partial \ln \Lambda(\mathbf{x}, a)}{\partial a} \right|_{a=0} = \sum_{i=1}^m s_i L(x_i) \quad (5-14)$$

式中

$$L(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)} \quad (5-15)$$

于是判决规则为

$$D(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m s_i L(x_i) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} C_T \quad (5-16)$$

式中, $L(x)$ 由式(5-15)给出, 是非线性函数的形式, 称为局部最佳检测器的非线性函数, 简称为局部最佳非线性。

一般说来, 一个检测总是具有很多可能的解。即, 给定假设 H_0 和 H_1 , 存在很多不等效的检测器, 它们都可以实现。所以必须提出一些方法以便比较各种检测器的有用性。在这方面, 可能遇到两种最普通的比较方法:

(1) 在同一个假设 H_0 下, 对两个非参量检测器进行比较;

(2) 在假设 H_0 或备择假设 H_1 的一个子集下, 把非参量检测器与相应的参量检测器进行比较。

现以符号(恒虚警)检测器为例, 它是最简单的非参量恒虚警检测器。符号检测器是只利用输入观测样本的“正”与“负”的极性信息的一种检测器。

非参量型符号检测仅仅利用被测信号 x_i 的符号信息来检测信号, 其检验统计量 $D(x)$ 为

$$D(x) = \sum_{i=1}^m u(x_i) \quad (5-17)$$

式中

$$u(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i > 0 \text{ 或 } x_i = 0 (i \text{ 为奇数}) \\ 0, & x_i < 0 \text{ 或 } x_i = 0 (i \text{ 为偶数}) \end{cases} \quad (5-18)$$

设检测门限为 n_T , 则符号检验的判决规则为

$$D(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} n_T \quad (5-19)$$

这样, 非参量型符号检测器由量化器、求和器和判决器组成, 如图 5.3 所示。其中, 量化器也可以看作是一种限幅器。

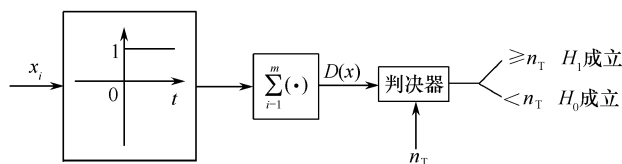


图 5.3 非参量型符号检测器

将检验统计量 $D(x)$ 与检测门限 n_T 进行比较,以统计判决哪个假设成立。这就是非参量型符号检测的基本原理。

5.2.2 非参量检测虚警概率和检测概率指标的计算

符号检测问题可用如下信号模型来描述:

$$\begin{aligned} H_0: x_i &= n_i & i &= 1, 2, \dots, m \\ H_1: x_i &= s_i + n_i & i &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5-20)$$

式中, x_i 是被测单元的样本信号; n_i 是加性观测噪声的样本, m 次观测样本间是相互统计独立的; s_i 是假设 H_1 下的有用信号观测样本, 且为大于零的确知信号。

因为符号检测先将观测样本 x_i 按其符号量化为 1 或 0, 这相当于以零电平为检测门限对 x_i 进行判决, $x_i > 0$, 输出 1; $x_i < 0$, 输出 0; $x_i = 0$, 以等概率输出 1 和 0。在假设 H_0 下, x_i 的概率密度函数 $p(x_i | H_0)$ 是未知的, 但从统计意义上讲, 一般可以合理地假定 x_i 的分布函数 $F(x_i)$ 的中位数为 $1/2$, 即在假设 H_0 下, $x_i < 0$ 和 $x_i > 0$ 的概率($x_i = 0$ 的情况等概率地归于小于零和大于零的情况)各为 $1/2$, 表示为

$$P_{fa} = \int_0^{+\infty} p(x_i | H_0) x_i = 1/2 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5-21)$$

在假设 H_1 下, 因为 s_i 是大于零的确知信号, 所以有

$$P_d = \int_0^{+\infty} p(x_i | H_1) x_i > 1/2 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5-22)$$

由于各采样点的采样彼此独立, 且经过比较量化后只有 0, 1 两个值, 单次探测中 $P[D(x) = n | H_i]$ 为某一个值的概率服从二项分布。这就是说, 无论杂波干扰服从什么分布, 或不知道其分布规律, 都能使检验统计量服从二项分布。也就是说, 将 x_i 按其符号量化的结果 1 或 0, 在相邻 m 个探测周期求和, 得符号检测的检验统计量 $D(x)$ 。 $D(x)$ 恰好等于 n_T , ($0 \leq n_T \leq m$) 的概率服从二项式分布。这样, 在假设 H_0 下, 有

$$P_{fa} = P[D(x) \geq n_T | H_0] = C_m^{n_T} P_{fa}^{n_T} (1 - P_{fa})^{m-n_T} = C_m^{n_T} (1/2)^m \quad (5-23)$$

而检测概率为

$$P_d = P[D(x) \geq n_T | H_1] = C_m^{n_T} P_d^{n_T} (1 - P_d)^{m-n_T} \quad (5-24)$$

因为检验统计量 $D(x) \geq n_T$ 均判决假设 H_1 成立, 所以, 非参量型符号检测的虚警概率为

$$P_{fa} = P[D(x) \geq n_T | H_0] = \sum_{h=n_T}^m C_m^h (1/2)^m \quad (5-25)$$

而检测概率为

$$P_d = P[D(x) \geq n_T | H_1] = \sum_{h=n_T}^m C_m^h P_d^h (1 - P_d)^{m-h} \quad (5-26)$$

由式(5-25)可见, 在假设 H_0 下, 对任何具有零中位数概率密度函数的干扰, 非参量型符号检测的虚警概率 P_{fa} 与干扰的分布及参数均无关, 所以, 它是恒虚警率检测器。同时, 由要求的 $P_{fa} = \alpha$, 利用式(5-25)可以确定检测门限 n_T , 它是满足该式的最小整数。

事实上, 对假设 H_0 下 x_i 的概率密度函数 $p(x_i | H_0)$ 的约束(零中位数)可以放宽, 只要满足

$$P_{fa} = \int_0^{+\infty} p(x_i | H_0) dx_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5-27)$$

保持不变, 非参量型符号检测器就具有恒虚警率性能, 即

$$P_{fa} = P(T_s \geq n_T | H_0) = \sum_{h=n_T}^m C_m^h P_{fa}^h (1 - P_{fa})^{m-h} \quad (5-28)$$

只是由于 P_{fa} 未知, 不便于由 $P_{fa} = \alpha$ 的约束来确定检测门限 n_T 。

上面给出了单次探测时虚警概率和发现概率的计算公式。虚警概率 P_{fa} 和检测概率 P_d 是衡量非参量符号检测性能的重要指标。

5.2.3 非参量检测的其他性能指标

下面将引入另外几个比较非参量检测的性能指标: 检测器效验, 渐近相对效率和渐近相对损失, 用来比较同一类检测问题所选不同方案的“优劣”。

1. 检测器的效验 (efficacy) ϵ

对于信号有无的二元假设检验来说, 经常可以采用以下的假设

$$H_1 : x_i = as_i + n_i, \quad H_0 : x_i = n_i$$

式中, n_i 是噪声样本, s_i 是随机信号样本, a 为信号强度参量, $a > 0$ 。

检测器的效验 ϵ 定义如下

$$\epsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{\left[\frac{d^m}{da^m} E\{D_n(x) | H_1, a\} \Big|_{a=0} \right]^{1/mU}}{\sigma^2\{D_n(x) | H_0\}} \quad (5-29)$$

式中, U 是一个常数, D_n 是观测样本数为 n 时, 检测器的检验统计量; m 是 $E\{D_n(x) | H_1, a\}$ 在 $a=0$ 处第一个非零导数的阶数。通常取式(5-29)中的 $mU=1/2$, $m=1$ 时的效验有明确的物理含义, 即增量信噪比。

定义检测器输出的信噪比

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{E\{D_n(x) | H_1, a\} - E\{D_n(x) | H_0\}}{\sigma\{D_n(x) | H_0\}} \quad (5-30)$$

检测器输入的信噪比为 $(S/N)_{in} = a$, 对于弱信号, 有

$$E\{D_n(x) | H_1, a\} \approx E\{D_n(x) | H_0\} + a \frac{d}{da} E\{D_n(x) | H_1, a\} \Big|_{a=0} \quad (5-31)$$

将式(5-31)代入式(5-30), 可得

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{a \frac{d}{da} E\{D_n(x) | H_1, a\} \Big|_{a=0}}{\sigma\{D_n(x) | H_0\}} \quad (5-32)$$

检测器输出信噪比相对于输入信噪比的增益

$$\frac{(S/N)_{out}}{(S/N)_{in}} = \frac{\frac{d}{da} E\{D_n(x) | H_1, a\} \Big|_{a=0}}{\sigma\{D_n(x) | H_0\}} \quad (5-33)$$

将式(5-32)与式(5-29)联系在一起, 不难得出这样的结论: 检测器的效验可以反映当假设 H_1 趋近于假设 H_0 时(这时, 观测样本数 $n \rightarrow \infty$), 检测器输出的信噪比对于输入信噪比的增益大小, 即

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta f \rightarrow 0}} \left[\left(\frac{S}{N}\right)_{out} / \left(\frac{S}{N}\right)_{in} \right] = \sqrt{n\epsilon} \quad (5-34)$$

2. 两个检测器的渐近相对效率 (ARE)

皮特奈(Pitonam)首先提出了用渐进相对效率(A. R. E)作为两个检测器相比较的判据。应该指出, 渐进相对效率是在弱信号的假设下导出的, 以便简化表达式。由于大信号的假设下, 渐进相对效率的表达式的推导很繁杂, 我们这里只给出结果。

检测器的渐近效验 ϵ 说明检测器对提供信号的利用率。两个检测器的渐进相对效率是由它们的渐进效验之比定义的, 即当检测器的检验统计量满足正则条件时, 检测器 D_1 相对检测器 D_2 的渐近相对效率与效验之间存在以下关系

$$\text{ARE}_{12} = \epsilon_1 / \epsilon_2 \quad (5-35)$$

式(5-35)所表示的渐近相对效率, 是在弱信号检测时做出的, 弱信号检测就意味着探测次数 N (或者说积累次数, 或者说采样容量) 需要特别大; 由于 ϵ 与干扰的密度函数有关, 所以检测器 D_2 也与干扰的密度函数有关。

应当指出, 虽然可以用渐近相对效率 ARE 来度量非参量检测器性能, 但是在许多实际情况下, ARE 的计算是颇为困难的。因此, 对于特定的噪声和干扰环境, 目前常常用计算机模拟 (Monte-Carlo 模拟) 的办法来确定非参量检测器性能。

在工程应用中, 检测器的相对效率定义如下:

两个检测器对于同样的假设 H_0 及 H_1 , 当具有相同的虚警概率 α (或称为相同的“检验水平”) 及发现概率, 一个检测器所需要的观测样本数是 n_1 , 另一个检测器所需要的观测样本数是 n_2 , 称第一个检测器对于第二个检测器的相对效率是

$$\rho = n_2 / n_1 \quad (5-36)$$

以上定义的相对效率是“有限观测样本”条件下的相对效率, 由于实际计算时比较麻烦, 因此采用“渐近相对效率”。检测器的渐近相对效率 (ARE) 定义如下

$$\text{ARE}_{12} = \lim_{\substack{H_1 \rightarrow H_0 \\ n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} (n_2 / n_1) \quad (5-37)$$

以上定义的 ARE_{12} 即为检测器的渐近相对效率。渐近相对效率是检测器样本数趋于无穷条件下的相对效率。许多情况下, ARE_{12} 是一个独立于 x 的数。

通过一个实例, 说明 $H_1 \rightarrow H_0$ 。二元假设:

$$H_1: x = as + n_x, \quad H_0: x = n_x$$

通常取 $a > 0$, a 是信号的强度参量。 $a \rightarrow 0$, 即意味着 $H_1 \rightarrow H_0$ 。由于 $a \rightarrow 0$, 意味着信噪比趋于 0, 为了得到规定的功效, 观测样本数将趋于 ∞ 。

由于 ARE 的定义是在允许 $H_1 \rightarrow H_0$ 条件下得到的, 因此它基本上是检测器性能的弱信号测度。显然, ARE 可以作为检测器的质量指标。当检测器 D_2 与假设 H_0 、 H_1 下的最佳检测器 D_1 进行比较时, ARE_{12} 大于 1。另一方面, ARE_{12} 可能小于 1, 这时, 在假设 H_0 、 H_1 下 D_1 不是最佳的。换言之, 用一个准最佳检测器有可能获得优良的性能, 这个检测器对于偏离所考虑的假设不灵敏, 并且它工作的环境不同于设计最佳检测器时所考虑的环境。当环境发生改变时, 非参量检测器性能有可能超过原先设计成最佳的检测器的性能。

渐近相对效率实际上是在相同的虚警概率及发现概率、相同的 H_0 假设, 当 H_1 假设中的信噪比趋于零的条件下比较两种检测器的一种性能指标。

3. 相对渐近损失 L_∞

在工程应用中, 检测器 1 相对于检测器 2 的信噪比的渐近损失 L_∞ 是最有直接意义的。在给定探测次数 m 的情况下, 对给定的检测概率 P_d 和虚警概率 P_{fa} 所需要的信噪比为 $\text{SNR}(P_d, P_{fa}, m)$, 检测器 D_1 相对于检测器 D_2 的信噪比渐近损失可定义为如下极限形式

$$L_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\text{SNR}_2(P_d, P_{fa}, m)}{\text{SNR}_1(P_d, P_{fa}, m)} \quad (5-38)$$

在高斯噪声背景中,非参量型检测器对于通常所遇到的目标模型,相对于最优的参量检测器的信噪比渐近损失 L_∞ 可以表示为

$$L_\infty = [A. R. E]^{-1/2} \quad (5-39)$$

或者以分贝表示为

$$L_\infty (\text{dB}) = -51 \lg(A. R. E) \quad (5-40)$$

5.3 非参量检测器原理

统计学中描述的非参量统计方法非常之多,但应用于信号检测的目前只有很少一部分。作为教科书,我们仅讨论其中的两种:符号检测器和符号秩检测器(Wilcoxon 检测器),它们是较为简单的,基本的,研究得比较充分的两种非参量检测器。

5.3.1 广义符号检测器

符号检测可以分成以被检测信号的符号为检验统计量的符号检测和以广义符号为检验统计量的广义符号检测。符号检测已在 5.1 节中做过简要介绍。下面讨论雷达广义符号检测器的基本原理和构成方法,并给出它的性能。

1. 连续 m 个重复周期内雷达视频信号的输出

在搜索雷达的天线波束范围内(或电扫描雷达的天线波束的某一指定方向上)发射了 m 个探测脉冲,则在 m 个重复周期内,接收机的视频输出如图 5.4 所示。图中假定 t_0 处的信号对应距离 R_0 处的目标且在所有的 m 个探测周期内信噪比是相同的。

在 m 个探测周期中,检测单元的采样(t_0 时刻的采样)用 x_j 表示($j=1,2,\dots,m$),参考单元的采样用 x_{ki} 表示($i=1,\dots,n,k=1,\dots,m$)(有时考虑到目标回波延伸而不仅仅占据一个分辨单元,可以在检测单元两边空开一个或几个单元再取参考单元)。如果我们把所有这些采样的结果保存下来,如图 5.5 所示,这些采样值就成为构造非参量检测统计量的基础。

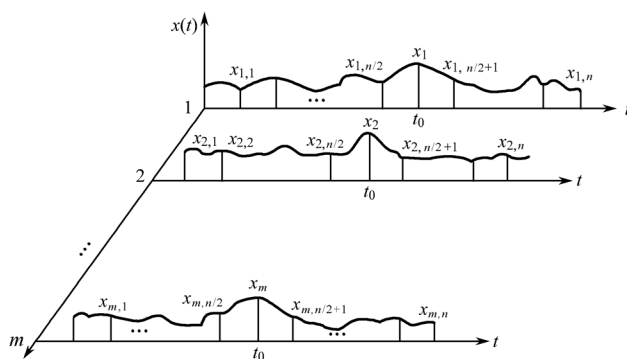


图 5.4 m 个连续探测周期内雷达的视频输出

2. 几种非参量检测的检验统计量

非参量检测的检验统计量是根据图 5.5 中的采样矩阵设计的。我们假定 x_{ki} 是统计独立的,且具有相同的分布(虽然不知道);当没有信号时,检测单元采样 x_j 与诸参考单元采样 x_{ki} 具有相同的分布,即所谓同分布。

若将被测单元的样本与前后参考单元的样本进行比较,产生 0 或 1 符号,并在相邻 m 个

						$\rightarrow i$			
	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	\cdots	$x_{1,n/2}$	x_1	$x_{1,(n/2+1)}$	\cdots	$x_{1,(n-1)}$	$x_{1,n}$
j	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	\cdots	$x_{2,n/2}$	x_2	$x_{2,(n/2+1)}$	\cdots	$x_{2,(n-1)}$	$x_{2,n}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	
m	$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	\cdots	$x_{m,n/2}$	x_m	$x_{m,(n/2+1)}$	\cdots	$x_{m,(n-1)}$	$x_{m,n}$

图 5.5 $m \times n$ 采样存储矩阵

探测周期形成检验统计量,然后与检测门限进行比较,以统计判决哪个假设成立,这就是非参量型广义符号检测。

定义广义符号检测统计为

$$T_{GS} = \sum_{i=1}^m R_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a(x_i - x_{ij}), i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n \quad (5-41a)$$

图 5.6 示出了对雷达视频输出进行广义符号检验的例子。雷达接收机由匹配滤波器与包络检波器级联组成。由于包络检波器损失了雷达中频信号的相位信息,接收机是非相干的。设天线波束扫过目标时雷达发射 m 个探测脉冲,并且 m 次观测的信噪比相同。相应于每一次探测,雷达输出一个视频波形,如图 5.4 所示。在距离 R_0 上存在的目标,将产生一个相应的视频信号,其时延为 $t_0 = 2R_0/c$ (c 为光速)。因此,在 t_0 时刻所取的样本 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_m$ 代表

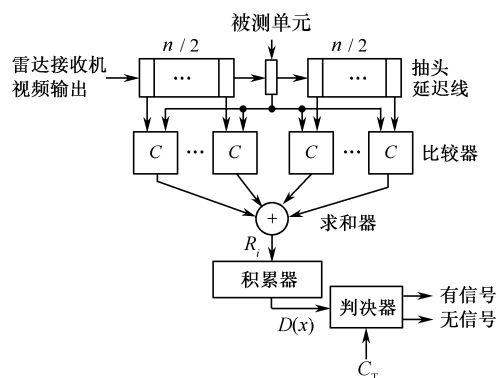


图 5.6 广义符号检测器简化框图

信号加噪声样本即受检单元的输出。对于每 i 次探测,参考噪声样本为 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ij}, \cdots, x_{in}$, n 为参考单元的数目。把 x_i 与 x_{ij} ($j = 1, 2, \cdots, n$) 在 n 个相同的比较器中进行比较,然后求和,得式(5-41a)中的统计量为

$$R_i = \sum_{j=1}^n u(x_i - x_{ij}) \quad (5-41)$$

式中, $u(\cdot)$ 为单位阶跃函数,下标 i 表示第 i 次探测。由于 R_i 是检测单元的 x_i 与诸参考单元的值 x_{ij} , $j = 1, 2, \cdots, n$ 按从小到大的顺序排列时, x_i 值所处的序号,所以称 R_i 为 R_i 检测单元 i 的秩值。

因此也把 T_{GS} 称作秩和检验统计。将 m 次探测得

到的 x_1, x_2, \cdots, x_m (假定它们相互独立)进行积累所得统计量

$$D(x) = \sum_{i=1}^m R_i$$

于是广义符号检测器可以表示为

$$D(x) = \sum_{i=1}^m R_i \begin{cases} \geq C_T & (\text{信号存在}) \\ < C_T & (\text{信号不存在}) \end{cases} \quad (5-42)$$

式中, C_T 为判决门限,决定于要求的虚警概率。

图 5.6 示出了实现上述运算的简化框图。抽头延迟线中央为受检单元,两边对称地配置 $N/2$ 个参考单元。每个单元的延迟线时间应大于杂波的相关时间以保证各个单元杂波采样相互独立。图中 C 代表比较器, \oplus 代表求和器,求和器输出为第 i 次探测的统计量 R_i 。诸 R_i 在积累器(例如使用滑窗积累器)中进行积累,使得检验统计量 $D(x)$ 。

Hansen 等人对上述广义符号探测器(GSD)进行了性能分析。为此,首先必须确定无信号

假设和有信号假设下观测样本 x 的概率密度函数。为了与最佳检测器进行比较,假定接收机背景噪声为平稳的高斯白噪声。由于广义符号检测器的输入 $x(t)$ 是接收机包络检波器输出,在无信号或仅有噪声情况下,观测样本 x 的概率密度为瑞利密度,即

$$p(x|H_0) = \begin{cases} x \exp[-x^2/2] & (x \geq 0) \\ 0 & (\text{其余}) \end{cases} \quad (5-43)$$

当信号脉冲的幅度为恒定值时,信号加噪声观测样本的概率密度是莱斯密度,即

$$p(x|H_1) = \begin{cases} x \exp(-x^2/2) \exp(-d) I_0(x \sqrt{2d}) & (x \geq 0) \\ 0 & (\text{其余}) \end{cases} \quad (5-44)$$

式中, $d=E/N_0$ 是信噪比, E 是单个信号脉冲的能量,而 N_0 是白噪声的单边功率谱密度。对于脉冲到脉冲的瑞利起伏信号,信号加噪声观测样本的概率密度为

$$p(x|H_1) = \begin{cases} \frac{x}{1+d} \exp\left[-\frac{x^2}{2(1+d)}\right] & (x \geq 0) \\ 0 & (\text{其余}) \end{cases} \quad (5-45)$$

式中, $d=E_{av}/N_0$, E_{av} 是单个信号脉冲的平均能量。以上三式中,均已假定输入噪声功率归一化到 1。

利用渐近相对效率 ARE 和渐近信噪比损失 L_∞ 可以计算 GSD 的渐近性能。这里使用的 ARE 定义,在形式上与式(5-37)稍有不同。对于给定的信噪比 d ,如果一个检测器为了使检测概率 P_d 和虚警概率 P_{fa} 等于指定值所需的观察数为 $n(P_d, P_{fa}, d)$,则检测器 B 相对于检测器 A 的渐近相对效率定义为

$$\text{ARE}_{BA} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{n_A(P_d, P_{fa}, d)}{n_B(P_d, P_{fa}, d)} \quad (5-46)$$

工程应用中,一个更直接的衡量检测器性能的量是所谓信噪比损失。设 $d(P_d, P_{fa}, n)$ 是给定观察数 n 时,一个检测器为了使 P_d 和 P_{fa} 等于指定值所需的信噪比,则检测器 B 相对于检测器 A 的渐近信噪比损失定义为

$$L_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_B(P_d, P_{fa}, n)}{d_A(P_d, P_{fa}, n)} \quad (5-47)$$

通常在 ARE 和 L_∞ 之间存在着简单关系,这个关系与信噪比的定义有关。

利用式(5-41)~式(5-47),Hansen 等人计算了在接收机背景噪声为平稳高斯白噪声时, GSD 相对于最佳参量检测器的渐近性能 ARE 和 L_∞ ,以及观察数有限时,同样情况下 GSD 产生的信噪比损失 L 。他们得到的结果总结在表 5.1 和图 5.7 和图 5.8 中。

表 5.1 GSD 的渐近性能

n	ARE	L_∞ (dB)
1	0.25	3.0
2	0.375	2.1
4	0.5	1.5
8	0.6	1.1
16	0.667	0.9
∞	0.75	0.6

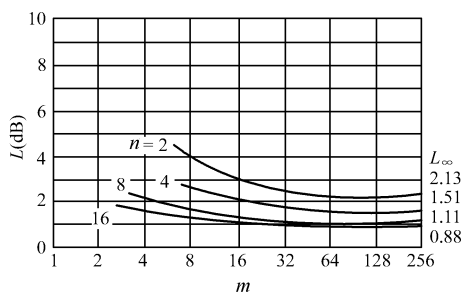


图 5.7 以 n 为参量时 GSD 的信噪比损失 L 与目标回波脉冲数 m 的关系 (非起伏信号, $P_d = 0.5$, $P_{fa} = 10^{-3}$)

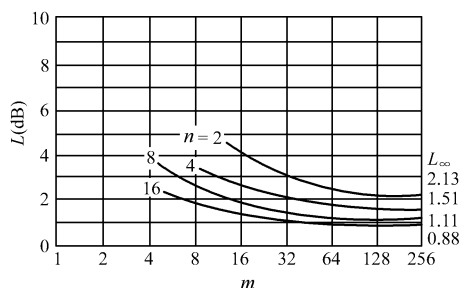


图 5.8 同图 7.28, 但 $P_{fa} = 10^{-6}$

由这些图表可以看出:

① GSD 的渐近性能与参考单元数 n 有关。当 n 增大时, ARE 增大而 L_∞ 下降, 在 $n \rightarrow \infty$ 的极限情况下, GSD 与最佳参量检测器相比, ARE 等于 0.75, L_∞ 等于 0.6dB。

② 当 n 固定时, 目标回波脉冲数 m 下降, 则 GSD 的信噪比损失 L 增大。因此, 仅仅利用渐近性能来评价 GSD 是不全面的。

③ 当 n 固定时, 随着 m 的增加, $L \rightarrow L_\infty$ 的速度相当慢, 而且 n 越小则逼近得越慢。对于小 n , 为了逼近 L_∞ , 有时需要多达几百个目标回波脉冲数。

在同种情况下, 起伏信号 GSD 的信噪比损失比非起伏信号大得多。

绝大多数非参量检测方法是由基本非参量统计文献中描述的方法演变而来的。可以选用的非参量统计方法非常多, 而对于特定的应用, 究竟选择哪一种方法最为适当, 目前似乎还没有找到一般的规律。这与采用奈曼-皮尔逊准则的参量检测问题不同, 在那里, 利用似然比进行判决是最佳的, 判决门限可由预定的虚警概率来确定。但是有一点是明确的, 一种非参量检测器结构的选择, 通常是根据在一类噪声中信号检测的性能要求来进行的, 而这一类噪声的分布在所考虑的问题中可能存在。例如, 对于雷达问题, 一般考虑高斯分布模型 (对于窄带情况, 其包络为瑞利分布), 除此以外, 还常常考虑对数正态、韦伯尔、指数、拉普拉斯、莱斯等分布模型。现在举一个局部最佳检测器的简单例子。

【例 5.1】 求拉普拉斯分布的噪声情况下的局部最佳检测器。其噪声密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_n} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_n} |x|\right) \quad (5-48)$$

式中, σ_n^2 为方差, 当 $\sigma_n^2 = 1$ 时, 局部最佳非线性是

$$L(x) = \text{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (5-49a)$$

它是硬限幅器的形式。检验统计量是

$$D(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m s_i \text{sgn}x_i \quad (5-49b)$$

这种检测器称为符号相关检测器, 是拉普拉斯噪声情况下检测时变信号的局部最佳检测器。在常值信号的特定情况下, 检测统计量成为

$$D(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \text{sgn}x_i \quad (5-49c)$$

这种检测器称为符号检测器。

如果噪声为正或为负的概率相等,即分布的中位数为零。那么,信号不存在时,接收信号的正样本和负样本的数目平均说来将是相等的。信号存在时,如果已知它为正的,则正样本的平均数目将大于负样本的平均数目。正样本的优势将使人们猜想到信号是存在的,于是,检测器可以作为只简单地对正样本记数,当正样本数目 m^+ 超过某个判决门限时,就判定 H_1 (信号存在)为真。这种检测器称为符号检测器。它的检验统计量及判决规则为分别为

$$D_2(\mathbf{x}) = m^+ = \sum_{i=1}^m u(x_i), \quad D_2(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} C_T \quad (5-50)$$

$u(\cdot)$ 为单位阶跃函数, C_T 为门限,符号检测器也可采用正样本数与负样本数之差作为检验统计量,其判决规则分别为

$$D_s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \text{sgn}(x_i), \quad D_s(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 2C_T - m \quad (5-51)$$

这里 $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数,且

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (5-52)$$

它表示硬限幅特性。由式(5-51)和式(5-53)可见,符号检测器可用硬限幅器后接一个积累器实现。符号检测器的两种构成形式示于图 5.9 中。

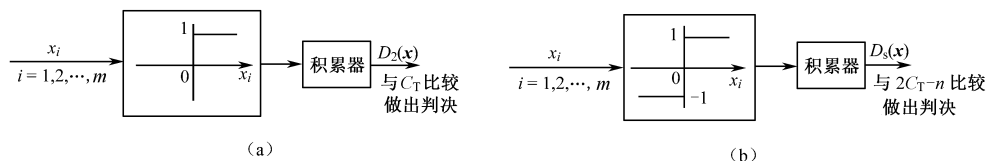


图 5.9 符号检测器的两种形式

现在,我们以图 5-9(a)为例,图中判决门限 C_T 由给定的检验水平 α^* 确定,为此需要计算假设 H_0 下 $m^+ \geq C_T$ 的概率,即虚警概率。注意到统计量 $\sum_{i=1}^m u(x_i)$ 是输入数据 \mathbf{x} 中正观测值的个数,是一个随机变量,用 k 表示。

对于二元假设检验,只取 1 和 0 两个数值,其概率分别为 p 和 $(1-p)$ 。因此,在假设 H_1 下, $m^+ = k = \sum_{i=1}^n u(x_i)$ 具有二项式分布,其参量为 p 。因此,在备择假设 H_1 下, $p=1/2$, k 的密度函数可写为

$$b\left(k; m, \frac{1}{2}\right) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^m \quad (k = 0, 1, \dots, m) \quad (5-53)$$

而在假设 H_0 下, $p=1/2$, k 的密度函数为

$$b\left(k; m, \frac{1}{2}\right) = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{m-k} = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^m \leq \alpha^* \quad (k = 0, 1, \dots, m) \quad (5-54)$$

式中, $\binom{m}{k}$ 是 m 中取 k 的组合数。利用式(5-53)、式(5-54)和工作特性的定义式(5-6),便可以求出图 5.3 的工作特性。在假设 H_1 下, $\beta_{D_3}(F)$ 代表检测概率,等于

$$\beta_{D_3}(F) = \sum_{k=c_3}^m \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \quad (5-55)$$

在假设 H_0 下, $\beta_{D_3}(F)$ 代表虚警概率,虚警概率 α 应不大于给定的检验水平 α^* , 所以

它等于

$$\beta_{D_3}(F) = \sum_{k=c_3}^m \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^m \leq \alpha^* \quad (5-56)$$

门限 C_T 应该是满足上式的最小整数。可见, 对于固定的样本数 n , 虚警概率 α 的最小值为 $(1/2)^m$, 因此 m 的选择也要顾及给定的 α^* 。在有限样本容量情况下, 检测器的性能以给定 α^* 下的检测概率 β 来描述。即

$$\beta = \sum_{k=C_T}^m \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \quad (5-57)$$

这里 p 是假设 H_1 下样本 $x_i > 0$ 的概率, 即

$$p = \int_0^{+\infty} q(x-a) dx \quad (5-58)$$

可见 q 是信号强度 a 的单调递增函数。因此, 符号检测器的性能, 可以在固定 α^* 和 m 的情况下, 针对噪声的各种分布, 计算出作为信号强度 a 的函数的检测概率 β 来估计。在高斯噪声、拉普拉斯噪声和混合型噪声三种情况下, 计算出检测概率作为信号强度 a 的函数曲线, 示于

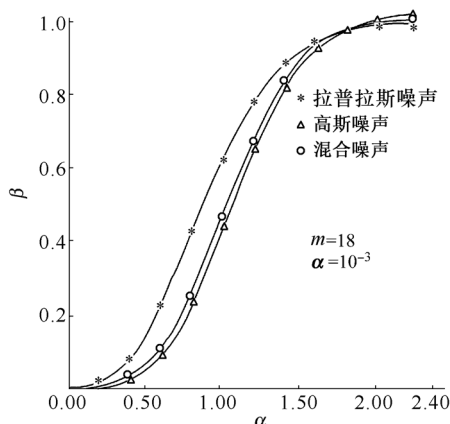


图 5.10 符号检测器的检测性能

图 5.10 中。所用的高斯噪声密度函数为 $(\sigma^2=1)$ 。

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \quad (5-59)$$

拉氏噪声密度函数为 $(\sigma^2=1)$

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\sqrt{2}|x|) \quad (5-60)$$

混合型噪声的密度函数为 $(\epsilon=0.1)$

$$q(x) = \frac{0.9}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) + \frac{0.1}{\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2}|x|) \quad (5-61)$$

由式(5-60)看出, 门限 C_T 和检验水平 α^* 对于假设 H_0 下的所有噪声分布都是不变的。也就是说, 对于任何具有零中位数分布的噪声都是相同的。所以在奈曼-皮尔逊意义下, 符号检测器既是一致最优势检测器, 也是恒虚警检测器。

下面分析符号检测器的性能, 我们利用定义的渐近相对效率 ARE, 将符号检测器与线性检测器进行比较。按照中心极限定理, 独立和同分布的随机变量之和的极限分布, 在非常一般的条件下趋于高斯分布, 因此, 当 n 很大时, 式(5-31)中的二项式密度函数 $b(k; m, p)$ 趋于如下高斯密度函数

$$\eta_{y(m)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (5-62)$$

式中, 均值 $\mu = mp$, 方差 $\sigma^2 = mp(1-p)$ 。

利用式(5-64)中随机变量 k 的极限分布密度, 便可求出检测器 D_3 检测概率和虚警概率的极限。当 $m \rightarrow \infty$ 时, 考虑到式(5-64), D_3 检测概率的极限 (也称为 D_3 的渐近检测概率) β_3 可由式(5-57)求出, 它等于

$$\beta_3 = \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_{D_3}(F) = \int_{c_3}^{+\infty} \eta(x) dx \quad (5-63)$$

利用标准化正态变量的累积分布函数 $\Phi(\cdot)$, 上式化为

$$\beta_3 = 1 - \Phi\left[\frac{C_T - mp}{\sqrt{mp(1-p)}}\right] = \Phi\left[\frac{mp - C_T}{\sqrt{mp(1-p)}}\right] \quad (5-64)$$

在式(5-64)中令 $p=1/2$, 便可求得式(5-66)的极限表达式, 因此, D_3 的渐近虚警概率 α_3 等于

$$\alpha_3 = 1 - \Phi\left(\frac{2C_T - m}{\sqrt{m}}\right) \quad (5-65)$$

联合式(5-64)和式(5-65)可得

$$\beta_3 = \Phi\left[\frac{\sqrt{m}(2p-1) - \Phi^{-1}(1-\alpha_3)}{2\sqrt{p(1-p)}}\right] \quad (5-66)$$

式中, $\Phi^{-1}(\cdot)$ 是 $\Phi(\cdot)$ 的逆。容易看出式(5-66)中已消去判决门限 c_T 。

现在考虑在 Gaussian 白噪声下检测常值信号的最佳检测器, 即线性检测器。设其输入数据为 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_m)$, 并且工作于假设 H_0, H_1 之下。如果 x_i 是高斯的(在推导奈曼-皮尔逊准则下的线性检测器时, 我们就进行过这种假设), 则统计量 $\sum_{i=1}^m x_i$ 也是高斯的。另一方面, 如果诸样本 x_i 仅仅是同分布的(均值为 μ , 方差为 σ^2), 则 $\sum_{i=1}^m x_i$ 是渐近高斯的, 均值为 $m\mu$ 而方差为 $m\sigma^2$ 。因此, 线性检测器的渐近检测概率具有与式(5-66)相同的形式, 仅参量不同, 即有

$$\beta_2 = \Phi\left(\frac{m\mu - C_T}{\sqrt{m\sigma^2}}\right) \quad (5-67)$$

为了计算线性检测器的渐近虚警概率 α_2 , 假定在 H_0 之下样本 x_i 是零均值的。这等效于假定在 H_0 之下 x_i 的密度函数对称, 因而均值和中值重合并且都等于零。显然, 在 H_0 下,

$\sum_{i=1}^m x_i$ 是渐近高斯的, 其均值为零而方差为 $m\sigma^2$, 于是

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\sigma^2}} \int_{c_3}^{+\infty} e^{-x^2/(2m\sigma^2)} dx = 1 - \Phi\left[\frac{C_T}{\sqrt{m\sigma^2}}\right] \quad (5-68)$$

以上两式中的 C_T 是线性检测器的判决门限。联合式(5-69)和式(5-70), 同样可以将 C_T 消去, 得到

$$\beta_2 = \Phi\left[\sqrt{m} \frac{\mu}{\sigma} - \Phi^{-1}(1-\alpha_2)\right] \quad (5-69)$$

由 ARE 的定义式(5-37)可见, 符号检测器 D_3 相对于线性检测器 D_2 的渐近相对效率 ARE_{32} 可以这样求得: 令 $\beta_2 = \beta_3$ 和 $\alpha_2 = \alpha_3$, 联立解出 m 对 n 的对比。结果是

$$\text{ARE}_{32} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{m}{n} = \sigma^2 \frac{(p-1/2)^2}{\mu^2 p(1-p)} \quad (5-70)$$

考虑到 $p > 1/2$, 噪声分布密度 $p(x|H_0)$ 是对称的, 以及 μ 很小(这就是所谓弱信号条件), 则 p 可以近似表示为

$$p = \frac{1}{2} + \int_0^\mu p(x|H_0) dx \approx \frac{1}{2} + \mu p(0|H_0) \quad (5-71)$$

于是式(5-72)变为

$$\text{ARE}_{32} \approx \frac{4\sigma^2 p^2(0|H_0)}{1 - 4\mu^2 p^2(0|H_0)} \quad (5-72)$$

当 $\mu \rightarrow 0$ 最后有

$$\text{ARE}_{32} \approx 4\sigma^2 p^2(0|H_0) \quad (5-73)$$

式(5-73)就是在具有对称密度函数 $p(x|H_0)$ 的任何噪声中检测直流信号时, 符号检测器相对

于线性检测器的渐近相对效率。

当密度函数 $p(x|H_0)$ 给定后,我们便可以求出 ARE_{32} 的具体数值。例如,如果噪声是高斯的,则 $p(0|H_0)=1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$, $ARE_{32}\approx 2/\pi$ 。 ARE_{32} 的值表明,对于检测高斯噪声中的直流信号,符号检测器的有效性大约是最佳线性检测器的 64%。这就是说,为了获得相同的性能(相同的虚警概率和检测概率),最佳线性检测器所需的输入样本数约为符号检测器输入样本数的 64%,或者说,符号检测器所需样本数是最佳线性检测器的 1.57(即 $\pi/2$) 倍。另一方面,如果假定噪声具有下列双边指数密度函数,即

$$p(x|H_0) = \frac{a}{2} \exp(-a|x|) \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (5-74)$$

这个密度函数相应于噪声观察 n_i 具有零均值和方差 $\sigma^2=2/a^2$ 。此时 $p(0|H_0)=a/2$ 而 $ARE_{32}=2$,符号检测器的有效性是线性检测器的两倍。这种情况下符号检测器显然优于线性检测器(它不再是最佳检测器),因为这时线性检测器所需的输入样本数多达符号检测器的 2 倍。一般地,由式(5-74)可见,只要

$$\frac{1}{p(0|H_0)} < 2\sigma = 2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x|H_0) dx \right]^{1/2} \quad (5-75)$$

(记住密度函数 $p(x|H_0)$ 不仅对称,而且均值为零) ARE_{32} 都将大于 1。

总之,符号检测器是简单的非参量检测器,它仅使用输入数据的符号信息来检测信号。它在非常一般的条件下是非参量的,具有恒虚警率特性。在输入数据具有对称概率分布的情况下,符号检测器可以用硬限幅器后装一个积累器组成,因此结构简单,容易实现。它的渐近性能与相应的最佳线性检测器比较也不是太差。当假设 (H_0, H_1) 满足式(5-75)的条件时,符号检测器性能还可以超过线性检测器的性能。

5.3.2 量化秩值求和检测

根据秩值求和的不同方式,多次积累检测器主要分为量化秩值求和检测器、秩值求和检测器和加权秩值求和检测器三种结构。

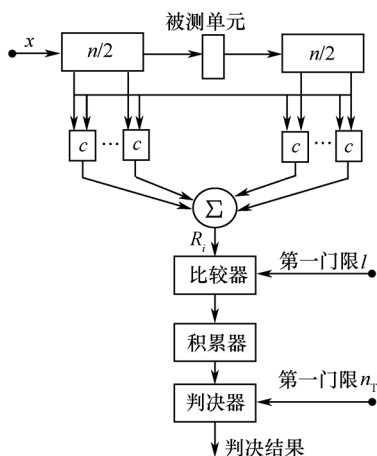


图 5.11 量化秩值求和检测原理框图

量化秩值求和检测器如图 5.11 所示,它属于广义符号检测器。首先将秩值 R_i 与第一门限 l 进行比较,当 $R_i \geq l$ 时输出“1”,否则输出“0”,称为量化秩值;然后,若雷达对目标进行了连续 m 次探测,则积累将 m 次探测量化后的秩值求和;最后,如果量化秩值之和大于等于第二门限 n_T ,则判决目标存在,否则判决没有目标,该准则称为 n_T/m 准则。这就是量化秩值求和检测器。其输入是信号的包络。

非参量型广义符号检测是以被测单元的秩值 R_i 为基础的。设在第 i 次探测中,被测单元的样本记为 x_i ,其前后各 $n/2$ 个参考单元的样本记为 x_{ji} ($j=1,2,\dots,n$)。将 x_i 与 x_{ji} 进行比较,若 $x_i \geq x_{ji}$,则比较器输出为 1,否则输出为 0。对 n 个比较器的输出求和,所得值正是把被测单元样本值 x_i 与各参考单元样本值 x_{ji} 一起按从小到大顺序

排列时, x_i 所处位置的序号,称为被测单元的秩值,用 R_i 表示,即

$$R_i = \sum_{j=1}^n u(x_i - x_{ji}) \quad (5-76)$$

$$u(x_i - x_{ji}) = \begin{cases} 1, & x_i > x_{ji} \text{ 或 } x_i = x_{ji} (j-i \text{ 为奇数}) \\ 0, & x_i < x_{ji} \text{ 或 } x_i = x_{ji} (j-i \text{ 为偶数}) \end{cases} \quad (5-77)$$

它也是一个检验统计量。

首先将秩值 R_i 与第一门限 l 进行比较,当 $R_i \geq l$ 时输出“1”,否则输出“0”,称为量化秩值;然后,若雷达对目标进行了连续 m 次探测,则积累将 m 次探测量化后的秩值求和;最后如果量化秩值之和大于等于第二门限 n_T 则判决目标存在,否则判决没有目标,该准则称为 n_T/m 准则。这就是量化秩值求和检测器。

这种方法的原理是把每个 x_i 和与其在同一探测周期的 x_{ji} 按式(5-79)原则比较、求和,从而求得 x_i 的秩 R_i 。显然,这种方法量化的比较标准为 x_{ji} ,而不是真正按 x_i 的正负号。故称之为广义符号检验统计,当 $x_i = x_{ji}$ 时, $u(x_i - x_{ji})$ 的取值可以为零,也可以为 1。为了使结果更为准确,于是规定当 $x_i = x_{ji}$ 时

$$u(x_i - x_{ji}) = \begin{cases} 1, & j-i \text{ 为奇数} \\ 0, & j-i \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (5-78)$$

这样做是为了使 $u(\cdot)$ 为 0,1 的机会均等。这就是非参量广义符号检测的基本原理。

由于 R_i 是检测单元的 x_i 与诸参考单元的值 x_{ji} , $j=1,2,\dots,n$ 按从小到大的顺序排列时, x_i 值所处的序号,所以称 R_i 为检测单元 i 的秩值。也正是由于这一点,也把 $D_{GS}(x)$ 称作秩求和检验统计。定义检验统计为

$$D_{GS}(x) = \sum_{i=1}^m R_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u(x_i - x_{ji}), \quad i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n \quad (5-79)$$

5.3.3 马恩-怀特奈(Man-Whitney)检验统计

作为广义符号检验统计的推广,马恩-怀特奈检验统计量为

$$D_{MW}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n u(x_i - x_{kj}) \quad (5-80)$$

这种检验统计量与广义符号检验统计量的差别在于 $D_{GS}(x)$ 中 x_i 只与它所在探测周期的参考单元的采样 x_{ij} , $j=1,2,\dots,n$ 比较,而 $D_{MW}(x)$ 则是 x_i 与 m 个周期中的所有参考单元的采样 x_{kj} $\cdot k=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$ 比较,即

$$R_i = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n u(x_i - x_{kj}) \quad (5-81)$$

两种检验统计量相比,由于检验统计量 $D_{MW}(x)$ 用了 $D_{GS}(x)$ M 倍的样本来获得秩值 R_i ,显然 $D_{MW}(x)$ 检验统计量的运算量大,相应地设备量也大。但统计量的平稳性比 $D_{GS}(x)$ 的好,所以可以预期它的检测性能要优于广义符号检验统计的性能。

下面给出在高斯噪声干扰下, MW(马恩-怀特奈)检测器和 GS(广义符号)检测器相对于参量型最优检测器的渐近相对效率 A. R. E 和渐近信噪比损失 L_∞ 的计算值以作参考。其中,以非参量型检测器的参考单元数目 n 作为参变量,见表 5-2。

该表的缺点是只给出了 $m \rightarrow \infty$ 的值。实际上 m 总是有限的。在 m, n 都有限的情况下,没有作具体的数字计算了。目前,已经有人做出了许多曲线,可以供查用。

表 5.2 MW 检测器和 GS 检测器相对于参量型最优检测器的
渐近相对效率 A. R. E 和渐近信噪比损失 L_{∞} 的计算值

项 目		n					
		1	2	3	4	5	6
MW	A. R. E	0.375	0.500	0.600	0.667	0.706	0.750
	L	2.100	1.500	1.100	0.900	0.800	0.600
GS	A. R. E	0.250	0.375	0.500	0.600	0.667	0.750
	L	3.000	2.100	1.500	1.100	0.900	0.600

5.3.4 秩值检测(rank tests)

1. 秩值检测原理

上述符号检测器只利用了观测样本极性符号的信息,而没有利用观测样本的绝对值大小的信息。另一种既利用样本的极性符号信息,又利用样本的绝对值大小的信息而构成的检测器统称为秩检测器(又称 Wilcoxon 检测器)。容易想象,如果不仅限于使用输入数据的符号信息,还使用它的另一些统计特性,则检测器性能必定能得到改善。例如,仍设输入数据为

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (5-82)$$

现在考虑反映样本的绝对值大小的信号后,代替符号检测器使用的统计量 $\sum_{i=1}^m u(x_i)$,可以考虑使用下列统计量

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u(x_i) \quad (5-83)$$

式中, λ_i 是加权系数,是反映样本绝对值大小的权重因子,它表示观测样本值 x_i 绝对值的大小。

为了做到这一点,我们把输入数据定秩,即把诸 x_i 按其绝对值的大小重新排列如下

$$|x_{k_1}| < |x_{k_2}| < \dots < |x_{k_i}| \quad (5-84)$$

式中, x_{k_i} 是绝对值第 i 个小的样本,其下标 i 便称为相应观测值的秩。

举一个例子来说明。设检测器的输入序列为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3.5, -1.0, 2.1, 3.0, -1.5) \quad (5-85)$$

求诸观测值的秩。

将诸 x_i 的绝对值按由小到大的秩序重新排列,得表 5.3。表中第一行给出相应观测值的秩。显然,观测值的秩反映了样本绝对值的大小。

表 5.3 观测值及它们的秩

秩	1	2	3	4	5
观测值的绝对值	1.0 ($ x_2 $)	1.5 ($ x_5 $)	2.1 ($ x_3 $)	3.0 ($ x_4 $)	3.5 ($ x_1 $)

最简单的秩检测器的检验统计量是正样本的秩之和 S :

$$S = \sum_{i=1}^m R_i u(x_i) \quad \text{或} \quad S = \sum_{i=1}^m d_i \quad (5-86)$$

式中, R_i 是第 i 个观测样本的排序号。

定义符号秩

$$d_i = \begin{cases} 0 & (x_{k_i} \leq 0) \\ i & (x_{k_i} > 0) \end{cases} \quad (5-87)$$

即 $d_i = iu(x_{k_i})$, 它包含了输入数据 \mathbf{x} 的符号和秩两种统计信息。将符号秩之和

$$\sum_{i=1}^m d_i = \sum_{i=1}^m i u(x_{k_i}) \quad (5-88)$$

在奈曼-皮尔逊意义下, S 的判决门限 C_T 由给定的虚警概率来确定, 虚警概率是指 S 超过或等于 C_T 的概率, 即 $S \geq C_T$ 的可能数目 $n(1 \leq n \leq 2^m)$ 乘以概率 $1/2^m$ 。给定虚警概率为 α^* 之后, n 也就确定了, 于是这样来规定门限 C_T , 使得 S 的 2^m 个可能取值中仅有 n 个超过或等于 C_T 。

用类似的方法可以计算检测概率 β (或用 P_d 表示)。为方便起见, 现在假定样本 x_i 的秩就是 i , 即

$$|x_1| < |x_2| < |x_3| < \cdots < |x_m| \quad (5-89)$$

对于每个样本, 可能取正值, 也可能取负值。 m 个样本共有 2^m 种符号组合, 对于第 j 种符号组合, 其出现概率记为 P_j :

$$P_j = \prod_{i=1}^m p_j(x_i) \quad (j = 1, 2, \dots, 2^m) \quad (5-90)$$

式中, $p_j(x_i)$ 是第 j 种符号组合中, x_i 取正号或负号的概率 (其实 $p_j(x_i)$ 与 j 无关), 即

$$p_j(x_i) = \begin{cases} (1/2) + C_T = p & x_i > 0 \\ (1/2) - C_T = 1 - p & x_i < 0 \end{cases} \quad (5-91)$$

$$\text{这里} \quad C_T = \int_0^\mu p(x - \mu) dx = \int_{-\mu}^0 p(x) dx = \int_0^\mu p(x) dx \quad (5-92)$$

对于第 j 种符号组合, 可以计算出检验统计量 S_j 的值。

$$S_j = \sum_{i=1}^m i u(x_i) \quad (5-93)$$

若 $S_j > C_T$, 则对应的符号组合 (第 j 种组合) 出现的概率 P_j 应计入检测概率 β , 作为 β 的组成部分; 反之, 若 $S_j < C_T$, 则 P_j 不计入 β 。于是有

$$\beta = \sum_{\substack{j=1 \\ (S_j > C_T)}}^{2^m} P_j = \sum_{\substack{j=1 \\ (S_j > C_T)}}^{2^m} \left[\prod_{i=1}^m p_j(x_i) \right] \quad (5-94a)$$

$$\text{或写成} \quad \beta = \sum_{j=1}^{2^m} u(S_j - C_T) P_j \quad (5-94b)$$

式中, $u(\cdot)$ 为单位阶跃函数。

检验统计量还可以写成更易于用电子计算机来计算的形式。为此, 考虑样本的成对和 $x_i + x_j$, 当 $i \leq j$ 时, 共有 $m(m+1)/2$ 对, 其中数值为正的数目就是秩的和, 即

$$S = \sum_{k=1}^m d_k = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m u(x_i + x_j) \quad (5-95)$$

【例 5.2】 假定有三个观测样本: $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = -1$, 其秩分别为 3, 2, 1。W 检测器的检验统计量等于正样本秩之和, $S = \sum_{k=1}^3 d_k = 2$ 。再用成对和的公式 (5-36) 来计算检验统计量如下:

$$\begin{aligned} i = 1, \quad j = 1: u(x_1 + x_1) &= u(-6) = 0 \\ i = 1, \quad j = 2: u(x_1 + x_2) &= u(-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i=1, \quad j=3: u(x_1+x_3) &= u(-4) = 0 \\
i=2, \quad j=2: u(x_2+x_2) &= u(4) = 1 \\
i=2, \quad j=3: u(x_2+x_3) &= u(1) = 1 \\
i=3, \quad j=3: u(x_3+x_3) &= u(-2) = 0
\end{aligned}$$

故 $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u(x_i+x_j) = 2$, 与正样本秩之和相等。

2. 秩检测器的渐近相对效率

使用与符号检测器类似的方法, 可以把符号秩检测器与线性检测器进行比较。略去计算细节, 我们直接写出符号秩检测器相对于线性检测器的渐近相对效率如下

$$\text{ARE}_{42} = 12\sigma^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p^2(\mathbf{x} | H_0) d\mathbf{x} \right]^2 \quad (5-96)$$

与前面一样, $p(\mathbf{x} | H_0)$ 是噪声的密度函数, σ^2 是噪声方差。当噪声为高斯分布时, $p(\mathbf{x} | H_0) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-x^2/2\sigma^2), \text{ 由式(5-67)可得 } \text{ARE}_{42} = 3/\pi = 0.955。$$

和符号检测 $\text{ARE}=2/\pi$ 相比, 秩检测效率有了明显提高。当噪声为双边指数分布时, $p(\mathbf{x} | H_0) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \exp(-\sqrt{2}|x|/\sigma), \text{ 由式(5-96)得 } \text{ARE}_{42} = 3/2 = 1.5。$$

由此可见, 符号秩检测器的有效性是高斯噪声中最佳线性检测器的 95.5%, 而对于具有双边指数分布的噪声, 它的有效性是线性检测器的 1.5 倍。还可以证明, 式(5-67)存在一个正的下界, 对于任何 $p(\mathbf{x} | H_0)$ 。 ARE_{42} 的值不可能小于 0.864。由于符号秩检测器使用了输入数据的符号和秩两种统计信息, 得到的结果与符号检测器相比大有改善, 是在预料之中的。

除上述 Wilcoxon 检测器以外, 还有另一些使用符号秩的非参量检测器, 它们的结构大都比较复杂, 性能分析(即 ARE 计算)也很困难, 这主要取决于在求检验统计量的极限分布时是否可以应用中心极限定理。

5.3.5 几种不同类型的秩检测器

下面我们简要地列出几种不同类型的秩检测器。

1. Normal Scores 检测器

与所有秩检测器采用的二元假设相同。假设

$$\begin{aligned}
H_1: x_i &= as_i + n_i \\
H_0: x_i &= n_i
\end{aligned} \quad p(x_i) = p(-x_i) \quad (5-97)$$

式中, $n_i (i=1, 2, \dots, m)$ 是均值为零, 方差为 σ_n^2 的高斯白噪声。

Norma Scores 检测器可描述如下:

① 将彼此统计独立的观测样本 $x_i (i=1, 2, \dots, m)$ 按其绝对值, 由小到大按顺序排列。

$$|x_{k1}| < |x_{k2}| < \dots < |x_{km}|$$

式中, $|x_{ki}| (i=1, 2, \dots, m)$ 是样本绝对值按排列序号得到的序列。

② 从均值为 0, 方差为 1 的白高斯随机序列抽取 m 个样本, 按其绝对值的大小由小到大排列顺序为

$$|n_{k1}| < |n_{k2}| < \dots < |n_{km}|$$

式中, $|n_{ki}| (i=1, 2, \dots, m)$ 是高斯随机序列取绝对值并排序后得到的序列, 不妨令

$$D_i = |n_{ki}| \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

③ Normal Scores 检测器的检验统计量

$$s = \sum_{l=1}^m E\{D_l\} u(x_{i(l)}) \quad (5-98)$$

上式中, $E\{D_l\}$ 是②中随机序列 $D_i = |n_{ki}| (i=1, 2, \dots, m)$ 的均值, 可查表得到; l 是观测样本按其绝对值由小到大排序的序号; $i(l)$ 是排序号为 l 的观测样本的原序号; $u(\cdot)$ 是阶跃函数。

可见, Normal Scores 检测器是将 Wilcoxon 检测器的检验统计量中的 $R_l (l=1, 2, \dots, m)$, 用 $E\{D_l\}, l=R_l$ 置代得来。已证明, 对于对称分布 $p(x_i) = p(-x_i)$, $D_M = \sum_{i=1}^m R_i u(x_i)$ 具有恒虚警特性, 用类似方法当可证明 Normal Scores 对于对称分布 $p(x) = p(-x)$ 亦具有恒虚警特性。

2. Van der Waerden 检测器

Van der Waerden 检测器可描述如下:

① 将输入观测样本 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 按绝对值从小到大顺序排列, 得

$$|x_{k1}| < |x_{k2}| < \dots < |x_{km}|$$

② 检验统计量构造如下

$$s = \sum_{l=1}^m \left[\Phi^{-1} \left(\frac{1}{n+1} \right) \right] u(x_{i(l)})$$

式中, l 和 $i(l)$ 的含义见前, $u(\cdot)$ 为阶跃函数, $\Phi(x)$ 为概率积分函数, 即

$$\Phi^{-1}(A) : \Phi(x) = A, \Phi^{-1}(A) = x$$

Van der Waerden 检验统计量是将 Wilcoxon 检验统计量的 R_l 用 $\Phi^{-1} \left(\frac{l}{n+1} \right), l=R_l$ 置代得来。显见, 对于对称分布 $p(x) = p(-x)$ 来说 Van der Waerden 具有恒虚警特性。

3. Spearman Rho 检测器

Spearman Rho 检测器可描述如下:

① 将输入观测样本 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 按绝对值从小到大顺序排列, 得到序列

$$|x_{k1}| < |x_{k2}| < \dots < |x_{km}|$$

② Spearman Rho 检验统计量构造如下

$$s = \sum_{i=1}^m i R_i u(x_i) \quad (5-99)$$

式中, $u(\cdot)$ 为阶跃函数, R_i 是第 i 个观测样本的上述排序号。

Spearman Rho 检验统计量是将 Wilcoxon 检验统计量中的 R_i 用 $i R_i$ 替代而来。显见, Spearman Rho 检验统计量对于对称分布 $p(x) = p(-x)$ 具有恒虚警特性。

4. Kendall Tau 检测器

Kendall Tau 检测器的检验统计量构造如下

$$s_m = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m u(x_j - x_i)$$

当观测样本由 $\mathbf{x}_m = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, 变为 $\mathbf{x}_{m+1} = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1})$ 时, Kendall Tau 检测器

的检验统计量存在以下递推关系

$$\begin{aligned}
 s_{n+1} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^{m+1} u(x_j - x_i) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m+1} u(x_j - x_i) + u(x_{m+1} - x_m) \\
 &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m u(x_j - x_i) + \sum_{i=1}^{m-1} u(x_{m+1} - x_i) + u(x_{m+1} - x_m) \\
 &= s_m + \sum_{i=1}^m u(x_{m+1} - x_i)
 \end{aligned} \tag{5-100}$$

Kendall Tau 检验统计量在 $p(x) = p(-x)$ 的前提下,具有恒虚警特性,其证明见参考文献(4)。

表 5.4 列出前面讨论过的几种秩检测器渐近相对效率的比较。其中 $\{n_i\}$ 为零均值,均方差为 σ_n^2 的高斯白噪声。比较性能指标是秩检测器相对于奈曼-皮尔逊检测器的渐近相对效率 ARE。在同样的条件下,符号检测器相对于奈曼-皮尔逊检测器的 ARE 仅为 0.637。

表 5.4 几种秩检测器渐近相对效率的比较

检测器	ARE
Wilcoxon	0.955
Normal Scores	1
Van der Warden	1
Spearman Rho	0.912
Kendall Tau	0.912

本章小结

参量检测的特点在于以似然比处理器为基础,并建立在假定干扰或噪声的统计特性已知的基础上的。在第 2 章的讨论中,我们都假设噪声是具有零均值和给定自相关函数的高斯噪声,而且当信号存在时,并认为噪声是加性噪声,这种要求在实践中常常得不到满足,因为干扰环境往往十分复杂,不仅有自然的,而且有人为的,又是随时改变的。因此,采用非参量检测法来实现恒虚警率引起了人们的重视。

本章先从基本定义和术语开始介绍了非参量检测器的基本原理,然后介绍了两种非参量检测器——符号检测器和秩检测器,并采用渐近相对效率的性能指标与线性检测器的性能指标对两种非参量检测器进行了比较。

有关非参量检测方法种类很多,作为教材我们仅讨论两种。对于其他方法感兴趣的读者可参阅有关文献。

在结束有关非参量检测讨论的时候,我们指出,虽然非参量检测器能在很广泛的条件下保持恒虚警率,但它未能充分利用输入数据的统计信息,因而是一种保守的方法,其检测性能也此最佳参量检测器差。如果不知道输入数据的精确分布但能获得其近似分布(譬如接近高斯的),这时若用非参量检测器,则显得过于保守,将造成输入数据统计信息的损失。若采用参量检测器也不恰当,因为所掌握的输入数据统计知识不完全。近年来迅速发展的 Robust 检测方法可以解决这类问题。这种方法介于参量法与非参量法之间,并且在一定程度上兼有参量法的准确性和非参量法的随遇性这两个优点,其检测性能既有一定的稳健性(即 Robust 性),又更加接近最佳参量法的性能。我们将在第 6 章讨论这种方法。

习 题 五

5.1 非参量型广义符号检测中,秩值 R_j 为

$$R_j = \sum_{i=1}^n u(x_j - x_{ij})$$

式中
$$u(x_j - x_{ij}) = \begin{cases} 1, & x_j > x_{ij} \text{ 或 } x_j = x_{ij} (i-j \text{ 为奇数}) \\ 0, & x_j < x_{ij} \text{ 或 } x_j = x_{ij} (i-j \text{ 为偶数}) \end{cases}$$

它是一个检验统计量。当参考单元样本数 n 很大时,根据中心极限定理,该检验统计量将趋于高斯分布。证明在假设 H_0 下,当 n 很大时,此检验统计量的均值和方差分别为

$$E(R_j) = n/2 \quad \text{和} \quad \text{Var}(R_j) = n/4$$

5.2 在非参量型马恩-怀特奈检测中,秩值 R_j 为

$$R_j = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n u(x_j - x_{ik})$$

式中
$$u(x_j - x_{ik}) = \begin{cases} 1, & x_j > x_{ik} \text{ 或 } x_j = x_{ik} (i-j \text{ 为奇数}) \\ 0, & x_j < x_{ik} \text{ 或 } x_j = x_{ik} (i-j \text{ 为偶数}) \end{cases}$$

在检测单元和所有参考单元仅出现干扰信号(假设 H_0 情况),且所有采样单元具有独立和相同的分布,求概率

$$P(R=l|H_0) \quad \text{和} \quad P(R \geq l|H_0)$$

式中, R 即 $R_j, 0 \leq l \leq mN$ 。

5.3 假定二元假设检验为

$$\begin{aligned} H_1: x_i &= m + n_i \\ H_0: x_i &= n_i \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

式中: n_i 是均值为零,均方差为 σ^2 的统计高斯噪声; m 是大于零的常数。则可写成

$$\begin{aligned} H_0: p(x|H_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}\right] \\ H_1: p(x|H_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (2)$$

采用两种不同检测器 $D_2(x)$ 与 $D_1(x)$, 其中 $D_2(x)$ 是符号检测器。 $D_1(x)$ 则是奈曼-皮尔逊检测器。两个检测器具有相同的 α 及 β , 即 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \beta_1 = \beta_2 = \beta$ 。求 $D_2(x)$ 对于 $D_1(x)$ 的渐近相对效率。

5.4 二元假设

$$\begin{aligned} H_1: x_i &= \theta + n_i \\ H_0: x_i &= n_i \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1)$$

式中, n_i 是均值为 0, 均方差为 σ_n^2 的高斯白噪声, 且 $p(x_i) + p(-x_i)$ 。

采用奈曼-皮尔逊检测器及秩检测器, 求后者对于前者的渐近的相对效率。

第6章 稳健性(Robust)检测

6.1 概述

前面已经介绍了两类统计检测方法:一类是经典的参量检测,它要求准确地掌握干扰的统计知识,可用似然比或对数似然比作检验统计量;另一类是非参量检测(或称自由分布检测),它可以在完全不了解(或不利用)干扰的统计知识的情况下,设计出不同类型的检测器,如广义符号、符号、秩、中值检测器等比较合适。如果不知道输入数据的精确分布但能够知道它的近似分布,譬如,已知接近高斯的或已知在 H_0 假设下,限定观测样本的概率密度函数为偶函数等。这种情况如何处理呢?显然不能采用最佳参量检测器,因为所掌握的输入统计知识知道不完全。采用非参量检测器也不合适。虽然此时可以采用非参量检测器,并且它具有有一些优点(例如结构简单,能在很广泛的条件下保持虚警概率恒定等),但它毕竟是一种保守的方法,基于输入数据之符号和秩的检验统计量不能充分利用输入的统计知识,从而导致检测性能的下降。对于这种情况,可以采用 Robust 检测方法。

所谓 Robust(直译为鲁棒)含义是稳健性或韧性,它指的是检测器的性能对于噪声统计特性变化的非敏感性,所以将具有这种 Robust 特性的检测方法称为 Robust 检测。在二择一检测中,Robust 检测基本思想是按照某种准则寻找“最不利分布对”作为这类干扰分布的代表,然后按似然比检测器的方法处理找出最不利分布下的最佳检测。这类检测的特点是利用了有关干扰的部分统计知识,所以只要干扰属于这个分布类,所设计的检测器的性能就总是好的,即总能满足某种最低性能要求,不会出现检测性能特别坏的情况。这里,还可以进一步指出,由于 Robust 检测利用了干扰的部分统计知识,其性能会比非参量检测好。当然也可预料其性能会比参量检测差一些,这是由于没有全部掌握干扰的统计知识。简单地说,这种方法就是在已知输入数据的近似分布时,寻求检测问题的极小极大解。

本章主要讨论确知信号的有限样本的 Robust 检测。有关随机信号的 Robust 检测等内容可参阅参考文献^{[2]、[9]、[10]}。

6.2 混合模型的 Robust 假设检测^{[2]、[9]、[10]}

Huber 首先提出了干扰的 ϵ 混合模型,它是由两个分布的线性组合所构成,其中一个主分布函数(例如,高斯分布)通常是已知的,另一个是所占比例为 ϵ 的任意分布的函数。

在雷达、声呐和通信的实际问题中,通常遇到的情况是,噪声的统计特性只是局部已知的。譬如,噪声是接近正态(类高斯)的,但关于分布的尾部几乎没有什么统计信息可以利用。具体地说,为了得到接近主分布函数族,设 \mathcal{P} 为一类概率分布函数的集合,最具有代表性的和广泛被采用的是假定这类分布函数具有下列混合型分布函数的形式:

$$\mathcal{P} = \{Q(x); Q(x) = (1-\epsilon)P(x) + \epsilon H(x), H(x) \in \mathcal{H}, (0 \leq \epsilon < 1)\} \quad (6-1)$$

式中, $P(x)$ 是局部已知的一个主分布函数(如类似标准正态分布函数),称为名义(标称)分布

函数: $H(x)$ 是一个占比例为 ϵ 的任意的分布函数, 属于约束很松的或任意的 \mathcal{H} 族, 称为污染分布函数; ϵ 称为混合参量或污染度。可见由一个标称分布函数和一个污染分布函数的线性加权构成了 ϵ 混合模型。当 ϵ 取定后, $H(x)$ 改变, $Q(x)$ 也随之改变。通常假定 ϵ 很小。当 ϵ 很小时, 在某种意义上分布函数 $Q(x)$ 与 $P(x)$ 便很接近。

容易看出, $Q(x)$ 的不变性带有参量检测的特征, 充分体现了噪声分布的先验统计知识; $H(x)$ 的不确定性带有非参量检测的特征, 反映了噪声统计特性的可能变化。

同样, 与式(6-1)类似, 对应的概率密度函数集合形式的混合模型为

$$\mathcal{P} = \{q(x); q(x) = (1-\epsilon)p(x) + \epsilon h(x), h(x) \in \mathcal{H}\} \quad (6-2)$$

\mathcal{P} 是一类概率密度函数集合。混合模型表示成固定的名义(标称)密度函数。 $p(x)$ 和污染密度函数 $h(x)$ 的加权和。加权系数分别为 $(1-\epsilon)$ 和 ϵ , ϵ 是一个固定数 ($0 \leq \epsilon < 1$), 同式(6-1)一样称之为污染度。污染密度函数 $h(x)$ 则属于约束很松或任意的密度函数集合 \mathcal{H} 。同样, 上述模型中的第一项是一个固定不变的名义(标称)密度函数 $p(x)$, 它描述了噪声统计特性中的确定性部分, 从而使 Robust 检测带有参量检测的特征, 充分利用了噪声分布的先验知识, 克服了非参量检测法的保守和盲目性; 第二项 $h(x)$ 描述了噪声统计特性中的不确定性部分, 反映了噪声统计特性的可能变化, 它使得 Robust 检测法带有非参量检测法的特征, 克服了参量检测法的非随遇性和狭隘性。因此, 上述模型使 Robust 检测法在一定程度上兼有参量法的准确性和非参量法的随遇性这两个优点。

由此可知, Robust 检测是根据某种准则, 在 \mathcal{P} 族中寻找一个最不利的密度函数, 然后针对它用参量检测去设计一种最佳或局部最佳的检测器。求出的这样一对解(最不利密度函数及相应的最佳检测器)称为鞍点解或极小极大解。实际上这是在各种检测器中, 寻找一种在最坏情况下、性能最好的检测器。当实际遇到的噪声密度不是最不利密度而又属于这一类噪声概率密度函数 \mathcal{P} 的集合时, 检测器性能总要比最不利概率密度下的性能优越, 即噪声的最不利分布提供了检测器性能的下限。一般说来, 噪声统计特性的不精确度越大, 最不利情况下的性能下限就越低。对于在检测过程中具体面临的某一种噪声分布(属于 \mathcal{P} 集合, 但不是最不利分布), 设计良好的 Robust 检测器, 其检测性能可能比针对该噪声分布而设计的参量检测稍差; 然而, 当噪声分布发生变化但又不超出 \mathcal{P} 集合时, Robust 检测器较之参量检测器的性能要优越得多。

例如, 若 $p(x)$ 是均值为 0, 均方差为 σ_n^2 的高斯分布, 这时, \mathcal{P} 是受污染的高斯分布族; 当 $\epsilon=0$ 时, $q_0(x)=p(x)$, $q_0(x)$ 变为概率密度函数 $p(x)$ 的特定分布^①。

通常, 对于二元假设的 Robust 检测, 对于 H_1 和 H_0 假设下的观测样本进行如下描述: 设观测样本 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 它们是彼此统计独立分布。二元信号的 ϵ 混合模型可表示为:

$$H_1: q_1(x) \in \mathcal{P}_1 = \{q_1(x); q_1(x) = (1-\epsilon_1)p_1(x) + \epsilon_1 h_1(x)\}, 0 \leq \epsilon_1 < 1 \quad (6-3a)$$

$$H_0: q_0(x) \in \mathcal{P}_0 = \{q_0(x); q_0(x) = (1-\epsilon_0)p_0(x) + \epsilon_0 h_0(x)\}, 0 \leq \epsilon_0 < 1 \quad (6-3b)$$

式中, \mathcal{P}_0 和 \mathcal{P}_1 是 p 的花体, 表示不同的概率密度函数集合; 其中 q_0 和 q_i 分别是二个集合中的元素; $p_0(x)$ 和 $p_1(x)$ 为不同的标称密度函数;

$0 \leq \epsilon_0 < 1, 0 \leq \epsilon_1 < 1$ 是两种假设下的污染度;

$h_0(x) \in \mathcal{H}, h_1(x) \in \mathcal{H}, \mathcal{H}$ 是任意概率密度函数集合。

式(6-1)~式(6-3)都是 Huber 的干扰混合模型。在二元信号的 ϵ 混合模型中, 标称概率

① 为书写方便, 本章中将 $p(x|H_i)$ 和 $q(x|H_i)$ 写成 $p_i(x), q_i(x)$ 。

密度函数 $p_i(x)$, ($i=0, 1$) 即 $p_0(x)$ 和 $p_1(x)$ 是已知的; 而对于污染函数 $h_i(x)$, ($i=0, 1$), 只知它们属于某一分布类 \mathcal{H} , 这就是说, 并不确切知道各假设下信号的概率密度函数 $q_i(x)$, ($i=0, 1$), 即 $q_0(x)$ 和 $q_1(x)$ 。Robust 检测的基本思路是: 将在以上分布族 q_0 及 q_1 中, 按照某种准则寻找“最不利分布对”, 然后找出最不利分布下的最佳检测。当观测样本属于规定的污染分布族 q_0 及 q_1 时, 检测器的性能总要比最不利分布下的性能优越。

6.2.1 Robust 似然比检验

1. 判决规则的建立

对于式(6-3)并不确切知道干扰(或噪声)的密度分布, 而我们的目的是寻找一个最不利分布来代替实际干扰(或噪声)的分布对(于 H_0, H_1 假设下)来设计似然比检测器。

根据假设检验理论中 Bayes 准则, 在二择一的情况下平均风险 \bar{R} (简写成 R) 可写为

$$\begin{aligned} R &= c_{00}P(D_0, H_0) + c_{10}P(D_1, H_0) + c_{01}P(D_0, H_1) + c_{11}P(D_1, H_1) \\ &= c_{00}P(H_0) + c_{01}P(H_1) + (c_{10} - c_{00})P(D_1 | H_0)P(H_0) + (c_{01} - c_{11})P(D_0 | H_1)P(H_1) \end{aligned} \quad (6-4)$$

式中, $P(D_1 | H_0) = \int_{D_1} p(x | H_0) dx$, $P(D_0 | H_1) = \int_{D_0} p(x | H_1) dx$ 。

需说明的是, 经典检测理论中, 后验概率密度函数 $p(x | H_i)$, $i=0, 1$ 是已知的, 在对代价函数 c_{ij} 和先验概率 $P(H_i)$, $i=0, 1$ 掌握的情况不同时, 可以得到三个不同的优化准则。

① 代价不知, 但 $P(H_1)$ 已知, 可利用最小错误概率准则。它实际上是比较 $P(D_1 | H_0)$ $P(H_0)$ 和 $P(D_0 | H_1)P(H_1)$ 或 $P(D_0 | H_0)P(H_0)$ 和 $P(D_1 | H_1)P(H_1)$ 来作判决。

② 当 $P(D_1 | H_0) = \alpha$ 为常量, 使 $P(D_1 | H_1) \rightarrow \max$ 做判决, 可利用奈曼-皮尔逊准则。

③ 以平均风险 $R \rightarrow \min$ 为条件, 可利用 Bayes 准则。

现在的问题是只知道实际干扰的统计分布属于式(6-3)所示的一个分布类, 由于干扰分布不完全确知, 需要寻找。为了寻找最不利分布, 分布与判决必须在判据表达式中有所反映。

在两种假设下如果观测到观察样本 $\mathbf{x} = (x_1 \cdots x_n)^T$ 之后, 在似然比检验中, 拒绝 H_i (或 \mathcal{P}_i) 的条件概率的相应随机检验函数分别为

$$\begin{aligned} \phi_0(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 1, & T_n(\mathbf{x}) > C_T'' \\ a, & T_n(\mathbf{x}) = C_T'' \text{ (拒绝 } H_0) \\ 0, & T_n(\mathbf{x}) < C_T'' \end{cases} \\ \phi_1(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 1, & T_n(\mathbf{x}) < C_T' \\ 1-a, & T_n(\mathbf{x}) = C_T' \text{ (拒绝 } H_1) \\ 0, & T_n(\mathbf{x}) > C_T' \end{cases} \end{aligned} \quad (6-5)$$

式中, $\phi(x)$ 代表随机检验函数。其中 $\phi_0(x)$ 和 $\phi_1(x)$ 分别代表给定观测矢量 \mathbf{x} 之后, 接受 H_i 的条件概率, 而 $\phi_0(x)$ 为判决假设 H_1 成立的概率; $T_n(\mathbf{x}) = \ln[q_1(\mathbf{x})/q_0(\mathbf{x})]$, 相当于混合模型的对数似然比函数, 为检验统计量; 而 $0 \leq a \leq 1$; C_T' 和 C_T'' 为似然比检测门限, 是一常数。条件概率 q_i 的下脚标 0, 1 分别表示以 H_0, H_1 为条件^①。

若采用平均风险作为选择最不利分布准则, 假定正确判决的代价因子 $c_{11} = c_{00} = 0$, H_0 错判为 H_1 的代价因子为 c_{10} , H_1 错判为 H_0 的代价因子为 c_{01} , 则有

^① 为简化起见, 下面将 $\phi_i(x), q_i(x)$ 等再简写成 ϕ_i, q_i 。

$$\begin{cases} R(q_0, \phi_0) = c_{10} E\{\phi_0(x) | q_0\} \\ R(q_1, \phi_1) = c_{01} [1 - E\{\phi_1(x) | q_1\}] \end{cases} \quad (6-6)$$

式中, $E\{\phi_0(x) | q_0\}$ 是假设 H_0 错判为 H_1 的概率, 即虚报概率 ($R(q_0, \phi_0)$ 称为虚报风险); $E\{\phi_0(x) | q_1\}$ 是假设 H_1 正确判为 H_1 的概率, 即检测概率; 而 $[1 - E\{\phi_0(x) | q_1\}]$ 是 H_1 错判为 H_0 的概率, 即漏报概率 ($R(q_1, \phi_0)$ 称为漏报风险)。

2. 最不利分布对的选择

采用如上表达方法, 相应于经典假设检验理论中的三个优化准则可以分别写成:

① 最小化 $\max_{i=0, 1} \sup_{q_i} R(q_i, \phi_i)$ (类似于最小错误概率准则, 这里考虑了代价)。

② $\sup_{q_0} R(q_0, \phi_0) \leq \alpha$ 的约束下, 最小化 $\sup_{q_1} R(q_1, \phi_1)$ (漏警风险) (类似于 Neyman-pearson 准则)。

③ 令 $P(H_0) = \lambda_0$, $P(H_1) = \lambda_1$, 最小化 $\sup_{q_0, q_1} [\lambda_0 R(q_0, \phi_0) + \lambda_1 R(q_1, \phi_1)]$ 。(类似于 Bayes 准则)。

以上准则中, \sup_{q_i} 已经意味着这里的 q_i 是最不利的概率分布。

Huber 对上述两类风险作为性能标准来寻找一对最不利的密度函数 q_0^* 和 q_1^* , 以及相应的最佳检验函数 ϕ^* , 使之满足下述极小极大关系, 即在虚报风险受限的条件下使漏报的极大风险极小化。

因此, 最不利分布对的定义如下:

根据极小极大原理, 可以从概率密度函数为 $q_i(x)$ 的实际观测数据分布对 $q_i (i=0, 1)$ 中找出最不利分布对 $q_i^* (i=0, 1)$, 然后针对这一最不利分布对, 设计用于判决假设 H_1 成立的最佳检验 ϕ_0^* , 使错误判决所付出的平均风险 (即总的平均代价) 满足

$$R(q_i, \phi_0^*) \leq R(q_i^*, \phi_0^*) \leq R(q_i^*, \phi_0), \quad i=0, 1 \quad (6-7)$$

则 q_i^* 是 q_i 中最不利分布对, 式中, 函数 $R(q_i, \phi_0^*)$ 表示实际观测数据分布对 $q_i (i=0, 1)$ 在最佳检验 ϕ_0^* 下错误判决所付出的平均风险; 函数 $R(q_1^*, \phi_0^*)$ 表示最不利分布对 $q_i^* (i=0, 1)$ 在最佳检验 ϕ_0^* 下错误判决所付出的平均风险; 而函数 $R(q_1^*, \phi_0)$ 中的 ϕ_0 为任一随机检验函数。所以, 该项表示在最不利分布对 $q_i^* (i=0, 1)$ 和任一随机检验 ϕ_0 的情况下, 错误判决所付出的平均风险 (即总的平均代价)。

问题的关键是如何在污染族 \mathcal{P}_0 及 \mathcal{P}_1 找出最不利分布及相应的似然比检验。

对于 Huber 的混合 ϵ 干扰模型来说, 直观上看, 如果最不利分布对 $q_i^* \in \mathcal{P}_i (i=0, 1)$ 存在。那么 q_0 应尽可能接近 \mathcal{P}_0 , q_1 应尽可能接近 \mathcal{P}_1 , 通常假定 \mathcal{P}_0 及 \mathcal{P}_1 不存在任何公共概率密度函数。可见, 当 ϵ_0 和 ϵ_1 足够小, 使得集合 q_0 和集合 q_1 不相交 (没有公共元素) 时, $q_0^* \neq q_1^*$, 上述假设检验的鞍点解存在。因此, 从以上正确的理解出发, 导致了以下最不利密度函数对

$$q_0^*(x) = \begin{cases} (1 - \epsilon_0) p_0(x), & p_1(x)/p_0(x) < c'' \\ (1 - \epsilon_0) p_1(x)/c'', & p_1(x)/p_0(x) \geq c'' \end{cases} \quad (6-8)$$

$$q_1^*(x) = \begin{cases} (1 - \epsilon_1) p_1(x), & p_1(x)/p_0(x) > c' \\ (1 - \epsilon_1) p_0(x)c', & p_1(x)/p_0(x) \leq c' \end{cases} \quad (6-9)$$

式中, $p_i(x) (i=0, 1)$ 是已知的主分布, c' 和 c'' 是常数, 当 ϵ_0 和 ϵ_1 足够小时, 满足 $0 \leq c' < 1 < c'' < \infty$ 。实际上, c' 是随着 ϵ_1 的增大而单调增长的, c'' 是随着 ϵ_0 的增大而单调下降的。这样, 当 ϵ_0 和 ϵ_1 大到一定程度时, 有 $c' = c''$, 这时 $q_0^* = q_1^*$, 集合 q_0 和集合 q_1 有一个交点, 检验无法进

行。 c' 和 c'' 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} q_0^*(x)dx=1$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} q_1^*(x)dx=1$ 来确定。

式(6-8),式(6-9)中的常数 c' 和 c'' 必须使得概率密度函数 $q_0(x)$ 和 $q_1(x)$,满足下述方程组

$$\left. \begin{aligned} (1-\epsilon_0) \left\{ P_0 \left[\frac{p_1(x)}{p_0(x)} < c'' \right] + \frac{1}{c''} P_1 \left[\frac{p_1(x)}{p_0(x)} \geq c'' \right] \right\} &= 1 \\ (1-\epsilon_1) \left\{ P_1 \left[\frac{p_1(x)}{p_0(x)} > c' \right] + c' P_0 \left[\frac{p_1(x)}{p_0(x)} \leq c' \right] \right\} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6-10)$$

Huber 证明了式(6-10),对于 $0 \leq \epsilon < 1$ 有唯一解 c' 和 c'' 。且当 $P_0(x) \neq P_1(x)$, ϵ 充分小时有 $c' < c''$ 。

定理:假定 $p_0(x_i) \neq p_1(x_i)$ ($i=1,2,\dots,n$)的条件下,如果 ϵ 足够小,则式(6-10)给出的概率比检验是式(6-3)极小极大问题的解,即

$$\left\{ \begin{aligned} \sup_{q_1} R(q_1, \phi^*) &= R(q_1^*, \phi^*) = \inf_{\phi} R(q_1^*, \phi) \\ \sup_{q_0} R(q_0, \phi^*) &= R(q_0^*, \phi^*) \leq \alpha' \end{aligned} \right. \quad (6-17)$$

式中, \sup 代表上确界, \inf 代表下确界, α' 代表虚报概率给定值。这样的一对 (q_0^*, q_1^*) 和 ϕ^* 就构成了 Robust 检测法的鞍点解或极小极大解。

其中, $R(q_1^*, \phi_0^*)$ 表示最不利分布对下,稳健性检测的漏报风险,而 $R(q_0^*, \phi_0^*)$ 表示最不利分布对下,稳健性检测的虚警风险; $\sup R(q_1, \phi_0^*)$ 表示实际观测数据分布下漏报风险的上界,它不会大于 $R(q_1^*, \phi_0^*)$, $\inf_{\phi} R(q_1^*, \phi_0^*)$ 表示非最佳检测时漏报风险的下界,它不会小于 $R(q_1^*, \phi_0^*)$;类似地, $\sup_{q_0} R(q_0, \phi_0^*)$ 表示实际观测数据分布下虚警风险的上界,它不会大于 $R(q_0^*, \phi_0^*)$ 。这样,便从极小极大原理出发解决了式(6-3)的检测问题。

由式(6-8)看出,在 $p_0(x)$ 比 $p_1(x)$ 占一定优势的区间, $q_0^*(x) = (1-\epsilon_0)p_0(x)$,对比式(6-2)可知,在这个区间,污染密度 $h_0(x)=0$;反之,在 $p_1(x)$ 比 $p_0(x)$ 占一定优势的区间,即在 $q_0^*(x)$ 的尾部,由于污染的结果,使 $q_0^*(x)$ 的形状模仿着 $q_1^*(x)$ 的名义密度 $p_1(x)$ 。对于 $q_1^*(x)$ 也有类似的结论。因此,最不利密度函数 $q_0^*(x)$ 和 $q_1^*(x)$ 在靠近对方的区间各自模仿着对方的特性,结果必然使两类错误判决的概率达到最大,两类风险也达到最大,这正是“最不利”的含义所指。

针对最不利密度函数所设计的最佳检测器,其随机检验函数是 $\phi^*(x)$ 。最佳的含义类似于奈曼-皮尔逊准则的含义,是指在虚报风险受限的条件下,使漏报风险达到最小。若代价因子 $c_{01}=c_{10}=1$,则风险就等于错判概率,最佳准则就是奈曼-皮尔逊准则。最佳随机检验函数 $\phi^*(x)$ 是 q_0^*, q_1^* 之间的概率比检验, $\phi^*(x)$ 由下式给出

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1, & T_n(x) > c \\ a, & T_n(x) = c \\ 0, & T_n(x) < c \end{cases} \quad (6-12)$$

$\phi^*(x)$ 代表给定观测矢量 x 之后,接受假设 H_1 的条件概率, $T_n(x)$ 是似然比检验的检验统计量。

为了导出检验统计量 $T_n(x)$,首先要计算对于单个样本的似然比 $\Lambda(x) = q_1^*(x)/q_0^*(x)$:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} kc', & p_1(x)/p_0(x) \leq c' \\ kp_1(x)/p_0(x), & c' < p_1(x)/p_0(x) < c'' \\ kc'', & p_1(x)/p_0(x) \geq c'' \end{cases} \quad (6-13)$$

式中,常数 $k=(1-\epsilon_1)/(1-\epsilon_0)$ 。然后计算对于 n 个观测样本即样本矢量 \mathbf{x} 的似然比 $\Lambda(\mathbf{x})$ 。由于诸样本独立同分布的假定,有

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \Lambda(x_i) \quad (6-14)$$

令 $\Lambda(\mathbf{x})=kT(\mathbf{x})$,则上式可写成

$$\Lambda(\mathbf{x}) = k^n \prod_{i=1}^n T(x_i) = k^n T_n(\mathbf{x}) \quad (6-15)$$

由于 k^n 是个常数,可以归入判决门限之中,因此,我们选取 $T_n(\mathbf{x})$ 为似然比检验的检验统计量,最后结果是

$$T_n(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n T(x_i) \quad (6-16)$$

$$\text{式中 } T(\mathbf{x}) = \begin{cases} c', & p_1(\mathbf{x})/p_0(\mathbf{x}) \leq c' \\ p_1(\mathbf{x})/p_0(\mathbf{x}), & c' < p_1(\mathbf{x})/p_0(\mathbf{x}) < c'' \\ c'', & p_1(\mathbf{x})/p_0(\mathbf{x}) \geq c'' \end{cases} \quad (6-17)$$

其最不利分布对由式(6-11)给出,而最佳检验由式(6-14)或式(6-16)给出。

6.2.2 污染的高斯噪声中有限样本确知信号的 Robust 检测

前面讨论中并未给出干扰的主分布的具体形式,但确知与某一确知的概率分布(干扰的统计特性)。在此给出干扰的主分布为高斯分布时的 Robust 检测,可望得到检测器的结构形式。

1. 信号的统计模型

利用上述 Huber 的 Robust 假设检验,可以探讨在加性污染型类高斯噪声中确知信号的 Robust 检测检测问题,若二元信号相应的假设检验是

$$\begin{cases} H_0: x_i = n_i \\ H_1: x_i = A s_i + n_i \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6-18)$$

式中, n_i 是独立同分布(接近高斯)的噪声样本; A 和 s_i 都是已知的, A 是代表信号幅度的参量; s_i 是确知信号; n 次观测样本 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是相互统计独立的,且定义在一个 n 维空间上。

在 ϵ 混合模型下,有

$$\begin{aligned} H_0: \mathcal{P}_0 &= \{q_0(x_i): q_0(x_i) \\ &= (1-\epsilon)p_0(x_i) + \epsilon h_0(x_i), h_0(x_i) \in \mathcal{H}, i=1, 2, \dots, n\}, 0 \leq \epsilon < 1 \end{aligned} \quad (6-19a)$$

$$\begin{aligned} H_1: \mathcal{P}_1 &= \{q_1(x_i): q_1(x_i) \\ &= (1-\epsilon)p_1(x_i) + \epsilon h_1(x_i), h_1(x_k) \in \mathcal{H}, k=1, 2, \dots, n\}, 0 \leq \epsilon < 1 \end{aligned} \quad (6-19b)$$

其中, \mathcal{P} 是任意的密度函数集合; ϵ 是污染度, $0 \leq \epsilon < 1$ 。据报道在无线电信道中,即使在严重的雷电干扰下, ϵ 值也不会超过 0.1。

通常标称分布为高斯分布为

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (6-20a)$$

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-A)^2\right] \quad (6-20b)$$

2. 最佳检验分析

首先考虑信号为常值的情况,即假定 $s_i = 1, (i=1, 2, \dots, n)$, 直接利用 Huber 的 Robust

假设检验,可以设计出针对式(6-18)和式(6-19)的 Robust 检测器,它在虚报风险受限的条件下,使漏报的极大风险极小化。

根据前面给出的似然比检验 $\phi(x)$,最不利分布对分别为

$$q_0^*(x_i) = \begin{cases} (1-\varepsilon)p_0(x_i), & p_1(x_i)/p_0(x_i) < c_i'' \\ (1-\varepsilon)p_1(x_i)/c_i'' p_1(x_i)/p_0(x_i) \geq c_i'' \end{cases} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6-21a)$$

$$q_1^*(x_i) = \begin{cases} (1-\varepsilon)p_1(x_i), & p_1(x_i)/p_0(x_i) > c_i' \\ (1-\varepsilon)p_0(x_i), & p_1(x_i)/p_0(x_i) \leq c_i' \end{cases} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6-21b)$$

这样,利用上述 $q_0^*(x)$ 和 $q_1^*(x)$ 和式(6-20)给出的 $p_0(x)$ 和 $p_1(x)$ 以及随机检验的判决规则式(6-11)~式(6-16),于是观测矢量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的最佳检验,即似然比检验的函数 $\phi_0^*(x)$ 可改写为

$$\phi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \gamma_n(\mathbf{x}) > c_T^* \\ a, & \gamma_n(\mathbf{x}) = c_T^* \\ 0, & \gamma_n(\mathbf{x}) < c_T^* \end{cases} \quad (6-22)$$

式中, $c^* = \ln c$, 检验统计量为 $\gamma_n(\mathbf{x}) = \ln T_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \gamma(x_i)$ 。

$$\text{而} \quad \gamma(x) = \ln T(x) = \begin{cases} a', & xA - \frac{A^2}{2} \leq a' \\ xA - \frac{A^2}{2}, & a' < xA - \frac{A^2}{2} < a'' \\ a'', & xA - \frac{A^2}{2} \geq a'' \end{cases} \quad (6-23)$$

这里 $a' = \ln c'$, $a'' = \ln c_T''$ 。判决门限 c_T^* 是这样设置的,使得虚报风险不超过给定值 a' ,即

$$R(q_0^*, \phi^*) = c_{10} E\{\phi^*(\mathbf{x}) | q_0^*\} \leq a' \quad (6-24)$$

或虚报概率不超过给定值 α^* ,即

$$E\{\phi^*(\mathbf{x}) | q_0^*\} \leq \alpha^* \quad (6-25)$$

当 $q_1 = q_1^*$ 时,这种检测器的检测概率达到下限 $E\{\phi^*(x) | q_1^*\}$,对于一切属于 \mathcal{P}_0 集合的噪声密度函数,其检测概率都不会低于这个下限。

实现这种判决规则的 Robust 检测器,称为检测常值信号的有限样本 Robust 检测器,它是由一个软限幅器后接一个积累器和比较器所组成的,如图 6.1 所示。图中软限幅器的主要作用是对大幅度脉冲干扰样本进行限幅。当噪声密度函数变化时,变化最明显的部分主要表现在密度函数“尾部”的变化,大脉冲干扰样本。软限幅器对这个尾部所施加的限幅作用,降低了检测器对噪声统计特性变化的敏感性,从而提高了稳健性。这是 Robust 检测器的一个显著特点。

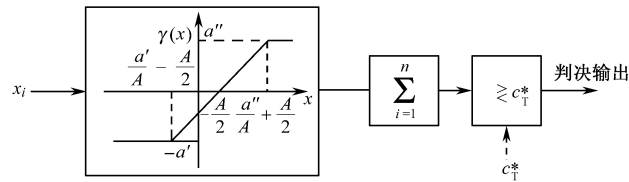


图 6.1 检测常值信号的有限样本 Robust 检测器

Huber 的 Robust 假设检验规定了两类假设下的密度函数集合 $q_0(x)$ 和 $q_1(x)$ 不能相交。

当 ϵ_0 和 ϵ_1 足够小而且名义密度函数 $p_0(x)$ 和 $p_1(x)$ 不合同时就能保证这点。然而在式(6-13)所示的污染型类高斯密度函数中, $p(x)$ 和 ϵ 都是固定的。观测样本的密度函数为 $q_0(x_i)$ 和 $q_1(x_i)$ 中, 名义密度函数为 $p_0(x_i)$, $p_1(x_i)$ 。因此, 只有当信号幅度 A 足够大时, 才能保证集合 $q_0(x_i)$ 和 $q_1(x_i)$ 不相交(没有公共元素)。这种检测器只能在 $A > A_{\min}(\epsilon)$ 的条件下运用, $A_{\min}(\epsilon)$ 由下式确定

$$2\Phi\left[\frac{1}{2}A_{\min}(\epsilon)\right] = (1 - \epsilon)^{-1} \quad (6-26)$$

式中, 标准正态累积分布函数 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$, 式(6-26)的典型数值见表 6.1。

表 6.1 典型数值

ϵ	0.012	0.040	0.055	0.100	0.138
$A_{\min}(\epsilon)$	0.03	0.11	0.15	0.28	0.40

假定噪声的方差为 1, 则 $A_{\min}(0.04) = 0.11$, 对应于约 -20dB 的信噪比。 $A_{\min}(0.138) = 0.40$, 对应于 -8dB 的信噪比。可见, 这种检测器不适用于低信噪比的通信系统, 如扩谱通信系统。

其次考虑检测时变的确知信号的情况, 可采用推广了 Huber 的 Robust 假设检验, 使两类假设下的每个观测样本都对应于一个污染型密度函数, n 个样本对应有 m 个污染型密度函数

$$\begin{cases} H_0 : q_{0i}(x) = (1 - \epsilon)p_{0i}(x_i) + \epsilon h_{0i}(x_i), h_{0i}(x) \in \mathcal{H} \\ H_1 : q_{1i}(x) = (1 - \epsilon)p_{1i}(x) + \epsilon h_{1i}(x), h_{1i}(x) \in \mathcal{H} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6-27)$$

这样就可设计在污染型高斯噪声中检测时变确知信号的有限样本 Robust 检测器。假设检验问题仍由式(6-19)描述。只要把检测常值信号的检验统计量 $\gamma_n(x) = \sum_{i=1}^n \gamma(x_i)$ 中的 $\gamma(x)$ 改为下述的 $\gamma_i(x)$, 就可将相应的判决规则推广到时变信号情况。即

$$\gamma_i(x) = \begin{cases} a'_i, & xAs_i - (As_i)^2/2 \leq a'_i \\ xAs_i - (As_i)^2/2 & a'_i < xAs_i - (As_i)^2/2 < a''_i \\ a''_i, & xAs_i - \frac{(As_i)^2}{2} \geq a''_i \end{cases} \quad (6-28)$$

这种检测时变信号的有限样本 Robust 检测器是一个相关—限幅检测器, 其结构框图如图 6.2 所示。当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $a'_i = -a''_i$, 检测器结构可以简化成图 6.3 所示的形式。

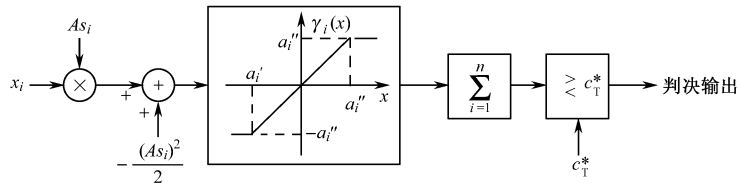


图 6.2 检测时变信号的有限样本 Robust 检测器($\epsilon \rightarrow 0$)

这种检测器只适用于信号幅度满足下述条件的情况, 即

$$A \cdot \min_i |s_i| > A_{\min}(\epsilon) \quad (6-29)$$

这是它的局限性。它的优点是, 观测样本数 n 是任意的, 污染密度函数 $h_0(x_i)$ 和 $h_1(x_i)$ 也是任意的, 都属于任意的密度函数集合 \mathcal{H} 。

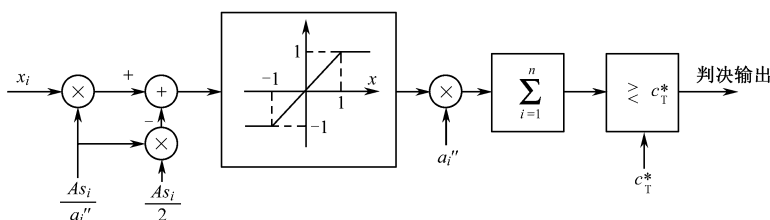


图 6.3 相关—限幅检测器(固定限幅)——检测时变信号的有限样本 Robust 检测器($\epsilon \rightarrow 0$)

6.3 确知弱信号的渐近 Robust 检测⁽¹⁾

6.3.1 非线性相关检测器(NC 检测器)——局部最佳检测器

弱信号的检测无论在理论上或实践上都具有特殊的重要性。上面讨论的有限样本 Robust 检测器只适用于信号幅度大于某一最低限度的情况。因此,必须寻求别的方法来解决弱信号的检测问题。对于弱信号的检测,理论上为了便于分析,通常假定信号幅度 $A \rightarrow 0$,而样本数 $n \rightarrow \infty$,这就是所谓“渐近”的含义。在渐近情况下,采用广义奈曼-皮尔逊准则下的局部最优势检验,是一种行之有效的方法。用这种方法设计的检测器,通称为局部最佳检测器。

仍考虑式(6-18)的假设检验问题。噪声样本的概率密度函数属于式(6-19)所示的类高斯噪声密度函数集合 \mathcal{P}_0 。与上节不同之处是,现在假定 \mathcal{H} 是满足一定正规条件的对称有界密度函数集合,而不是任意的密度函数集合。令 \mathcal{D} 代表检验水平为 α^* 的所有随机检验函数 $\phi(\mathbf{x})$ 组成的集合, \mathbf{x} 是 n 维观测矢量,则检验的势函数^①定义为

$$\beta_\phi(A|q) = E_A \{ \phi_0(\mathbf{x}) | q \}, \quad q \in \mathcal{P}_0, \quad \phi \in \mathcal{D} \quad (6-30)$$

势函数代表判定假设 H_1 为真的平均概率。当 A 等于假设 H_1 下的信号幅度时,势函数就是检测概率;当 A 等于假设 H_0 下的信号幅度即 $A=0$ 时,势函数就是虚报概率 P_{fa} ,现在以符号 α 表示,即

$$\alpha = \beta_\phi(0|q) \quad (6-31)$$

势函数在原点的斜率为

$$\beta'_\phi(0|q) = \frac{\partial}{\partial A} \beta_\phi(A/q) \Big|_{A=0} \quad (6-32)$$

有时称之为局部势。

现试图以局部势和虚报概率为性能标准来寻找一个最不利密度函数 $q^* \in q_0$ 和相应的局部最优势检验 $\phi_0^* \in \mathcal{D}$,使之满足下述极小极大关系

$$\begin{cases} \alpha = \beta_{\phi_0^*}(0|q) \leq \beta_{\phi_0^*}(0|q^*) = \alpha^* & q \in \mathcal{P}_0 \\ \sup_{\phi \in \mathcal{D}} \beta'_\phi(0|q^*) = \beta'_{\phi_0^*}(0|q^*) = \inf_{q \in \mathcal{P}_0} \beta'_\phi(0|q) \end{cases} \quad (6-33)$$

上式意味着在局部最优势检验下(即 $\phi_0 = \phi_0^*$),最不利密度函数 q^* 是 \mathcal{P}_0 集合中使虚报概率 α 达到最大值 α^* 而局部势达到最小值的那个密度函数。最大虚报概率 α^* 也叫做检验的水平或尺度。如果不等式 $\beta'_{\phi_0^*}(0|q) > \beta'_{\phi_0^*}(0|q^*)$ 严格成立的话,可以预期,虽然 $\beta_{\phi_0^*}(0|q) \leq \beta_{\phi_0^*}(0|q^*)$,然而当信号幅度 A 由零增大时,势函数 $\beta_{\phi_0^*}(A|q)$ 之值很快就超过 $\beta_{\phi_0^*}(A|q^*)$ 之值。

① 势函数亦称功效函数。

可以证明,最不利密度函数 $q^*(x)$ 由下式表示

$$q^*(x) = \begin{cases} (1-\epsilon)p(x) & |x| < k \\ (1-\epsilon)p(k)e^{-k(|x|-k)} & |x| \geq k \end{cases} \quad (6-34)$$

可见,当 $|x| < k$ 时, $q^*(x)$ 具有正态密度函数的形式,而当 $|x| \geq k$ 时,它具有拉普拉斯噪声密度的形式。令 $\int_{-\infty}^{+\infty} q^*(x) dx = 1$, 即可得到 k 和 ϵ 之间的关系。即

$$\int_{-k}^k p(x) dx + \frac{2}{k} p(k) = \frac{1}{(1-\epsilon)} \quad (6-35)$$

可见, ϵ 值越大, k 值越小。

不难看出,上述最不利密度函数 $q^* \in \mathcal{P}_0$, 并且可写成如下形式

$$q^*(x) = (1-\epsilon)p(x) + \epsilon h^*(x) \quad (3-36)$$

式中

$$h^*(x) = \begin{cases} 0, & |x| < k \\ \frac{1-\epsilon}{\epsilon} [p(k)e^{-k(|x|-k)} - p(x)] & |x| \geq k \end{cases} \quad (3-37)$$

对于某一确知的噪声密度函数 $q(x)$, 式(6-19)的假设检验问题的对数似然比是

$$\ln \Lambda(x, A) = \ln \prod_{i=1}^n \frac{q(x_i - As_i)}{q(x_i)} = \sum_{i=1}^n \ln \frac{q(x_i - As_i)}{q(x_i)} \quad (6-38)$$

根据广义奈曼-皮尔逊准则,检测弱信号的局部最优势检验是在给定检验水平 α^* 和已知噪声密度函数 $q(x)$ 的情况下,在满足 $\beta_s(0|q) \leq \alpha^*$ 的诸随机检验函数 ϕ 构成的集合 \mathcal{D} 中,寻找一个使局部势 $\beta'_\phi(0|q)$ 最大者。检验统计量是

$$T_n(x) = \frac{\partial}{\partial A} \ln \Lambda(x, A) \big|_{A=0} = \sum_{i=1}^n s_i l(x_i) \quad (6-39)$$

式中

$$l(x) = -\frac{q'(x)}{q(x)} \quad (6-40)$$

称为局部最佳非线性,对于上述最不利密度函数 $q^*(x)$, 对应的局部最优势检验为 ϕ_0^* , 判决规则为

$$\phi_0^*(x) = \begin{cases} 1, & T_n(x) > V_{T0} \\ a, & T_n(x) = V_{T0} \\ 0, & T_n(x) < V_{T0} \end{cases} \quad (6-41)$$

$T_N(x)$ 由式(6-39)表示。其中 $l(x)$ 为最不利密度函数 $q^*(x)$ 所对应的局部最佳非线性,有

$$l(x) = \begin{cases} k & x \geq k \\ x & -k < x < k \\ -k & x \leq -k \end{cases} \quad (6-42)$$

它是软限幅器的形式,如图 6.4 所示。这样,由上述判决规则构成的检测器示于图 6.5 中,在相关器之前有一个特性为 $l(x)$ 的非线性部件,所以称之为非线性相关检测器,简称 NC 检测器。它是针对最不利密度函数 $q^*(x)$ 所设计的局部最佳检测器。值得注意的是,在两种极端情况下 NC 检测器的形式从式(6-35)看出:

① 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $k \rightarrow \infty$ 时,必有 $\epsilon \rightarrow 0$, 它化为线性相关检测器,此时形成经典的参量型检测器;

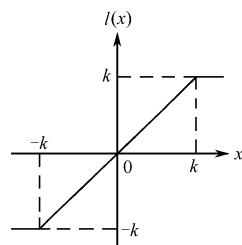


图 6.4 对应于污染型类高斯噪声的局部最佳非线性

② 当 $\varepsilon \rightarrow 1$ 时, $k \rightarrow 0$, 它化为符号相关检测器;

③ 以上是两种极端情况, 中间情况又可分为两类, 较大的 ε 对应较小的 k 是所谓硬限幅, 反之是软限幅。

在参考文献[5]中给出 k 对应的数字结果列在表 6.2 中。

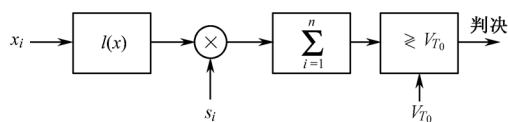


图 6.5 渐近 Robust NC 检测器

表 6.2

ε	0.01	0.02	0.05	0.10
k	1.95	1.72	1.40	1.14

6.3.2 M 检测器⁽¹⁾

上述 NC 检测器除了检验水平有一下限之外, 还有一个局限性是, 对于某些 $q \in \mathcal{P}$, 可能出现下述情况

$$\beta'_{\phi^*}(A|q) = \beta'_{\phi^*}(A|q^*) \quad (6-43)$$

致使 $A \neq 0$ 时, 势函数 $\beta_{\phi^*}(A|q)$ 不会超过 $\beta_{\phi^*}(A|q^*)$ 。为了避免这些局限性, 有必要寻找另一种渐近 Robust 检测器, 来保证在任何检验水平下, 检测器都具有渐近最佳性能。这种检测器是直接以势函数 $\beta_{\phi}(A|q)$ 作为性能标准的, 就是下面要简要介绍的 M 检测器。

仍考虑式(6-13)所示的假设检验问题。其中噪声样本 $n_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是独立同分布的, 密度函数 $q \in \mathcal{P}_1$, \mathcal{P}_1 是一类对称的密度函数集合, 不一定是污染型的。 s_i 是确知信号样本, 有

$$|s_i| < \infty, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2}{n} = c \quad (6-44)$$

的约束。由于两个假设之间的差别是密度函数的位移参数 As_i , 因此有可能利用密度函数位置参数的 Robust 估计的某些成果。

1. 渐近势函数的鞍点解

参考文献[6]致力于解决这个问题。考虑如下的关于势函数的极小极大问题

$$\max_{\phi \in \mathcal{D}} \min_{q \in \mathcal{P}_1} \beta_{\phi}(A|q) \quad (6-45)$$

约束条件是虚报概率不超过检验水平

$$\beta_{\phi}(0|q) \leq \alpha^* \quad q \in \mathcal{P}_1 \quad (6-46)$$

这里 \mathcal{D} 仍代表由所有检验水平为 α^* 的检验函数所构成的集合。

为了解决这个问题, 需要一些附加的定义。定义一类函数 \mathcal{B} , 若某个函数 L 满足下列条件, 就说 $L \in \mathcal{B}$:

① L 是下凸的, 对于原点对称的, 对于正宗量来说是严格上升的;

② 对于一切 t , $l(t) = dL(t)/dt$ 是连续的;

③ 对于一切 $q \in \mathcal{P}_1$, $E_q\{l^2(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} l^2(x)q(x)dx < \infty$;

④ 对于一切 $q \in \mathcal{P}_1$, $\frac{\partial E_q\{l(x-A)\}}{\partial A}$ 存在, 并且在 $A=0$ 的某个邻域内不为零。

此外, 还定义 A_n 是使下式达到最小的 A 值, 或是满足下式的 θ 值

$$\sum_{i=1}^n L(x_i - As_i), \quad \sum_{i=1}^n s_i l(x_i - As_i) = 0 \quad (6-47)$$

因此, A_n 是 Huber 定义的密度函数位置参量的广义 M 估计量, M 检测器因而得名。上述问题的证明可参考文献[1]。

2. M 检测器的结构

M 检测器的判决规则是

$$\sqrt{n}A_n \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma \quad (6-48)$$

即 $L_0(\mathbf{x})$ 是下凸函数, $l_0(\mathbf{x}) = \frac{d}{dx}L_0(\mathbf{x})$ 是 \mathbf{x} 的单调增函数, 以及 $\sum_{i=1}^n s_i l_0(x_i - A_n s_i) = 0$, 这样, 当 $s_i \geq 0$ 时, 上述判决规则可以改写成门限为零的形式

$$\sum_{i=1}^n s_i l_0\left(x_i - \frac{\gamma}{\sqrt{N}} s_i\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \sum_{i=1}^n s_i l_0(x_i - A_n s_i) = 0 \quad (6-49)$$

实现这种判决规则的 M 检测器结构示于图 6.6, 它是由加法器、软限幅器后接相关器组成的。对于 $s_i \leq 0$ 的情况, 式(6-49)中的 H_1 和 H_0 应对调位置, 而检测器仍保持图 6.6 所示的形式。这种检测器的关键性部件还是软限幅器 $l_0(\mathbf{x})$, 它是迄今为止所介绍的三种 Robust 检测器的公共部件。注意到图 6.6 所示的 M 检测器的结构只适用于单极性信号即 $s_i \geq 0$ 或 $s_i \leq 0$ 的情况, 常值信号($s_i = 1$)是它的一种特例。对于双极性信号的情况, 不能用上述简化结构的方法, 必须采用原始的判决规则式(6-42)构成检测器。

M 检测器虽然不受信号幅度和检验水平的限制, 却受到 $v = \sqrt{n}A \geq \gamma$ 的约束, γ 是检验统计量 $\sqrt{n}A_n$ 的判决门限, 由检验水平 α^* 决定。在弱信号(A 小)的情况下, 可以用增大样本数 N 的办法来弥补, 使 $\sqrt{n}A \geq \gamma$; 也可以增大检验水平 α^* , 使得门限 γ 减小。因此, M 检测器是受约束最松、实际应用的可能性最大的一种 Robust 检测器。

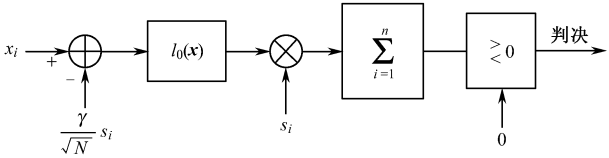


图 6.6 M 检测器的结构框图($s_i \geq 0$ 或 $s_i \leq 0$)

本章小结

到此, 我们讨论了在干扰(噪声)的概率密度函数虽然不是全然未知, 但也是在模糊不清的情况下的信号检测, 一般可采用以下三种检测方法。

① 非参量检测, 这是一种最保守的办法, 可利用的分布信息没有利用。就此而论是不利的。

② 参量检测, 其做法是利用已知的部分信息拟合一种干扰的概率分布, 或者说猜想一种干扰的概率分布, 设计参量型最佳检测器。然而, 如果拟合错误, 则处理器的性能就会严重错误。

③ Robust 检测, 其基本思想是寻找一个根据某种性能标准的最不利分布函数, 然后针对这一最不利密度函数, 用参量检测法按照某一准则设计一种最佳检测器或局部最佳检测器。由于 Robust 检测利用了干扰的部分统计知识, 其性能优于非参量检测, 但比参量检测差

一些。

最后说明两点,一点是有些文献把 Robust 检测归到非参量检测一类,这是取其对于干扰的分布的适应性相当大这一点,也有些文献把它归到参量检测一类,这是取其最佳处理器基本上是求似然比这一点。更多的文献把它单列一类。另一点是 Robust 检测的内容很丰富,所以数学分析也比较复杂,我们仅进行了简要介绍,深入学习可阅读参考文献[1]。

习 题 六

- 6.1 研究均值为零、方差为 σ_n^2 的加性高斯噪声背景中接收标量常值信号的二元信号检测问题,但要考虑污染密度函数 $h_j(x)$ ($j=0,1$)。于是设假设 H_0 和假设 H_1 下,信号的 ϵ 混合模型分别为式(6.3a)和式(6.3b),其中,标称的概率密度函数是已知的,且为

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

和

$$p(x|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

这里约定 $A>0$ (常数)。试设计该二元信号的稳健性检测器。

- 6.2 在 6.1 题中, ϵ 混合模型二元信号检测中,对数似然比检验为

$$\ln \Lambda^*(x) = \begin{cases} \ln b + \ln c, & x \leq \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c' + \frac{A}{2} \\ \ln b + \frac{A}{\sigma_n^2} x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2}, & \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c' + \frac{A}{2} < x < \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c'' + \frac{A}{2} \\ \ln b + \ln c'', & x \geq \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c'' + \frac{A}{2} \end{cases}$$

证明其等效检验统计量 $\gamma(x)$ 为

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c'' + \frac{A}{2}, & x \leq x_0 \\ x, & x_0 < x < x_1 \\ \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c' + \frac{A}{2}, & x \geq x_1 \end{cases}$$

式中

$$x_0 = \frac{\sigma_n^4}{A^2} \ln c' - \frac{\sigma_n^2}{A} \ln b + \frac{A + \sigma_n^2}{2} \quad x_1 = \frac{\sigma_n^4}{A^2} \ln c'' - \frac{\sigma_n^2}{A} \ln b + \frac{A + \sigma_n^2}{2}$$

而

$$b = \frac{1 - \epsilon_1}{1 - \epsilon_0}$$

第 7 章 雷达中信号检测的过程

7.1 概述^{[12]、[13]}

在前几章所讨论的各种检测准则和实现方法的基础上,本章首先概述雷达接收机中的单样本和多样本检测方法,然后介绍自动检测中的多脉冲积累和恒虚警率检测处理。

图 7.1 示出了进入雷达信号管理的各种因素^[12]。图中,雷达信号处理包括如下部分。

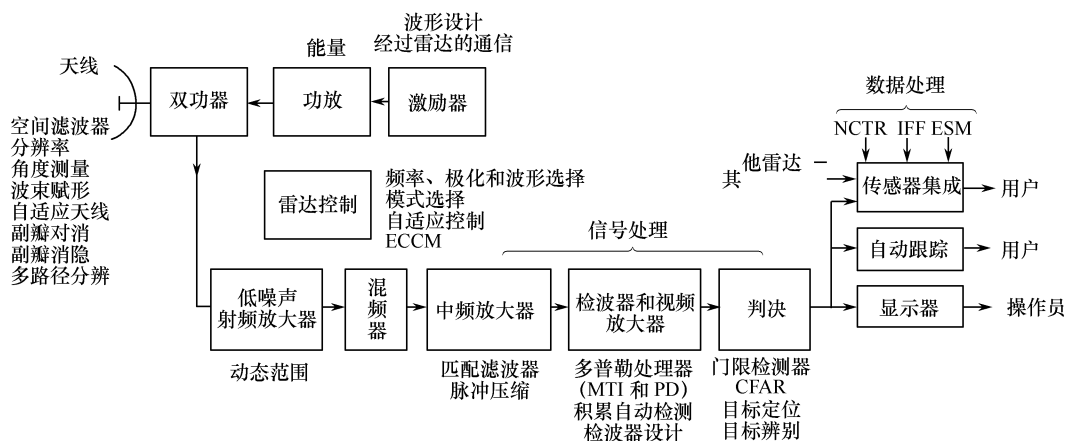


图 7.1 进入雷达信号管理的各单元^[12]

① 匹配滤波器: 使雷达接收机输出信噪比达到最大,也就使回波信号的检测能力最大化。

② 检测器/积累器: 用方便高效的方法处理许多来自目标区的接收脉冲,以便充分利用目标反射回的信号能量。

③ 减少杂波: 为了消除或者减少不想要的杂波而采用的一种或几种方法。这些方法中,基于多普勒频移来滤除运动目标杂波的方法是最重要的。

④ 恒虚警: 当雷达不能消除不想要的回波时,采用的在门限检测器输出端保持恒定虚警概率技术。

⑤ 电磁兼容性(EMS): 消除进入雷达接收机的其他雷达和其他设备辐射的电磁辐射干扰。

⑥ 电子反干扰(ECCM): 是指在军事雷达中,用来减少或消除人为干扰、欺骗和其他敌对的有源和无源的降低雷达性能的电子方法。电子反干扰措施存在于整个雷达系统中,而不只是信号处理中的一部分。

⑦ 门限检测: 用来决定雷达的输出是否是期望的信号。

在上述雷达信号处理内容中,雷达信号的自动检测器包括如下内容:

- 把雷达威力区域量化为距离或角度分辨单元;
- 对距离分辨单元的输出生作采样,每单元至少一个采样(实现时要多于一个);
- 在做检测判决前,在接收机中通过信号处理去掉噪声、杂波、干扰;

- 实使对每个分辨单元采样积累；
- 当接收机无法去除所有杂波和干扰时,用恒虚警率(CFAR)电路保持虚警率；
- 根据杂波图提供的杂波位置；
- 通过自动跟踪器或其他数字处理机,并利用门限检测选取作进一步处理的目标回波；
- 检测判决后进行距离和角度的测量。

在讨论自动检测器中的多脉冲积累和恒虚警率检测处理之前,先回顾一下图 7.2 所示理想接收机中常见的几种噪声概率密度。该接收机由一个理想的分系统级联而成^[13]。图中,将相敏检波器与中频输出连接起来就可测得噪声统计值。同相(I)和正交(Q)检波器产生双极性噪声输出 y_i 和 y_q ,每个输出由同一个高斯概率密度函数表征,如图 7.3(a)所示。对应的中频噪声功率包络具有瑞利概率密度函数特征,如图 7.3(b)所示。平方律包络检波器将产生一个正比于中频功率,该输出具有一个指数型概率密度特征,如图 7.3(c)所示。

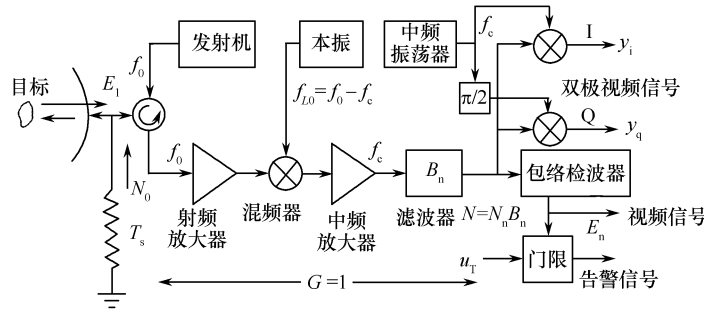


图 7.2 理想的接收机方框图^[2]

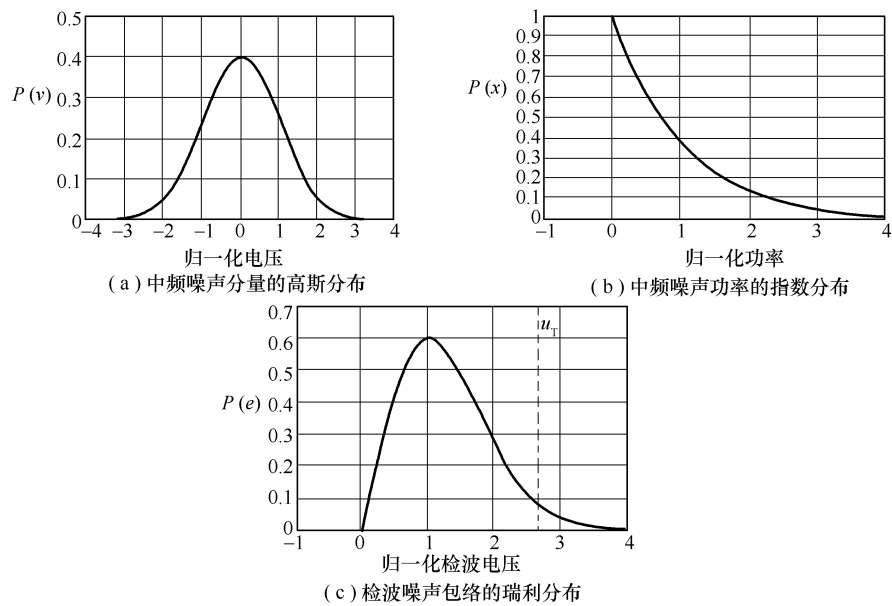


图 7.3 噪声的概率密度函数^[13]

7.2 单样本检测概述^[56]

在对检测方法做有意义的讨论之前,必须先确定门限。设定的门限决定了必须由接收机

使用者指定的虚警率。

仅有随机噪声偶然也会超过门限,这时检测器会错误判断出发现目标(见图 7.4)这叫做虚警。产生虚警的机会称虚警概率。显然,门限的设置是至关重要的,如果门限太高(见图 7.5),则会产生漏报。

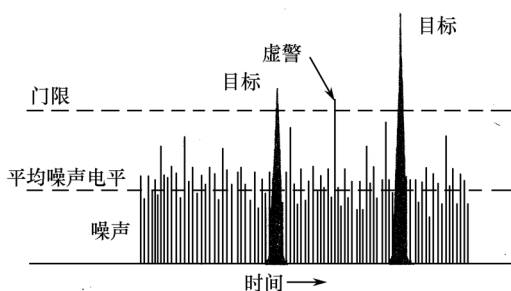


图 7.4 门限超出平均噪声电平越高,噪声尖头超过门限产生虚警的概率越低

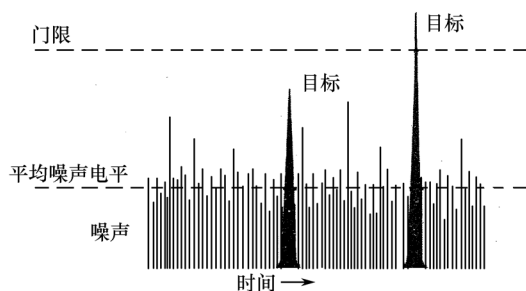


图 7.5 如果门限太高,某些可检测的目标可能无法检测到

7.2.1 对一个数据样本设定门限

在数字接收机中给出采样速率 f_s 下,单个数据样本的虚警时间 T_{fa1} 和单个虚警概率 P_{fa1} 的关系为

$$T_{fa1} = \frac{1}{P_{fa1} f_s} \text{ 或 } P_{fa1} = \frac{1}{T_{fa1} f_s} \quad (7-1)$$

在此,我们只考虑一个数据点与固定门限比较。假定噪声的概率密度函数 $p(x)$ 是高斯型的,那么

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (7-2)$$

式中, σ_n^2 是噪声方差。要产生信号的包络,需要 I 和 Q 两路信号。如果式(7-2)表示 I 路的输出噪声。则 Q 路的输出噪声可以相似地表示为

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (7-3)$$

包络的概率密度是 $p(x)p(y)$ 积,它可以写成 r 的函数

$$p(r) = \int_0^{2\pi} r p(x) p(y) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left[-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma_n^2}\right)\right] d\phi = \frac{r}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (7-4)$$

式中, $r^2 = x^2 + y^2$, $\phi = \arctan(y/x)$ 。这个概率密度函数称为瑞利(Rayleigh)分布。

虚警概率可以写为

$$P_{fa1} = \int_{u_T}^{+\infty} p(r) dr = \int_{u_T}^{+\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right) dr = \exp\left(-\frac{u_T^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (7-5)$$

式中, u_T 是门限,上式可用稍微不同的形式表示成

$$-\frac{u_T^2}{2\sigma_n^2} = \ln(P_{fa1}) \text{ 或 } u_T = \sqrt{-2\sigma_n^2 \ln(P_{fa1})} \quad (7-6)$$

一般地,由上式得到的值不会与 ADC 的某一个量化电平吻合,因此,应选择一个靠近 u_T 的量化电平值。较大的值将减小虚警概率和灵敏度,较小的值效果相反。

在式(7-6)中,如果 u_T 选得和 ADC 的某个量化电平匹配,且 P_{fa1} 由式(7-1)确定,则 σ_n 是仅

有的变量。我们知道,噪声是 ADC 的量化噪声 u_b 和 ADC 前端射频放大器噪声 u_0 的组合,且知噪声的方差为

$$\sigma_n^2 = (1 + M) \frac{Q^2}{12} \quad (7-7)$$

式(7-7)中, M 是放大器输出噪声与量化噪声之比 N_0/N_b 。由此可导出接收机的灵敏度降低了,即

$$F_s - F = 10 \lg \left(\frac{1 + M}{M} \right) \text{dB} \quad (7-8)$$

式中, F_s 和 F 分别是放大器链路带和不带 ADC 的噪声系数。如果 M 小,则接收机灵敏度受损。把式(7-7)代入式(7-6),结果是

$$\frac{u_T^2}{2\sigma_n^2} = \frac{(nQ)^2}{2(1+M) \frac{Q^2}{12}} = -\ln(P_{\text{fal}}) \quad (7-9)$$

式(7-9)中, nQ 代替了 u_T ,式中 n 是一个表示门限电平的整数。

M 可以从下式得到

$$M = - \left[\frac{6n^2}{\ln(P_{\text{fal}})} + 1 \right] \quad (7-10)$$

M 的值可以通过改变 ADC 前面的放大器的增益来调节。

7.2.2 单样本检测的检测概率

当数据中有信号时,I 路和 Q 路输出的概率密度函数可以写成

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (7-11)$$

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left[-\frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (7-12)$$

式中, m_x 和 m_y 是高斯分布的均值,它们与输入信号的关系是

$$m_x = A \cos \varphi \quad m_y = A \sin \varphi \quad (7-13)$$

式中, φ 是信号的初相位。类似的, x, y 与 r 的关系是

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad (7-14)$$

联合密度函数等于

$$\begin{aligned} p(r, \phi / \psi) &= r p(x) p(y) = \frac{r}{2\pi\sigma_n^2} \exp \left\{ \frac{-[r^2 + A^2 - 2rA(\cos\varphi\cos\phi + \sin\varphi\sin\phi)]}{2\sigma_n^2} \right\} \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma_n^2} \exp \left\{ \frac{-[r^2 + A^2 - 2rA\cos(\varphi - \phi)]}{2\sigma_n^2} \right\} \end{aligned} \quad (7-15)$$

对 ϕ 积分,概率密度是

$$p(r | \varphi) = \int_0^{2\pi} p(r, \phi | \varphi) d\phi = \frac{r}{\sigma_n^2} \exp \left(-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma_n^2} \right) I_0 \left(\frac{rA}{\sigma_n^2} \right) = p(r) \quad (7-16)$$

式中, $I_0(x)$ 是修正的零阶贝塞尔(Bessel)函数。值得注意的是式(7-16)不依赖于 φ ,因此可用 $p(r)$ 表示,这个分布称为莱斯(Rician)分布。

单个样本的检测概率 P_{dl} 可以由下式计算

$$P_{\text{dl}} = \int_{u_T}^{+\infty} p(r) dr = 1 - \int_0^{u_T} p(r) dr \quad (7-17)$$

式中 u_T 是门限。由于可以避免极限 $\rightarrow \infty$ 和使结果更精确, 常常使用式(7-17)第二种形式的积分。遗憾的是无法解析计算, 只能用数值积分得到结果。

7.2.3 单样本检测的例子

本例应用前述数字接收机的虚警概率和检测概率的概念, 讨论单样本检测。假定输入带宽为 125MHz, 要求的虚警时间大约是 100s, 即允许接收机在平均意义上每 100s 产生一次虚警, 采样速率是 250MHz, ADC 为 8 位(bit), 即

$$T_{\text{fal}} = 100\text{s}, \quad f_s = 250\text{MHz}, \quad b = 8(\text{bit})$$

在这个例子中, 我们仅用一个样本来检测输入信号的存在。由式(7-1), 虚警概率为

$$P_{\text{fal}} = \frac{1}{T_{\text{fal}} f_s} = 4 \times 10^{-11} \quad (7-18)$$

由式(7-6), 门限应设置为

$$-\frac{u_T^2}{2\sigma_n^2} = -23.94 \quad \text{或} \quad \frac{u_T^2}{\sigma_n^2} = 47.88 \quad (7-19)$$

需要注意的是门限 u_T 是 Q 的整数倍(或 $u_T = nQ$), 其中 n 是整数, Q 是量化单位。如果将式(7-7)的噪声方差替换入以上方程, 结果就是

$$\frac{(nQ)^2}{(1+M)Q^2} = \frac{12n^2}{1+M} = 47.88 \quad (7-20)$$

式中, M 是以量化噪声为单位测量的放大器输出噪声的因子, 即

$$M \triangleq N_o/N_b \quad (7-21)$$

式中, N_o 为放大器输出噪声, N_b 为 ADC 的量化噪声, ADC 的输出噪声为

$$N_s = N_o + N_b \quad (7-22)$$

我们可参照图 7.6 所示的噪声系数 F_n 及动态范围 DR 与放大器因子 M 的对应关系曲线。若选定动态范围(DR), 例如 $DR=52\text{dB}$ 时, 则可查得 M 值近似等于 16, 相应的 n 值为 8.24。有三种方法来选择 M 和 n 值:

- ① 改变 M 值, 使得 $n=8$ 或 9 来满足方程式(7-20)。这种方法将稍微改变前面的增益;
- ② 取定 $M=16$, 并且选 $n=8$;
- ③ 取定 $M=16$, 并且选 $n=9$ 。

由于所有三种方法的数学处理完全相同, 因此取定 $M=16$, 并且 $n=8$ 和 9。对于 $M=16$, $n=8$ 和 $n=9$ 的这些选择, 将导出

$$\frac{12n^2}{1+M} = \begin{cases} 45.18, & \text{当 } n=8 \\ 47.18, & \text{当 } n=9 \end{cases} \quad (7-23)$$

相应的虚警概率是

$$P_{\text{fal}} = \begin{cases} e^{-22.59} = 1.55 \times 10^{-10}, & \text{当 } n=8 \\ e^{-28.59} = 3.84 \times 10^{-13}, & \text{当 } n=9 \end{cases} \quad (7-24)$$

$$T_{\text{fal}} = \frac{1}{P_{\text{fal}} f_s} = \begin{cases} 25.8\text{s}, & \text{当 } n=8 \\ 10416\text{s}, & \text{当 } n=9 \end{cases}$$

可以看到, 如果选择了 $n=8$, 虚警时间虽然仍然可以接受, 但比要求的值差。如果选择了 $n=9$, 虚警时间比要求的值好得多。最后一步是从式(7-16)和式(7-17)中求得的检测概率。相应地 u_T 可以由式(7-6)得到。

Rayleigh 和 Rician 分布显示在图 7.7 中, Rayleigh 分布标注了只有噪声, 而 Rician 分布标注了信噪比(S/N)为 1.2dB 和 3dB。 u_T 是任意选择的, 仅有噪声曲线的右边区域表示了虚警概率, 而 $S/N=10\text{dB}$ 曲线的右边区域表示了检测概率。

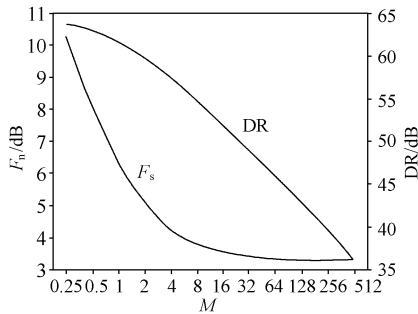


图 7.6 噪声系数及动态范围与 M 的对应关系^[12]

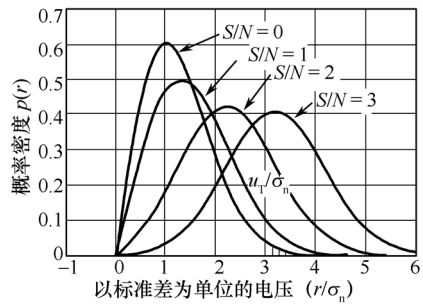


图 7.7 Rayleigh 和 Rician 分布^[13]

图 7.8(a)和(b)分别显示了 $n=8$ 和 $n=9$ 时检测概率相对于 S/N 的变化情况。为了获得 90% 的检测概率, 对于 $T_{\text{fal}}=25.8\text{s}$, 需要的 S/N 近似为 14.95dB, 而对于 $T_{\text{fal}}=10\,416\text{s}$, 需要的 S/N 近似为 15.8dB。这是灵敏度和虚警率之间的折中。接受较高的虚警率意味着接收机可以具有较高的灵敏度。

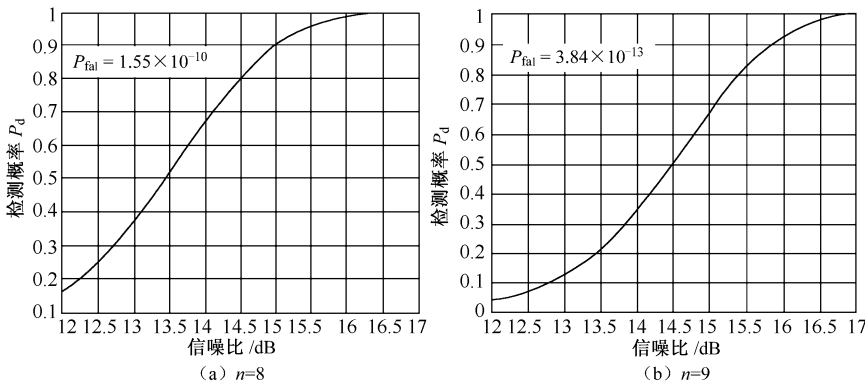


图 7.8 关于 S/N 的检测概率

7.3 多样本检测概述^[3]

7.3.1 基于多个数据样本点的检测

通常采样速率有几百兆赫, 相应的采样时间为几纳秒, 因此没有必要对每一个数据样本做决策。一个更合理的方法是基于多个数据点来检测输入信号。要基于多数数据点检测输入信号, 必须导出一组新的关系式, 即基于多样本的虚警概率和检测概率表达式, 这些表达式可以由前面讨论过的单数据点关系式得到。

式(7-1)给出的虚警时间和虚警概率的关系经修改可以适用于多样本点。假定总共有 n 个样本用于确定虚警和检测概率, 要保持所需要的虚警时间, 虚警概率就能增大到 n 倍, 因为它不是每 $t_s=1/f_s$ 做一次决策, 而是每 nt_s 做一次决策。因此, 虚警概率可以写为

$$P_{\text{fam}} = \frac{n}{T_{\text{fam}} f_s} \quad (7-25)$$

其中, P_{fam} 用于表示多样本的虚警概率。用多样本设置门限相似于使模拟微波接收机中的视频带宽变窄。等效的视频带宽可以看成 f_s/n 。在模拟接收机中, 视频带宽必须与预期的最小脉冲宽度(PW)匹配。在数字接收机中, 等效的视频带宽也必须与最小 PW 匹配。因此, 如果能设计一台有几个不同 n 值的接收机, 那么这台接收机就能与许多不同的 PW 匹配, 这种方法将提高接收机对不同 PW 的灵敏度。

下一个要回答的问题是如何基于每 n 个样本做决策, 将介绍两种方法。

第一种方法是: 用单个样本检测法导出的结果来构成 n 中出 l 的表决法。在这种情况下, 某个量化电平用做门限, 选择一个小于 n 的 l 值, 如果在 n 个样本中有 l 个或多个样本超过门限, 就认为检测到了输入信号。

第二种方法是基于 n 个样本的和。这种方法更类似于传统雷达用 n 个脉冲和做检测决策。

下面我们来讨论这两种方法。

7.3.2 多样本检测方案(表决法)

现在先讨论 n 中出 l 的表决法。首先从给定的虚警时间产生虚警概率 P_{fa} , 再根据 P_{fa} 选择门限。

可以把这个虚警看成二项式分布问题, 为了从 n 个连续样本中产生虚警概率, 至少 l 个样本必须超过门限。如果一个样本超过门限(某个量化电平)的概率是 p , 或不超过门限的概率是 $(1-p)$, 那么恰好有 l 个样本超过门限的概率就是

$$p(l|n) = \frac{n!}{l!(n-l)!} p^l (1-p)^{n-l} \quad (7-26)$$

式中, $p(l|n)$ 表示 l 个样本超过门限的概率。图 7.9 示出使用“ n ”取 l 的表决法检测准则示意图。

式(7-26)的 $p(l|n)$ 既可以表示依赖于 p 的虚警率, 又可以表示依赖于 p 的检测概率。如果用 p_{fa} 代替 p , 则 $p(l|n)$ 表示虚警概率; 如果用 P_{d} 代替 p , 则 $p(l|n)$ 表示检测概率。

令 $p(l_+ | j)$ 表示至少有 l 个样本超过门限(即有从 l 个到 n 个样本超过门限)的概率, 则 $p(L_+ | N)$ 可以写为

$$p(l_+ | n) = \sum_{i=l}^n p(i | n) \quad (7-27)$$

这个式子可以用于确定需要的虚警或检测概率。

多样本检测概率的计算非常相似于前面提到的方法。首先, 必须确定需要的 P_{fam} 。式(7-26)和式(7-27)将用于与所要的 P_{fam} 匹配。然而, 有许多 l 和 n 的组合, 难于得到唯一的 l, n 和 P_{fa} 的值。因此, 建议首先选择一个 n 值和 P_{fa} 值, 从式(7-26)和式(7-27)找到一个 l , 使 P_{fam} 接近需要的值。用这种方法, 不能得到原样的 P_{fam} , 但能得到一个接近它的值。

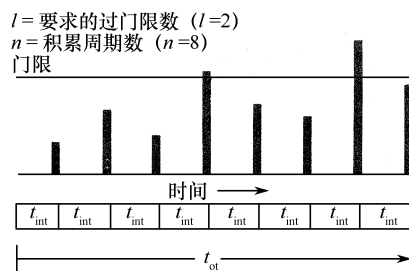


图 7.9 使用“ n ”取“ l ”的检测准则示意图

7.3.3 多样本(表决法)检测的例子

在这个例子中,用了 64 点($n=64$)来确定虚警概率和检测概率。ADC 前面的放大器保持不变,换句话说,放大器因子 $m=16$ 。

因为 $n=64$,由式(7-25)知相应的虚警概率 $P_{\text{fa}}=2.56 \times 10^{-9}$ 。下一步将确定 l, l 的值由门限电平决定,有许多量化电平可以选作门限。在本例中,我们试着用第一级量化电平作为检测门限。如果选用其他的量化电平作为门限,途径完全相同。第一步是找到仅有噪声时超过门限的概率。取 $n=1$,由式(7-9)得到

$$P_{\text{fa}}(1) = \exp\left(\frac{-6}{1+m}\right) = \exp\left(\frac{-6}{1+16}\right) = 0.7026 \quad (7-28)$$

式中, $P_{\text{fa}}(1)$ 是基于单样本的噪声超过第一级量化电平的概率。因此,式(7-24)中的概率 p 可以写为 $p=P_{\text{fa}}(1)$ 。为了确定在全部 64 样本中需要有多少个样本超过门限,就要用到式(7-26)和式(7-27)。在计算中,由于门限必须是量化电平之一,所以得到的结果将接近于需要的值,而不能得到确切的虚警时间 T_{fa} 。

计算说明如下。用从式(7-28)得到的结果作为式(7-27)中的 p 值,由参考文献[1]给出的结果列在表 7.1 中。

对 $l=63$, 概率为 4.351×10^{-9} , 它大于需要的值 2.56×10^{-9} 。这意味着产生的虚警数大于设计值。只要取 $l=64$, 那么全虚警概率是 $P_{\text{fa}}=1.549 \times 10^{-10}$, 它小于所需要的值 2.56×10^{-9} 。因此,如果选择第一级量化电平作为门限,那么所有 64 个样本都超过门限时才认为检测到了一个信号。这个例子中 $l=n$, 是一个非常特殊的情况。一般, $l < n$ 。

表 7.1 由式(7-26)和式(7-24)得到的结果^[1]

l	$p(l+ n)$
63	4.351×10^{-9}
64	1.549×10^{-10}

现在,我们用检测概率等于 90% 作为准则考虑检测问题,这里将采用稍微不同的途径。我们要得到式(7-27)中的能够产生 $p(l+|n)=P_{\text{dm}}=0.9$ 的 $p(i|n)$ 值,但是两者都没有直接解。 $p=p(i|n)$ 相对于 $p(l+|n)=P_{\text{dm}}$ 的结果显示在图 7.10(a)中,在这种特殊的 $l=n$ 情况下,这条曲线由 $P_{\text{dm}}=p^{64}$ 产生。进一步精确计算 $p(i|n)$ 的值,可以知道 $p(i|n)=0.90^{1/64}=0.998355$ 将产生需要的值 P_{dm} 。其中, p_{dm} 用于表示多样本的检测概率。

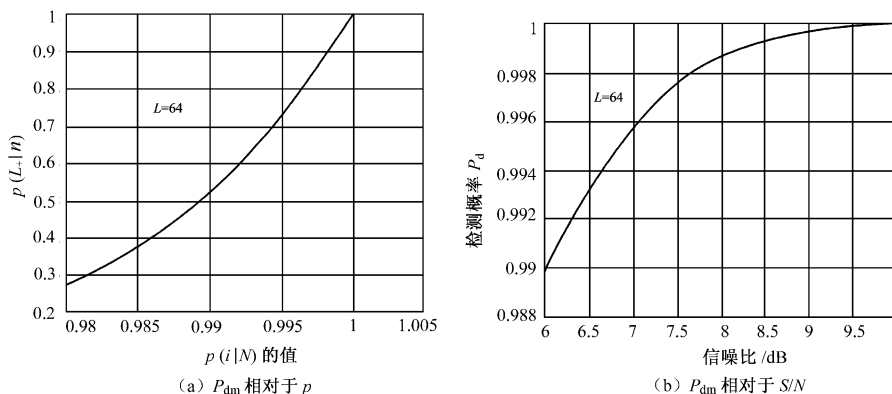


图 7.10 用第一级量化电平作为门限^[56]

最后一步是找到产生 $P_{\text{dl}}=0.998355$, 并具有式(7-26)给出的 0.7026 虚警概率的单个样本的 S/N 。找到检测概率的途径与前面讨论过的完全一样。结果显示在图 7.10(b)中, 需要的 S/N 大约是 8dB , 它远小于单样本检测方法需要的 15dB 。这表明接收机的灵敏度可以得到改善。应该注意的是虚警时间也得到了改进, 因为得到的 $P_{\text{fam}}=1.549 \times 10^{-10}$, 它相应于 1653s 的虚警时间。

这个改善是通过通过对得到的数据点积分得到的。如果信号长度大于 l , 那么这个方法将以高灵敏度检测输入信号。如果信号长度小于 l , 那么这个方法检测到信号的机会是非常小的, 因为只依靠噪声超过第一个门限的机会很小。应该基于设计的接收机要截获的最小 PW 值来选择 n 值。

7.3.4 基于取总和的多样本检测^[3]

用这种方法, 将用 n 个样本确定虚警概率。这个方法与 n 中出 l 的表决法的不同之处在于来自每个样本的输出都将被加在一起。 n 个数据样本采集后, 其和与一个门限比较。这种情况与脉冲雷达检测问题相似, 这里要做一个简单的讨论。确定虚警概率和检测概率可以用已讨论过的样本点情况相同的途径。

第一步是从式(7-25)找到虚警概率 P_{fam} 。这个值将用于找到门限, 一旦门限找到, 就可以确定检测概率。用与式(7-5)相似的方法可以确定门限, 其中概率密度函数用下式

$$P_{n_n}(z) = \frac{z^{n-1} \exp(-z/2\sigma_n^2)}{(2\sigma_n^2)n(n-1)!} \quad (7-29)$$

式中, $z=r^2$ (对于平方律检波器), 下标 n_n 表示仅有噪声的 n 个数据点的概率密度函数, 表达式(7-29)用于得到虚警率。结果为

$$P_{\text{fam}} = \int_{u_T}^{+\infty} p_{n_n}(z) dz \quad (7-30)$$

在这个方程中, P_{fam} 给定, 因此可以求出门限 u_T 。

z 检测概率可以用与式(7-17)中的相似方式求出。结果是

$$P_{\text{dm}} = \int_{u_T}^{+\infty} p_{n_n}(z) dz = 1 - \int_0^{u_T} p_{n_n}(z) dz \quad (7-31)$$

这两个方法没有封闭形式的解, 结果要用数值积分得到。下面将给出例子, 用来说明求出虚警概率和检测概率的途径。

实际应用时, n 可以随着门限不同而不同, 一旦有一个或多个门限被超过, 就可以认为检测到了信号, n 值甚至可以从 1 开始。

7.3.5 N 个样本检测的例子(总和法)

这个例子将说明上述的总和法。首先必须找到一个产生期望的虚警概率的门限。门限可以由式(7-28)的数值积分得到。为了得到需要的虚警概率 2.56×10^{-9} , 门限应设置在 244.5562 。但是因为数据是量化的, 所以用 245 做门限, 在这种情况下, 虚警概率变为 2.295×10^{-9} 。检测概率可以从式(7-31)和下式得到

$$p_{n_s}(z) = \frac{1}{2\sigma_n^2} \left(\frac{z}{nA^2} \right) \exp\left(-\frac{nA^2}{2\sigma_n^2}\right) I_{N-1}\left(\frac{A\sqrt{nz}}{\sigma_n^2}\right) \quad (7-32)$$

式中, I_{n-1} 是修正的第一类 Bessel 函数, 下标 n_s 表示有信号的 n 个数据点的概率密度函数。

积分式中的修正 Bessel 函数 $I_n(x)$ 近似为

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad (7-33)$$

应该指出,总和法是在平方律检测器的输出上进行的,并且没有考虑数字化。

比较总和法与表决法,可以发现总和法有两个优点。

① 总和法有较高的灵敏度;

② 如果信号短于 64 个数据点,并且信号强,那么总和法可以比表决法更有效地检测信号。

在表决法中,一旦采样的数据超过了门限,幅度信息就丢失了,并且不再考虑。相反的,总和法累积了整个信号的所有幅度,并加以考虑。

7.4 多脉冲积累^{[12]、[13]}

7.4.1 雷达脉冲的积累方法简述

仅仅在特殊的情况下,雷达才会根据单个接收脉冲来进行检测判决。通常,雷达总会从每个目标接收几个到几百个成串脉冲,在做出是否存在目标的判决之前,总先要对整个脉冲串进行处理。于是,即使单个脉冲的信噪比接近或低于 1,仍能获得高检测概率。例如,由脉冲重复频率为 f_r (Hz),天线波束宽度为 θ_B (°),扫描速率为每秒 $\dot{\theta}_s$ 的扫描雷达收到的来自一个点目标的回波脉冲数为

$$n = \frac{\theta_B f_r}{\dot{\theta}_s} = \frac{\theta_B f_r}{6\omega_r} \quad (7-34)$$

式中, ω_r = 转数/min (如果天线 360° 旋转)。收到的脉冲数 n 通常叫做“每次扫描击中次数”或“每次扫描的脉冲数”。它是单程波束宽度 θ_B 内的脉冲数。以远程地基对空监视雷达为例,脉冲重复频率 340 Hz,波束宽度 1.5°,天线扫描速率 5 转/min。将这些数字代入式(7-34),得到每次扫描 $n=17$ 个脉冲(如果 n 不是一个整数,可以四舍五入,也可以不舍就用这个数。不管选择哪种方法,对计算雷达作用距离没有多大影响,除非 n 很小)。对来自目标的所有有用的雷达回波累加的过程叫做“积累”(实际上进行“相加”)。

在观测时间 t_0 内,当收到来自目标的一串脉冲时,就有 $n=f_r t_0$ 个脉冲可处理,如图 7.11(a)所示。同样,在观测时间 t_0 内,如果接收机收到一个带宽为 $B_n > 1/t_0$ 的连续信号,就可得到 $n=B_n t_0$ 个信号采样和独立的噪声。对这 n 个脉冲或采样进行处理以改进检测性能的方法有 4 种:

(1) 相参积累(也称检波前积累):在包络检波之前要相加脉冲电压;

(2) 非相参积累(也称视频或检波后积累):对每个脉冲进行包络检波,并在用于门限检波之前将得到的视频脉冲电压相加;

(3) 二进制积累(也称 n 中取 1 积累):将每个脉冲送入门限,门限穿越的次数 l 用做输出告警信号的准则,即多样本检测的表决法;

(4) 累积检测(又称为批积累):它是二进制积累的特例,其告警信号的准则为 $l=1$ 。

(5) 反馈积累器等

这几种方法按积累效率的降低和实施难度的递减的顺序进行列举。

7.4.2 相参积累

如果中频滤波器与在时间 t_0 内观测的整个信号匹配,那么,在雷达接收机第二检波器(在

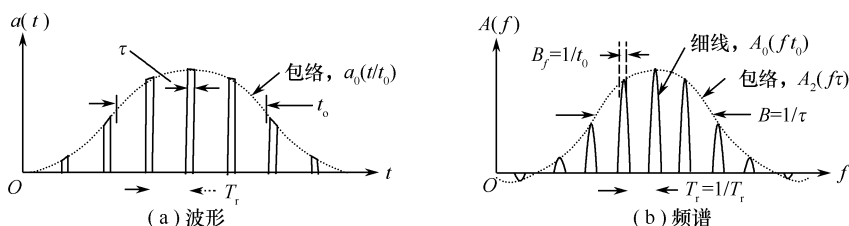


图 7.11 相参脉冲串的波形和频谱

中频级)之前进行的积累叫做“检波前积累”或“相参积累”。检波前积累理论上是无损耗的,但它要求信号在此周期内具有可预测的相位关系(相参),以及当信号叠加时,滤波器的相位响应需要将所有信号分量变成同相位。如果信号为一个脉冲串,滤波器必须与目标的脉冲-脉冲相位变化(多普勒频率)匹配。重复频率为 f_r 的相参矩形脉冲串的信号频谱是一系列窄线,如图 7.11(b)所示。

7.4.3 非相参积累

在雷达接收机第二检波器后的积累叫做“检波后积累”或“非相参积累”。它要比检波前积累更容易完成,因为它不需要保存回波的相位,并且只需要将脉冲的包络对准就可以进行相加。很多雷达用非相干积累来改进目标检测的性能,而不需要为了相位信息设置一个相关基准。非相参积累器由于没有利用相位信息必然有损于信噪比,因此在只处理少量脉冲的情况下获得接近于 n 的增益,而在宽范围的条件其增益可近似为 $n^{0.8}$ 。通常,非相参积累不如相参积累有效。然而这一缺点却因为非相参检波和积累很容易实现而得到弥补。

如果 n 个脉冲,都有相同的信噪比,由理想的无损耗检波前积累器进行完善的积累,那么,积累后的信噪(功率)比将正好是单个脉冲的信噪比的 n 倍。因此,在此情况下,可将雷达方程中单个脉冲信噪比 $(S/N)_1$ 用 $(S/N)_n = (S/N)_1/n$ 替代。其中, $(S/N)_n$ 是 n 个脉冲进行无损耗检波前积累时,所要求的每个脉冲的信噪比。如果同样的 n 个脉冲由理想的检波后积累器积累,得到的信噪比要小于单个脉冲信噪比的 n 倍。这种积累效率上的损耗是由第二检波器的非线性作用引起的,在整个流程中,它将一部分信号能量变换成噪声能量。检波后积累的积累效率可定义为

$$E_i(n) = \frac{(S/N)_1}{n(S/N)_n} \quad (7-35)$$

式中,当 n 个脉冲积累时,信噪比的改善叫做“积累改善因子”, $I_i(n) = nE_i(n)$ 。它还可以理解为“等效积累脉冲数”, $n_{eq} = nE_i(n)$ 。

当积累 n 个脉冲时,雷达方程为

$$R_{\max}^4 = \frac{P_t G A_e \sigma}{(4\pi)^2 k T_0 B_n F_n (S/N)_n L_s} \quad (7-36)$$

式中, P_t 为发射功率(单位:W); G 为天线增益; A_e 为天线有效孔径面积(单位:m); σ 为目标的雷达截面积(单位:m²); B_n 为噪声带宽(可用半功率带宽来取代,单位:Hz); F_n 为接收机噪声系数; T_0 为标准温度(=290K); k 为玻耳兹曼常数(= 1.38×10^{-23} J/K); L_s 为系统损失; $(S/N)_n$ 是 n 个要积累的不同脉冲中每个脉冲的信噪比。若要使用式(7-36)形式的方程,对于 n 的每个值,必须要有关于 $(S/N)_n$ 的一组曲线,这组曲线类似于图 7.12 中 $n=1$ 时的那些。这样的曲线可以查到,但并不一定要去查,因为我们只需要图 7.12 所示的检测概率 P_d , 虚警

概率 P_{fa} 和 $(S/N)_1$ 三者的关系曲和图 7.13。将关于 $(S/N)_n$ 的式(7-35)代入式(7-36),得到

$$P_{\max}^4 = \frac{P_t G A_e \sigma_n E_i(n)}{(4\pi)^2 k T_0 B_n F_n (S/N)_1 L_s} \quad (7-37)$$

由图 7.12 可以得到 $(S/N)_1$ 的值,由图 7.13 可得到积累改善因子 $nE_i(n)$ 的值。

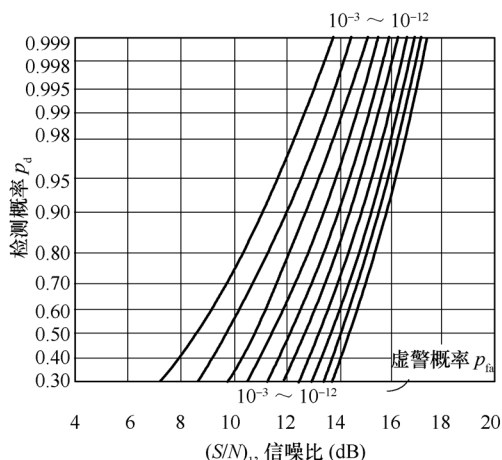


图 7.12 噪声中正弦波的检测概率,它是信噪(功率)比和虚警概率的函数

积累器的性能与检波前积累器的性能没有多少差别。当很多脉冲被积累(每个脉冲信噪比小)时,则检波前积累器和检波后积累器之间的差别会显著一些。图 7.13 中虚线正比于 $n^{1/2}$ 。在早期雷达中,人们认为雷达操作员观察阴极射线管显示器(如 PPI)是所获得的积累改善因子等于 $n^{1/2}$ 。

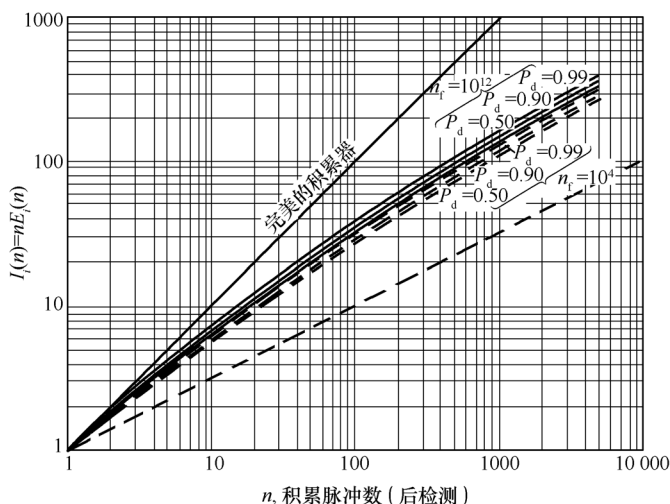


图 7.13 平方律检波器的积累改善因子与积累脉冲数的关系曲线。其中, P_d = 检测概率,

n_f = 虚警次数 = $1/T_{in} B$, T_{in} = 虚警之间的平均时间, B = 接收机带宽;

每个脉冲信噪比的近似值可由 Albersheim 的经验公式得到,它是式(7-38)的扩展

$$(S/N)_n = -5 \lg n + \left(6.2 + \frac{4.54}{\sqrt{n-0.44}} \right) \times \lg(A + 0.12AB + 1.7B) \quad (7-39)$$

式中,每个脉冲信噪比 $(S/N)_n$ 以 dB 表示, n 是积累的独立(脉冲)采样数,而 A 和 B 与式(7-38)中的定义相同。该方程在 $n=1\sim 8096$, $P_d=0.1\sim 0.9$, $P_{fa}=10^{-3}\sim 10^{-7}$ 范围内的误差小于 0.2dB。正如式(7-38)所指出的那样,当 P_d 比上述值更大,而 P_{fa} 比上述值更小时,式(7-39)或许是用于粗略计算的一种良好近似。

对于特定的检测概率和虚警概率,积累增益是确定的。通过确定积累之前和之后所需信噪比并取其比值(或分贝数的差),就可计算出积累增益。积累前噪声和信号加噪声的概率密度函数如图 7.14(a)所示。雷达回波的归一化积累将使其概率密度函数的方差按照回波间统计独立性的程度变小。若只有热噪声,则方差将减小 n 倍, n 为积累数。概率密度函数的均值保持不变,如图 7.14(b)所示。其最终效果是增加两种概率密度函数间的间隔(以方差表示)。因此,要得到规定的检测概率和虚警概率,只需要较小的信噪比。

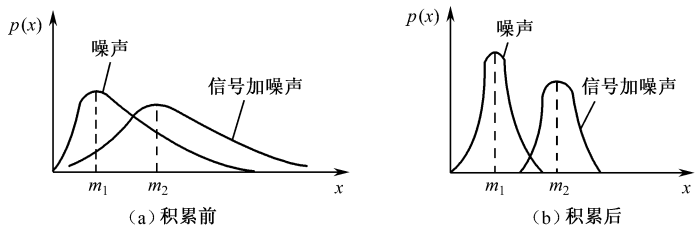


图 7.14 噪声和信号加噪声在积累前、后的概率密度函数

综上所述,相参积累提出了两种方法实现,即在信号检波器之前或在信号相参检波器之后。第一种实现方法,如图 7.15(a)所示。如果对中频信号进行积累,就必须接收信号是相参的才能实现相参积累。如果用相参检波器,也可在相参检波后相参积累,如图 7.15(b)所示。在这种情况下,积累是在相参检波器之后用两个正交信号 I 和 Q 来实现的。由于 I 和 Q 信号是基带或视频信号,通常用模/数变换器将它们变换为数字信号,而积累也采用数字电路。应当指出,这两种实现方法都等效于第 2 章中的相参脉冲串匹配滤波器。

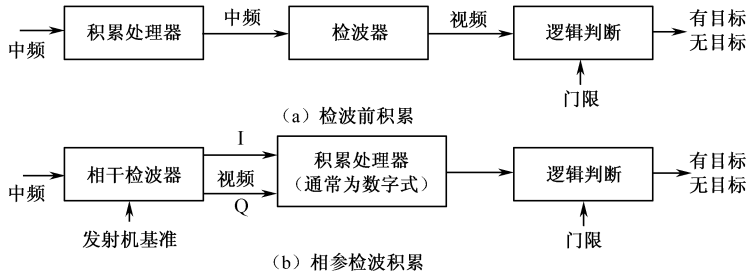


图 7.15 实现相参积累的两种方法

非相参积累通常可按图 7.16 所示的方法实现。包络检波意味着检波器仅提取了中频调制信号的幅值或包络,没有利用相位信息。可以用线性检波器从中频载波中无失真地提取调制包络,但最常见的是用平方律检波器使其输出端产生包络的平方。

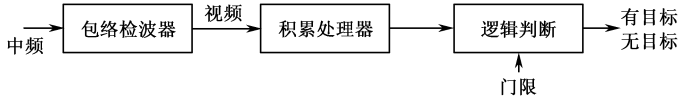


图 7.16 实现非相参积累

在提取出调制包络后,所有脉冲的能量便在积累处理器中相加,这可以用模拟式或数字式积累器来完成。如果采用数字式积累器,在检波器和积累器之间应加上模/数变换器。

迄今所研究的脉冲积累都定义为雷达回波幅度的相加或合并的过程(或者是对包络检波器来的视频回波进行非相参积累,或者是对相参检波器来的视频回波进行相参积累)。

7.4.4 二进制积累器

1. 简介

有时,在检测中采用另一种简化积累方案,即把被检测的视频信号量化为二进制数(两个可能的电压电平),然后再把量化了的视频信号相加。这样的检测过程示于图 7.17 中,称为二进制积累。二进制积累器实现简单,但由于只采用了两电平幅度量化,丢失了部分幅度信息,因而有 1~2dB 的量化损失。为了节省篇幅,下面我们只讨论二进制积累器,目的是对雷达检测过程有所了解。

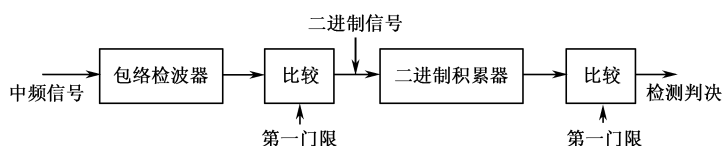


图 7.17 二进制积累

视频积累器通常是将 A/D 变换器置于包络检波器之后以数字形式来实现的。用数字延迟线来实现 n 个视频脉冲的积累,可以采用抽头延迟线的办法。将接收机送出的视频信号按距离(时间)采样并进行幅度量化,变为数字信号。然后将前面 $n-1$ 个重复周期的量化信号存储起来,依次进行各距离单元信号的加权和。这样做要求很大的存储量和运算量。也可以采用较简单的数字设备,来达到接近积累的最佳效果,这就是二进制积累器。这是为了积累脉冲和实现无操作员参与而作检测判决开发出来的第一种自动方法。它仍然是一项重要技术。它的主要优点是它实现起来没有滑窗积累器那么复杂。但是它不如理想的检波后积累器有效。

雷达天线扫过一个目标时将接收到 n 个回波脉冲。如果 n 个期望脉冲中的 l 个超过预先设定的值(门限),则宣告目标出现。要求 n 个回波脉冲中有 l 个出现的检测准则使用的是一种积累形式。它称为二进制积累器,但尽人皆知,也称为二进制检测器、双门限检测器和 n 个超过 l 个检测器。

随着数字器件的发展,二进制积累器的优点已不明显,但它仍应用于某些场合。在此,通过对它的讨论,可以加深我们对雷达检测过程的认识。下面介绍二进制积累器的工作原理。

一个二进制积累器的方框如图 7.18 所示。在二进制积累器中,接收机检波器的输出首先和预先设置的第一门限相比较,如果输出超过第一门限,量化器输出一个脉冲,记为“1”;否则不输出脉冲,记为“0”,如图 7.18(a)所示。

这些输出分别被记为 1 和 0。这样,量化器的输出是 1 和 0 组成的序列。每个距离单元中最后 n 个脉冲产生的 1 和 0 被存储起来且在二进制计数器中计数。如果在最后 n 次扫描中至少有 l 个 1,则说明目标在距离上有被检测到。 l 这个数是双门限检测器通过的第二个门限。两个门限必须共同的选择以达到最佳性能。

实际上,如果把双门限检测中检波后电压变为“0/1”信号的过程代之以多位数的模/数变换,“0/1”信号的计数相加相应变为多位数信号的积累,再把第二门限做适当调整,就成为

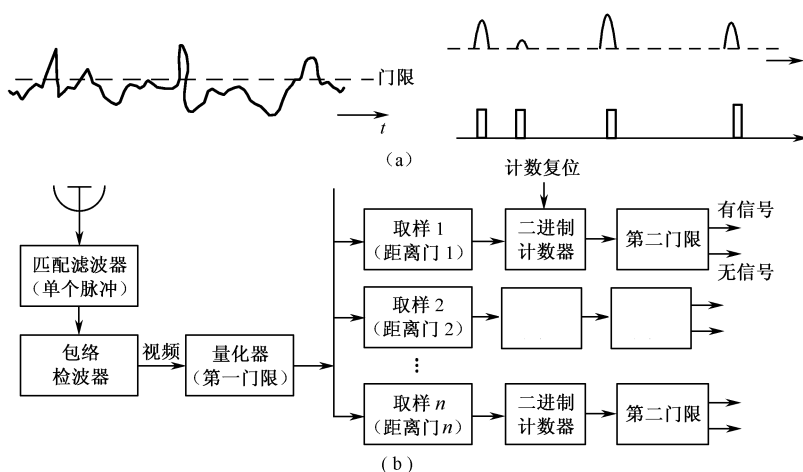


图 7.18 二进制积累器框图和波形图

图 7.18 所示的非相参积累的数字化实现框图。所以双门限检测可看做是非相干脉冲串信号最佳检测的简化和特例。这样做显然会带来一定的信噪比损失——两电平量化造成的损失。

一个非起伏回波信号 l/n 的最佳值示于图 7.19, 曲线只是大概的值, 因为这有点依赖于虚警概率, 但和信噪比无关。起伏的 Swerling 情况 1 中, 目标和非起伏目标有同样的 l/n 最佳值, 但是起伏 Swerling 情况 2 中两者有不同的最佳值。 l 最佳值的选择不是很敏感的, 它可以和最佳值相差很多而不带来明显的损失。

2. 检测性能

下面讨论二进制积累器的检测性能。检测性能和第一、第二门限值的选取均有关系。例如第一门限过高, 弱信号很难检测到而产生较大漏检, 第一门限过低则虚警率较大, 第二门限的选择也有相类似的影响。

当第一门限值 γ_0 选定后, 就可求在单次扫掠条件下, 每一距离单元的发现概率 P_{d1} 和虚警概率 P_{fa1} 。在高斯噪声背景下, 经过检波器后, 有信号和只有噪声时的振幅分布分别按广义瑞利分布和瑞利分布, 即

$$p(\gamma/s) = \gamma \exp\left(-\frac{\gamma^2 + 2E/N_0}{2}\right) I_0\left(\gamma \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

$$p(\gamma/0) = \gamma \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \quad (7-40)$$

这时单次发现概率和虚警概率分别为

$$P_{d1} = \int_{\gamma_0}^{+\infty} p(\gamma/s) d\gamma = 1 - \int_0^{\gamma_0} p(\gamma/s) d\gamma \quad (7-41)$$

$$P_{fa1} = \int_{\gamma_0}^{+\infty} p(\gamma/0) d\gamma \quad (7-42)$$

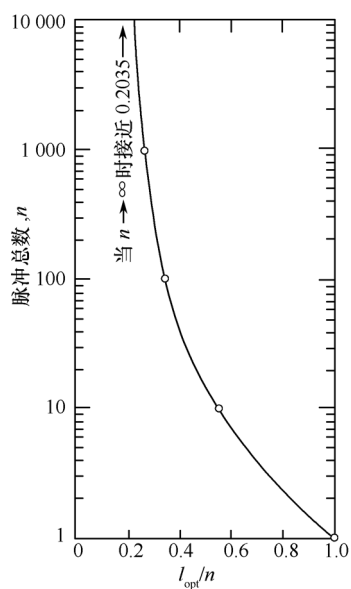


图 7.19 二进制滑窗检波器的脉冲最佳个数 l_{opt} (取自 n 的最大值), 假定恒定(非起伏)目标回波

有了单次的发现概率和虚警概率,就可以计算二进制积累器的检测性能了。已经知道,在 n 个统计独立的采样值中有 l 个采样值超过确定门限的概率 $P(l)$ 符合二项式分布律。即

$$P(l) = C_n^l P^l (1-P)^{n-l} \quad (7-43)$$

式中, P 为单次采样值超过门限的概率, $1-P$ 为单个采样不超过门限的概率,而二项式系数

$$C_n^l = \frac{n!}{l!(n-l)!}$$

为 n 个采样值中取 l 的组合数。二项式分布的平均值 $\bar{l} = nP$, 其方差 $\sigma_l^2 = nP(1-P)$ 。

如果第二门限值选为 l/n , 则当超过第一门限的脉冲数大于或等于 l 值时, 均判为有信号。这样超过第二门限判为有信号的总概率应为

$$P(m \geq l) = \sum_{m=l}^n P(m) = \sum_{m=l}^n C_n^m P^m (1-P)^{n-m} \quad (7-44)$$

当 P 用 P_{fa1} 代入时, 即得二进制积累器的虚警概率 P_{fa}

$$P_{fa} = \sum_{m=l}^n C_n^m P_{fa1}^m (1-P_{fa1})^{n-m} \quad (7-45)$$

而检测概率则以单次检测概率 P_{d1} 代入式(7-44)后得到

$$P_d = \sum_{m=l}^n C_n^m P_{d1}^m (1-P_{d1})^{n-m} \quad (7-46)$$

对于脉冲串回波信号来讲, 各重复周期里均有信号, 因而在 n 个采样中连续超过门限的概率就大, 而对于随机噪声, 各重复周期的采样是不相关的, 因而只能偶然一两次超过第一门限, 连续多次超过的可能性就很小。第二门限判决正是利用信号和噪声这种相邻周期相关性的不同来检测目标回波。类似地, 对于杂乱脉冲干扰来讲(这种脉冲干扰可能是邻近的雷达站或敌人施放的), 二进制检测器的虚警也较小, 因为干扰脉冲只在很小一部分时间和信号重合。在一个二进制积累器中, 少量重合的干扰脉冲, 不论其振幅多大, 只要第二门限选择恰当, 干扰本身不会产生虚警。

由式(7-45)和式(7-46)可以看出, 二进制检测器的检测性能(用发现概率和虚警概率表示)既和第一门限 γ_0 有关, 又和第二门限 l/n 有关。按照奈曼-皮尔逊准则, 两个门限的选择应保证在虚警概率 P_{fa} 一定的条件下, 使发现概率 P_d 最大, 或者在虚警 P_{fa} 和发现概率 P_d 均给定的条件下, 所需的输入信噪比最小。在单门限检测系统中, 门限电平可以直接由虚警概率唯一地决定, 而在双门限积累器中, 情况就比较复杂, 虚警概率 P_{fa} 既和第一门限 γ_0 有关(它决定 P_{fa1}), 又和第二门限值 l/n 有关, 即 P_{fa} 是 γ_0 和 l/n 的函数。原则上, 当给定虚警概率 P_{fa} 后, 就可以找出第二门限 l/n 和第一门限值 γ_0 的关系式

$$l = l(\gamma_0) \quad (7-47)$$

同样, 发现概率 P_d 也是第一门限值 γ_0 和第二门限 l/n 的函数, 即

$$P_d = P_d(l, \gamma_0) \quad (7-48)$$

对式(7-47)中的 l 值代入式(7-48), 可以得到最佳的第一门限值 γ_0^* , 再将 γ_0^* 值代入式(7-47)中, 则可求得最佳第二门限值 l^* 。但实际工作中要用以上办法求第一、第二门限的最佳值是很困难的。

可以采用变通的办法, 先根据式(7-41)和式(7-42)画出单次扫描时发现概率 P_{d1} 和虚警概率 P_{fa1} 与输入信噪比的关系曲线, 然后再根据式(7-45)和式(7-46)得出二进制积累器第二门限值和所需输入信噪比的关系曲线, 如图 7.20 所示。从图上可以找到, 按奈曼-皮尔逊准则, 在

给定发现概率和虚警概率条件下所需输入信噪比最小的第二门限值 l 。从图可看出,最佳 L 值的范围比较宽阔。图 7.17 画出的是 $n=10$ 的情况,同样的办法,还可以得到 n 为不同值的一组曲线,从这些曲线中均可找出最佳 l 值的范围(使输入信噪比最小,其变化不超过 0.2dB),最佳 l 值能以足够的准确性用经验公式表示为

$$l_{\text{opt}} = 1.5 \sqrt{n} \quad (7-49)$$

这个 l 值适用范围为 $10^{-10} < P_{\text{fa}} < 10^{-5}$, $50\% < P_{\text{d}} < 90\%$ 。第一门限 γ_0 的最佳值根据 P_{fa} 和 l 值求得。

图 7.21 示出了二进制积累器采用最佳门限后的检测性能,并与其他几种积累方法进行了比较。最佳二进制积累器的性能非常靠近奈曼-皮尔逊准则下视频积累器的特性。当积累脉冲 $n > 10$ 时,得到同样检测性能要较视频积累器增加 1.3~1.5dB 信噪比。二进制积累较最佳视频积累的损失,在很宽的工作范围($50\% < P_{\text{d}} < 90\%$, $10^{-10} < P_{\text{fa}} < 10^{-5}$)都近似为 1.4dB。

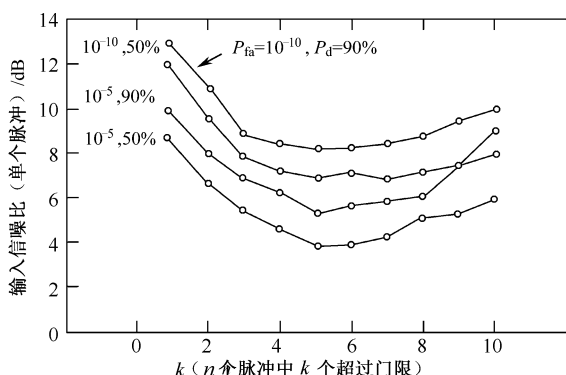


图 7.20 二进制积累器检测性能($n=10$)

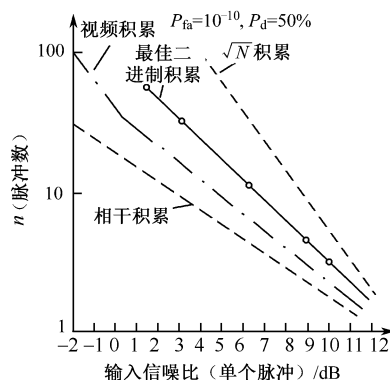


图 7.21 几种积累方法比较

7.4.5 累积积累器(批积累器)^{[12]、[13]}

当 n 个脉冲分布在各次天线扫描内,而不是(为积累)集中在一次天线扫描内时,也就是有大量可用脉冲时,可以使用批积累器。合成来自 k 次信号采样的信息效率最低的方法是,对每次采样进行单独检测判定,以及根据检测的累积概率来达到所要求的输出值。这就相当于 $l=1$ 时的二进制积累。如果有 kn 个从目标接收的脉冲, n 个脉冲相加(分批)后和一个门限相比较,看是否超过门限来形成二元判决(0 或 1)。对剩余的 $k-1$ 组 n 个脉冲重复这一过程。然后 n 个 0 和 1 相加且和第二门限比较。和二进制积累器一样,批积累器实现简单,受干扰尖峰的影响较小,对噪声或杂波的统计量可信。在这种情况下,单个脉冲虚警概率必须设定在 $P_{\text{fa}} = P_{\text{fa}_n}/n$,而单个脉冲 P_{d} 和累积 P_{d_n} 分别为

$$P_{\text{d}_n} = 1 - (1 - P_{\text{d}})^n, \quad P_{\text{d}} = 1 - (1 - P_{\text{d}_n})^{1/n} \quad (7-50)$$

对一个稳定目标的 n 个信号的累积检测增益比视频或最佳二进制积累小得多,要检测在积累时间内跨越好几个分辨单元的快速移动的目标,就不得不采用这种低效的方法。

7.4.6 反馈积累器^[12]

单延迟线反馈积累器的优点是它的处理简单。如图 7.22(a)所示,在这个积累器中,延迟线的输出被再循环,所以每个来自新的扫描信号被叠加到所有先前扫描信号的总和上。为防止由正反馈引起的不希望振荡(“振铃”),这个和值必须在每次通过延迟线时接一个 $k < 1$ 的因

子进行衰减。参数 k 是延迟线和反馈路径组成的回路增益。它赋予接收到的脉冲一个指数加权。积累的有效脉冲数等于 $(1-k)^{-1}$ 。

与按照双通道天线增益比例加权接收到脉冲的理想积累器相比,单延迟线反馈积累器大约有 1.0dB 的信噪比损失。和最优情况相比,估计基于门限超过的点目标角度位置会产生 20% 的误差。还存在偏差,必须估计,而且可能很大。图 7.22(a) 的单延迟线积累器的优点是简单,但是其问题使它的应用有限。

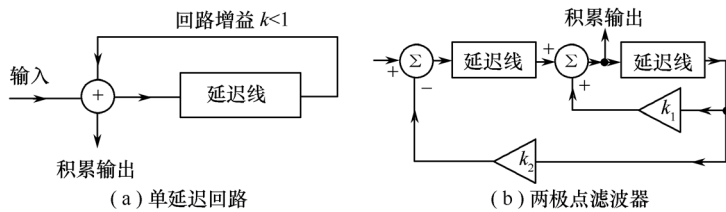


图 7.22 循环延迟线积累器,或反馈积累器,回路增益 $k < 1$ 。

图 7.22(b) 所示的双极滤波器比单延迟线反馈积累器要求更多的存储量,但是它的检测性能只比最优情况小 0.15dB。它的角度测量精度的标准偏差比最优情况高 15%,而基于最大的估值器有常数偏差。根据 Trunk,这类积累的问题是,它有高的检测旁瓣(15~20dB)并且对于干扰非常敏感。

7.4.7 其他类型的积累器/检测器

某些形式的积累器也叫检测器,因为检测判定使用 n 个来自目标的接收脉冲。例如均值检波器是基于它的 n 个接收脉冲的均值来设定门限的。因此它和传统的基于 n 个脉冲的(求和积累)设定门限方法等效。中值检测器设定的门限是基于 n 个脉冲的中值,它比均值检测器的抗干扰能力更加鲁棒,因为它不受可能包含在 n 个脉冲中的大干扰脉冲的有害影响。另外,它对杂波或噪声背景用非高斯统计量描述时,不比均值检测器的性能差。

7.5 两种实用的二进制检测器

下面我们介绍两种实用的二进制检测器。

雷达天线波束扫描通常分为连续扫描和步进扫描两大类。相控阵雷达中常采用步进扫描,即天线波束指向某一方向发射一定数量的脉冲,然后又指向另一方向,再发射一定数量的脉冲。而机械扫描天线一般都是连续扫描工作的。天线扫描方式不同将影响到所采用二进制积累器的形式。这里讨论的检测器,不仅可判决目标存在与否,还有判定目标方位的作用。在此,我们仅介绍指向检测器和滑窗检测器。

7.5.1 指向检测器

指向检测器适用于步进扫描。天线在某一波束指向时,发射一串 n 个脉冲,相应地就有 n 个回波被接收。上节研究的二进制检测原理可以直接用于步进扫描的情况,并称为指向检测器。这时可将天线波束在某一指向中各次扫描的回波通过第一门限的比较后得到“0/1”信号,按不同的距离单元把它们分别储存或累加起来,然后按第二门限做判决处理。这种指向检测器是二进制检测器中较为简单而又具有代表性的一种。

一般的模数转换器都是先做时间分割(采样保持),然后再做模数转换。由于二进制检测的幅度量化特别简单,它只是按门限变成“0/1”信号,所以先进行幅度量化,再进行时间采样,这样设备要简单一些。

经过时间采样后,一次扫掠中的信号已按距离单元分割。由于要做第二门限检测,应将前面 $n-1$ 次扫掠的“0/1”信号用各距离门的计数器储存下来,在第 n 次扫掠的信号(即某一指向的最后一次信号)到来时,经过量化的实时信号,再加入到各相应计数器,这样可以顺序地得到各距离单元 n 次信号中“1”的总数,把它们与第二门限 k 做比较就能得到最终检测结果。

图 7.18(b)所示的二进制积累器可用累计式指向检测器实现。这种用累计的办法完成各次扫掠信号的累加,设备简化,特别是所需计数器仅一个。图 7.23 所示为 $n=7$ 时 1 024 距离单元的累计式指向检测器原理图。它的工作过程如下:当天线波束移到一个新的指向时,首先应将 MOS 移位寄存器清“0”。量化信号经 3 位计数器再送入 MOS 移位寄存器,而在某一距离单元的量化信号送入计数器前,先将 MOS 移位寄存器的输出(即该距离单元前几次扫掠中信号为“1”的累计数)对计数器置数,如果新的输入为“1”,则计数器加 1,并将结果再存入移位寄存器。这时的移位寄存器储存的就是这次和前若干次扫掠中信号为“1”的累计数,由于 $n=7$,要用 3 位二进制数码表示,所以计数器是 3 位的,移位寄存器也要 3 条,每条储存 1 位二进制码。

当最后一次扫掠的回波到来时,计数器依次输出的是各距离单元 n 次扫掠累计的“1”(这里 $n=7$)。这时,图 7.23 中开关 S_2 应接通,使总的累计数与门限 k 做比较,得到二次检测的输出。同时,在末一次扫掠期间,应使三条 MOS 移位寄存器的输入端与计数器的输出端脱开并接地(由开关 S_1 实现),这相当于使 MOS 移位寄存器清“0”,为波束移向新的指向做准备。由上面工作过程可看出,指向检测器的工作是和天线步进扫描同步的,而信号经过指向检测器处理后,每 n 次扫掠才有一次输出。例如,对某距离单元来说,原来 n 次扫掠时每次都有信号(代表同一目标),现在只在最后一次才有积累输出,这是合理的。目标的角度位置可根据出现目标回波时天线波束的指向角来确定,或根据差波束通道的数据更精确地测定目标的角度位置。

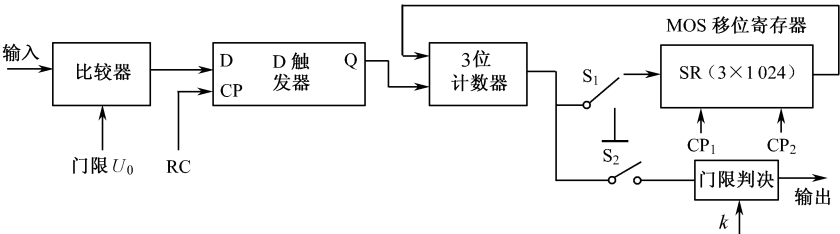


图 7.23 累计式指向检测器

二进制指向检测器的检测性能,和二进制积累原理部分所分析的相同。

7.5.2 滑窗检测器(积累器)

积累来自目标的 n 个可用脉冲的直接方法是将它们简单地相加。直到数字处理技术有了发展,这才得以实现。从每个距离分辨单元的接收机输出中获得持续的 n 个脉冲连续积累,可以通过一个滑窗积累器来完成,它也称为滑窗检波器。从接收机得到的新输出累加到先前的和上,且前面的 n 个脉冲接收到的输出被减掉以实现 n 个脉冲的滚动和。

当天线做连续扫描时,波束扫过目标期间将获得一串回波脉冲,这与步进扫描时收到一串回波的情况很相似。差别在于这一串回波通常是按天线方向图的形状产生幅度调制而不是等

幅的,更主要的差别是目标信号开始出现的角度位置不能预知,这就必须采用其他形式检测器,滑窗检测器就是其中的一种。

采用多节延迟线组成的滑窗检测器,其原理框图图 7.24 就可用在二进制检测器中。回波信号经第一门限检测后变为“0/1”信号,如果天线波束扫过目标时收到的回波数为 n ,则相应的滑窗检测器由 $n-1$ 个延迟单元组成,每单元的延迟时间为重复周期 T_r 。“0/1”信号送到滑窗检测器进行 n 次扫掠的信号求和运算,由于是将 n 次“0/1”信号求和而不是多比特量化数字信号求和,这种滑窗设备比较简单。图 7.25 给出了二进制滑窗检测器的组成和相应 $n=7$ 时的波形图。

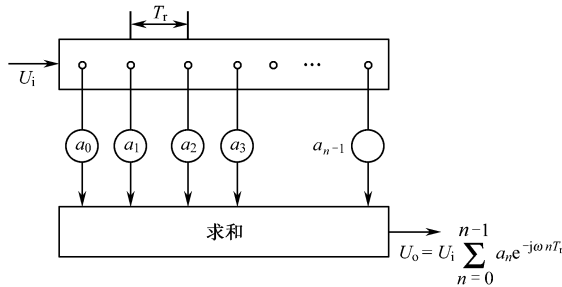
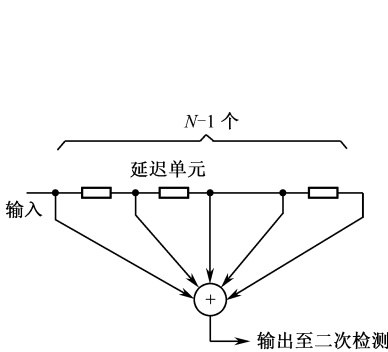


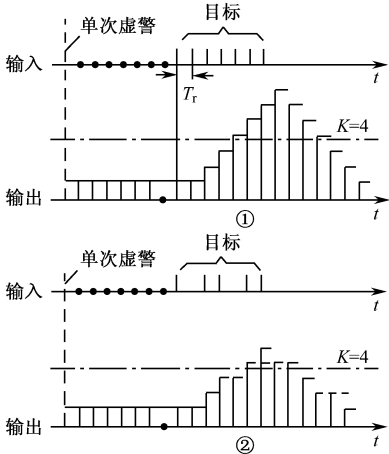
图 7.24 多节延迟线组成的滑窗检测器

同,即设立一个门限 K ,滑窗检测器输出的 N 次扫掠脉冲之和,若能达到或超过该门限即认为有目标信号。

与指向检测器不同,滑窗检测器是每次扫掠均有输出的。图 7-25 (b) 是某一距离单元的输入信号和输出信号的波形:①图是目标信号较强时的情形,该目标所在距离单元通过第一门限后的输出,也就是滑窗检测器的输入都是“1”;②图表示目标信号较弱的情况,一次门限检测后目标信号丢失了部分脉冲。二次门限的判决方法仍和指向检测器相同。



(a) 滑窗检测器



(b) $n=7$ 时滑窗检测器的波形

图 7.25 二进制滑窗检测器及其波形图

在指向检测器中, n 个回波脉冲经累加后只有一个脉冲输出, 由该脉冲的大小来判别有无目标。而在滑窗检测器中, 由于每次扫掠均有输出, 就可能在波束扫过目标期间, 有多次扫掠都可能超过门限, 但所反映的却是同一目标。因此在做出是否有目标存在的判决时, 以这些输出中的最大值为准较好。

滑窗检测器的检测性能和指向检测器稍有差别。若以输出最大值为检测准则时, 其检测概率的计算与指向检测器相同。但对于虚警概率的计算, 考虑到如果连续两次以上扫掠发生虚警时, 最后只能算是一次虚警。因此检测器虚警概率的计算需做出相应的修改。

天线连续扫描时,当检测到有目标存在后,还要对目标所在角度进行估值。通常是两种方法:一种是以滑窗检测器输出为最大时的角度为准则;另一种是分别记下输出超过第二门限时(称为目标起始)及回到第二门限之下瞬时(称为目标终了)的角度,然后取其平均值。从图 7.25 可以看出,检测器的输出滞后于输入,上述两种角度估值法所得结果均有滞后偏差,其值约等于 $(n-1)\Delta\theta_1/2$,其中 $\Delta\theta_1$ 为一个扫描周期内天线波束扫描的角度,这种固定偏差可通过校准来消除。

7.6 恒虚警率检测处理

7.6.1 概述

本节重点讨论针对雷达干扰环境下雷达信号的恒虚警率(Constant False Alarm Rate, CFAR)处理的基本概念,基本理论和实现方法。

雷达的恒虚警率(简称 CFAR)的定义如下:^[13]

CFAR 是专门为抑制由不同电平的噪声、杂波或 ECM 引起的虚警而设计的门限或增益控制装置的性能。

在典型雷达信号中,其固有的信息产生率远远大于操作人员所能处理的速率。例如利用带通采样 1MHz 带宽的雷达信号,通过 I、Q 两路采样率为 1MHz 的 8 位 A/D 转换后,具有 16Mb/s 的信息,但一个操作人员只能接受速度为每秒 10~20 比特的信息。因此,在雷达的信息容量和操作人员处理信息的能力之间存在很大的不匹配。自动检测就是雷达信号的检测功能全由电子判断电路执行而不需要操作人员介入。采用自动检测的主要原因之一是克服操作人员能力的限制。另外,自动检测还允许雷达输出能比较有效地通过通信电路进行传输,它只需传输被检测的目标信息,而不必传送全频带原始视频信号。雷达系统通常要求能够在比热噪声更为复杂和不确知的背景环境中检测目标的存在并保持给定的虚警概率,为此,必须采用自适应门限检测电路。在没有(感兴趣的)目标存在时,利用自动检测电路来估测接收机的输出,以保持一个恒虚警率的系统便称为恒虚警率(CFAR)系统。每一距离单元的被处理信号与下列门限电压相比较,就可获得搜索雷达的自动目标检测。这些门限电平可分为:

- ① 固定门限电平;
- ② 以外界干扰的平均幅度为基础的门限电平;
- ③ 在干扰分布律已知的基础上计算未知参量作为门限电平;
- ④ 在没有干扰统计分布律的先验知识时,在自由分布统计假设下所确定出的门限电平。

在第一种情况下,如被处理信号 x_0 等于或大于预置的门限 U_T ,即如果在

$$x_0 \geq U_T \quad (7-51)$$

时,就确认一次检测,如图 7.26 所示。当干扰(电平、统计量等)变化时,具有非自适应门限的自动检测器,将可能使虚警率在同一搜索区的不同部位上产生很大的变化。

第二种和第三种情况代表了典型自适应门限恒虚警率处理器。在这些处理器中对已知分布律的干扰的参数进行估值。当其分布律的参数完全由其平均电平描述时,第二种情况就能获得恒虚警率,如图 7.27 所示。在这种情况下,检测门限 U_T 由下式表示更为恰当

$$U_T = K_0 \sigma_0^2 \quad (7-52)$$

式中, K_0 为由所要求的虚警概率和所处理干扰的统计特性确定的常数,而 σ_0^2 是被处理干扰的

平均电平(功率)。当被处理信号 x_0 等于或大于 U_T 时,即

$$x_0 \geq U_T \quad (7-53)$$

就确认一次检测。

除所处理干扰的平均(功率)值不能完全描述其统计特性外,第三种情况与第二种情况相类似。第三种情况的自适应门限恒虚警率处理器可对已知(先验)分布的未知参量进行估值。例如,已知所处理干扰的平均值与标准偏差的比值是输入信号的脉冲与脉冲间相关特性的函数。相关特性的改变会引起平均值与标准偏差比值的改变,从而提出调整门限常数的必要。当所处理干扰的分布形式已知且其未知参量也能充分估值时,第三种情况就能获得恒虚警率。

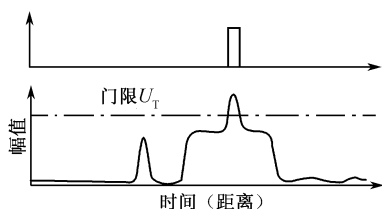


图 7.26 固定门限检测

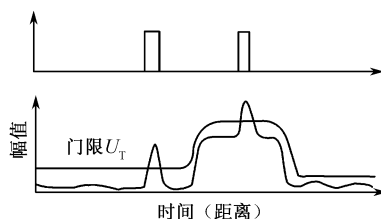


图 7.27 自适应均值门限检测

第四种情况代表了所谓非参量恒虚警率处理器。这种自由分布的处理乃指虚警概率保持为恒定值且与干扰统计分布无关。举例来说,这类检测器在扫描(搜索和边跟踪边扫描)雷达中获得应用,因为这类雷达的干扰和杂波背景的电平和分布律均为未知,而它在中等大小的搜索面积内又不恒定。

概括起来,基本的 CFAR 过程是对需要进行目标检测的单元内的噪声和干扰电平进行估计,并根据估计值而不是操作前预设的某个恒定电平来设置门限。进行这种估计的两种基本方法:

- (1) 将距离、多普勒、角或雷达坐标的某种组合的相邻参考单元进行平均来估计电平;
- (2) 将几次扫描的检测单元本身的输出进行平均来估计电平。

估计可能只涉及平均电平或利用更高阶的干涉概率密度函数矩。在某些情况下,可设计检测步骤使其与概率密度函数的形式独立(非参数 CFAR)。

7.6.2 瑞利分布的参量型恒虚警率处理

自从恒虚警率(CFAR)处理概念提出以来,针对不同的杂波环境和性能要求,目前已有很多 CFAR 处理方案。随着数字技术和集成电路的发展,CFAR 处理技术已经从原始的噪声电平恒定(慢门限)发展到多种参量型和非参量型自适应 CFAR 的综合应用。

下面讨论几种主要的恒虚警处理方法。

瑞利分布的杂波经线性包络检波器后,其幅度的概率密度函数仍然服从瑞利分布,表达式为

$$P(|x|) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \geq 0 \quad (7-54)$$

式中, x 为杂波的幅度; σ 为检波前中频噪声和(或)干扰杂波的标准差。它们是瑞利分布的参数。

设检测门限为 C_T , 则干扰幅度超过门限的概率为

$$P_{fa} = \int_{C_T}^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \exp\left(-\frac{C_T^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7-55)$$

若 C_T 固定, 则由于干扰强度变化 (σ 变化), 会引起单次检测概率 P_{fa} 的变化, 结果如图 7.28 所示。图 7.28 示出了信号积累的次数 $m=1$ 、 $m=4$ 和 $m=16$ 三种情况的虚警概率曲线。当 $m=1$ 时, 由图可见, 若最初按 $P_{fa}=10^{-6}$ 调整门限 C_T , 则当总的干扰电平增加 2dB 时, P_{fa} 由 10^{-6} 增大到 10^{-4} , 即增大 100 倍, 这仅是单次检测的情况, 若按距离单元多次积累后, 虚警概率变化更大。这是因为积累会使干扰的起伏得到平滑, 从而使干扰电平的变化对虚警概率产生更大的影响, 图 7.28 中 $m=16$ 的曲线表明, 干扰电平增加 2dB, P_{fa} 就从 10^{-6} 变成 10^{-2} 。

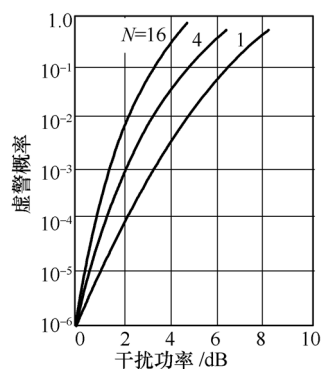


图 7.28 固定门限检测时的虚警概率

上面以服从瑞利分布的干扰为例, 说明了恒虚警率检测的必要性。事实上, 对其他类型的干扰信号, 同样也存在干扰强度的变化, 若用固定门限检测, 虚警概率随之显著变化的问题。所以, 在雷达信号检测中, 必须采用恒虚警率检测技术。

现对式(7-54)所表达的瑞利分布的密度函数引入一个新的变量 $y = |x|/\sigma$, 则得

$$p(y) = y \exp[-y^2/2], \quad y \geq 0 \quad (7-56)$$

式(7-56)表明, 变量 y 的概率密度分布与干扰强度 σ 无关, 因此, 只要设法估计出干扰 $|x|$ 的强度 σ^2 值, 并通过这一归一化 ($|x|/\sigma$) 过程达到了恒虚警的目的。又由于已知瑞利分布的均值 $\bar{x} = E[|x|] = \sqrt{\pi/2}\sigma$, 即 σ 与干扰 $|x|$ 的统计平均值 \bar{x} 成正比。原则上讲, 计算干扰 $|x|$ 的平均值比计算相应于瑞利分布的高斯分布的方差 σ 容易, 只要设法计算出干扰 $|x|$ 的统计平均值 α , 再由 $\alpha = \sqrt{2/\pi}\bar{x}$, 便可以得到 σ 的值。

若杂波干扰的概率密度分布已知, 而只需估计某些未知参量的情况, 属于参量型的处理方法。下面分别讨论几种瑞利分布杂波快门限恒虚警率处理设备的原理和实现方法。

1. 噪声电平恒定电路

这是一种对接收机内部噪声电平进行恒虚警处理的电路。内部噪声由于温度、电源等因素而改变, 它的变化是缓慢的, 因此这种处理是慢门限恒虚警处理。

噪声电平恒定电路可采用类似接收机自动增益控制电路的方法, 如图 7.29 所示。采用平滑滤波器来完成, 上面已列出 \bar{x} 与 σ 间只差常数 $\sqrt{2/\pi}$, 与工作原理没有关系, 所以就可以把平滑滤波器计算的结果看成为 σ 。工作时, 接收机输出除噪声外还有目标信号和地物杂波等干扰, 所以对噪声的采样应在休止期(接近于纯噪声区)里进行, 将噪声采样值检波后送到低通滤波器平滑, 平滑后的电压送去控制中放增益。

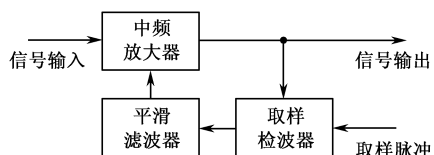


图 7.29 闭环式噪声电平恒定电路

用模拟的办法实现噪声电平恒定电路比较简单。应该指出, 所用平滑滤波器应有足够大的时常数, 因为大数定律指出, 只有平滑时间很长时, 所得平均值的估值才能接近真实的平均值。否则, 由于平滑时间不够, 在输入噪声强度不变时, 滤波器输出平均估值也会有起伏, 这种起伏将加到信号支路去, 使输出噪声的起伏增加, 造成检测损失。滤波器时常数通常选为零点几秒到几秒。由于采样检波器输出端的电压是脉冲式的, 通过滤波器很难完全平滑因而残存波动。为了消除这种波动的影响, 应在滤波器前面再加

一级长时间的采样保持电路,大约数百个雷达重复周期采样一次,并保持下来,这个保持时间长达秒的数量级,用模拟电路很难做好。所以模拟式噪声电平恒定电路只能用于对性能要求不高的场合。要求高时,应采用数字式电路。

图 7.30 为一个数字式噪声电平恒定电路的框图,这是一个闭环自动调整电路。它直接测出噪声的虚警率,将该数和预置的虚警率相比较,根据差值的大小和正负,自动调整门限电平,保持恒定虚警率。

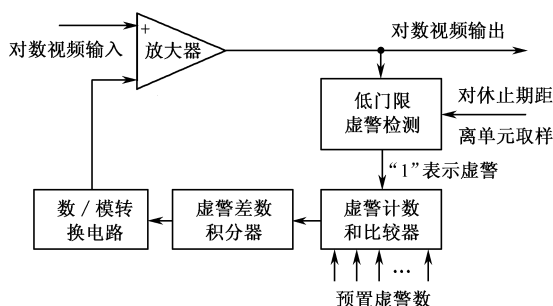


图 7.30 数字式噪声电平恒定电路框图

在数字电路中,虚警率的测量也应该在纯噪声区亦即雷达工作的休止期进行。例如在每个休止期里取 20 个距离单元,将这些单元的噪声采样值用一定的门限进行检测,超过门限时表示虚警,输出“1”。根据所检测单元的总数目 n 和虚警数目可算得虚警频率。只有当噪声采样数 n 趋于无限大时,虚警频率才趋于虚警概率。根据贝努里大数定理,可以找到两者之间的差别和采样数 n 之间的关系。如在 n 次采样值中有 k_i 次虚警,虚警频率为 k_i/n ,设虚警概率为 P_{fa} ,两者之间的差别(用相对百分数表示)小于某一值,即

$$\left| \frac{P_{fa} - k_i/n}{P_{fa}} \right| < \epsilon \text{ 或 } \left| P_{fa} - \frac{k_i}{n} \right| < \epsilon P_{fa} \quad (7-57a)$$

其中, ϵ 为小于 1 的数值,则由贝努里大数定理有

$$P \left[\left| \frac{k_i}{n} - P_{fa} \right| < \epsilon P_{fa} \right] > 1 - \frac{P_{fa}(1 - P_{fa})}{n \epsilon^2 P_{fa}^2} \quad (7-57b)$$

上式中 P 表示两者相差小于 ϵP_{fa} 的可能性。当 N 较大时, P 值较大,表明可能性较大。如果要求这件事情的概率为 P_1 ,则采样数 n 和它的关系为

$$1 - \frac{P_{fa}(1 - P_{fa})}{\epsilon^2 P_{fa}^2 n} \geq P_1 \text{ 或 } n \geq \frac{1 - P_{fa}}{\epsilon^2 P_{fa}(1 - P_1)} \quad (7-58)$$

可以看出,当 P_{fa} 小时,所需的 n 值很大,这是因为虚警率低,需要更多的采样值,才能测出一次虚警数。举例说明,如 $P_{fa} = 10^{-8}$, $P_1 = 0.9$, $\epsilon = 0.2$ 时算出 $n \geq 25 \times 10^9$,这个数目太大了。如果这时将 P_{fa} 提高到 10^{-2} 而降低测量精度要求,令 $\epsilon = 0.5$,而 P_1 仍为 0.9,则计算得 $n \geq 4000$ 。这个数值是可以接受的,是目前设备中常用的采样值数量。

因此,恒虚警电路的检测门限应采用低门限来得到高的虚警率($10^{-2} \sim 10^{-1}$ 量级),以减少所需检测的单元数和相应的存储计数设备。而实际的信号检测支路应采用较高的门限以保证工作时的低虚警概率,例如 $10^{-8} \sim 10^{-6}$ 。低门限和实际门限之间的关系,可根据瑞利分布计算。

如每一个重复周期只在休止期对 20 个距离单元采样,则要完成数千个检测单元的采样,需要数百个重复周期(当 $n = 4000$ 时,需要 $200 = 4000/20$ 个周期)。将低门限虚警检测电路检出的虚警数送到一个计数器进行计数,记得的虚警数在每 200 个周期末与预置虚警数进行

比较,根据两者的差别,例如实际数大于预置数时,输出为“+1”,小于预置数时输出“-1”。比较器的输出送到虚警差数积分器,使其输出每 200 个周期变化一次,变更数为“±1”或“0”(当虚警实际数和预置数相等时)。积分器的数字量通过数/模转换电路变为相应的模拟电压,送到放大器与对数视频输入信号相减。这样一来,当实际虚警数和预置的不相等时,它可以自动进行调节。这种调节几百个重复周期(例如 200 个)才进行一次,这种速度完全适应噪声强度的慢变化。而且这种慢调节保证在每一个调节周期内没有起伏,因而不存在由于起伏引起的恒虚警率损失。

上述的噪声电平恒定电路,是在多次采样的条件下得到的恒虚警效果,是一种慢门限恒虚警处理电路。它适用于像热噪声一类平均噪声电平变化缓慢的场合。但雷达工作时的杂波干扰却具有不同的特性,例如各个方向的杂波强度不相同,有时差别甚大;在一次距离扫掠里,杂波强度也会有明显变化,例如雨雪杂波只存在于一定的降落区;海浪杂波对搜索雷达只存在于附近 5~10km 等。因此对这类杂波的恒虚警处理应采用快门限,并根据不同的情况采取与之相应的方案。

下面分别讨论几种瑞利分布杂波情况下快门限恒虚警率处理设备的原理和实现方法。

2. 邻近单元平均恒虚警率处理电路

(1) 工作原理

根据瑞利杂波恒虚警率处理的原理,需要获得杂波的平均值估计 \hat{x} ,以估计值代替理论上的杂波杂均值 $\bar{x} = E[|x|]$,完成归一化处理。由于雷达在一次过程中,杂波的强度会明显的变化。因此对这些杂波的统计平均值作估值,就不能以多个扫掠周期为基础来进行。也不应当在一次距离扫掠的全程中进行,而应该以目标所在点附近的若干分辨单元来进行。在这些单元内,杂波强度基本一致,称为邻近单元平均恒虚警率处理,如图 7.31 所示。图 7.31 中,中间是被测单元 x_0 ,被测单元前后各有 $n/2$ 个参考单元,用于从这 n 个参考抽头进行平均来获得雷达波束中目标附近的噪声和干扰的平均值估计 \hat{x} ,除法器完成归一化处理。实际上,门限电平 C_T 按本地噪声的估计值确定,而不是按前面讨论过的先验值设定。

在单元平均恒虚警率处理中,用杂波的平均值估计式(7-59),即

$$\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (7-59)$$

代替杂波的统计平均值 $E[x]$ 实现归一化处理,因为估计量 \hat{x} 是无偏的,即 $E[\hat{x}] = E[x]$,所以从统计意义上讲,单元平均恒虚警率处理是具有恒虚警率性能的,特别是当参考单元 n 足够大且全部被杂波所覆盖时,估计值 \hat{x} 和均值 $E[x]$ 是十分接近的。

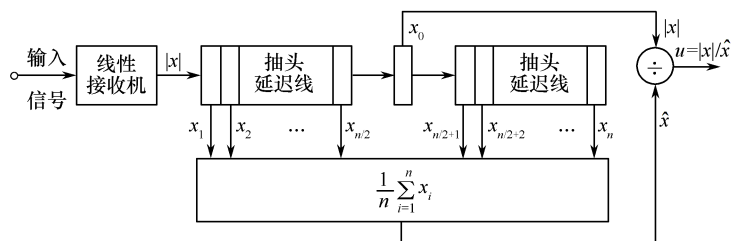


图 7.31 邻近单元平均恒虚警率处理原理框图

如果参考单元数目足够大,并且实际的噪声电平恒定或变化缓慢,那么估计值的精确度就

会足够精确,以使检测性能与上面的结果匹配。

(2) 检测性能

衡量恒虚警率检测的性能,通常主要考虑两个质量指标——恒虚警率的性能和恒虚警率的损失。

① 恒虚警率的性能

恒虚警率的性能表明了恒虚警率检测设备在相应的环境中实际所能达到的恒虚警率水平。这是因为理想的恒虚警率检测通常是难以做到的,为此需要研究实际设备偏离理想情况的程度,这就是恒虚警率的性能。

② 恒虚警率的损失

为了实现恒虚警率检测而采用的恒虚警率处理不能提高信噪比,相反的,在处理过程中,信噪比还会或多或少地有所损失,把这种损失称为恒虚警率损失,用 L_{CFAR} 表示。其定义为,雷达信号经过恒虚警率处理后,为了达到原信号(即处理前的信号)的检测能力所需的信噪比的增加量。信号的恒虚警率损失也可以用检测能力的降低来表示。显然,希望损失越小越好。

基于上述两个恒虚警率处理的质量指标,下面讨论上述邻近单元平均恒虚警率处理器的性能。

在雷达的工作环境中,由于多种因素的限制,参考单元不可能取得很大,常用典型值为 $n=8, 16$ 或 32 。

如果各距离单元的杂波是不相关的,则估计量的均方误差为 σ^2/N 。这意味着要用少量的参考单元来得到杂波的平均值估计 \hat{x} ,估计值本身的起伏是比较大的,参考单元数愈少,起伏愈大。经归一化处理后,平均值的起伏将引起输出噪声起伏增大。当检测门限一定时,噪声起伏的增大将引起恒虚警率的增加。在这种情况下,如果要保持原恒虚警率不变,则应根据参考单元数适当提高检测门限,这时要保持原来的检测概率,必须提高输入信号的信噪比。这个所需提高的信噪比,就是恒虚警率损失 L_{CFAR} 。

通常把信噪比提高的倍数称为恒虚警处理中的信噪比损失,简称恒虚警损失。以符号 L_{CFAR} 表示。其定义为

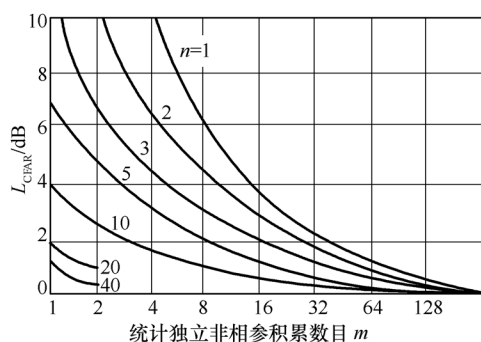


图 7.32 邻近单元平均恒虚警率处理损失曲线
($P_{\text{fa}}=10^{-6}$, $P_{\text{d}}=0.5$)

$$L_{\text{CFAR}} = \frac{R(n)}{R(\infty)} \Big|_{P_{\text{d}}, P_{\text{fa}}} \quad (7-60)$$

式中, $R(n)$ 表示在一定 P_{d} 、 P_{fa} 下,参考单元数目为 N 时所需的信噪比; $R(\infty)$ 表示在同样的 P_{d} 、 P_{fa} 下,参考单元 $n \rightarrow \infty$ 的情况,所需的信噪比。这里需要指出,恒虚警损失的定义也适用于干扰为其他分布规律的情况。

如图 7.32 所示,给出 $P_{\text{d}}=0.5$ 、 $P_{\text{fa}}=10^{-6}$ 时,恒虚警损失 L_{CFAR} 与参考单元 n 、非相参积累脉冲数目 m 的关系曲线。从图中曲线可以看出,对于单次扫描(积累脉冲数目 $l=1$),参考单元数目 $n=5$ 时,恒虚警损失约为 7dB,这是相当大的。当 $n=30$ 时, L_{CFAR} 就减小到约 1.2dB,这样的损失是可以接受的。当 $n \rightarrow \infty$ 时,平均值 \bar{x} 的估计值趋于统计平均值,就没有恒虚警损失。从图中还可以看出,即使 $l=1$,当 n 超过 100 时, L_{CFAR} 也很小,可以忽略,而认为无恒虚警损失。另外,从图中也可以看出,积累能降低恒虚警损失 L_{CFAR} 。这是由于积累起到了平均的

作用,可以降低干扰幅度的起伏,使虚警概率的起伏变小。并且积累数目 l 越大,损失越小。譬如,即使在参考单元数目 $n=2$ 时,如果积累脉冲数目多于 40,也会使恒虚警损失 L_{CFAR} 降至 2dB 左右。值得注意的是,进行积累运算时必须要求各次噪声采样统计独立。热噪声是满足这个条件的,但是地物杂波在不同次扫描间有很强的相关性,从而使性能变坏。当然,可以采用各种去相关技术改善采样的独立性。

3. 单元平均加权 CFAR 处理电路

此外,还可采用单元平均加权的 CFAR 检测器,如图 7.33 所示。图中,设前面的距离单元 $x_1, x_2, \dots, x_{n/2}$ 输出的和为 U ,后面的距离单元 $x_{n/2+1}, x_{n/2+2}, \dots, x_n$ 输出的和为 V 。 U 乘以加权系数 α , V 乘以加权系数 β ,两者相加后得到自适应门限 U_T ,并将 U_T 与被测单元 x_0 的输出做比较,从而做出被测单元存在或不存在目标的判决。其中, α, β 是根据参考单元中干扰的估值电平的先验信息设置的,它们既要使检测概率最大,又要保持虚警概率恒定。 α, β 值的求法和检测概率的计算涉及复杂的数学运算,读者可参阅有关书籍。

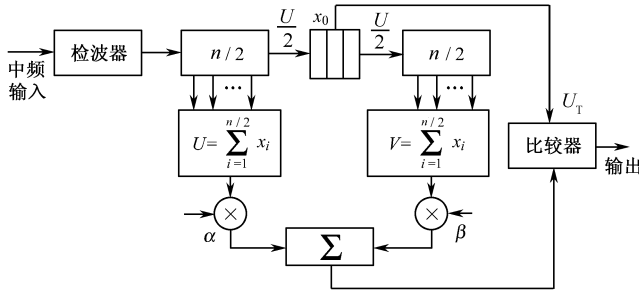


图 7.33 单元平均加权的 CFAR 原理框图

4. 对数邻近单元平均恒虚警处理电路

(1) 工作原理

引入对数运算的目的是把归一化过程的除法变为对数相减,从而有利于工程实现。图 7.34 示出一种对数单元平均 CFAR 处理原理框图,图中 n 为参考单元数。在具体设计 CFAR 处理时,除了原理方案中的对数运算单元、反对数运算单元、平均值估值单元、减法归一化单元外,还应考虑过大输入信号和过小平均值,以及减法归一化结果为负值时的处理问题。其中,杂波信号的平均值是由 n 个参考单元所获得的平均值估计来代替的,减法器实现归一化处理。

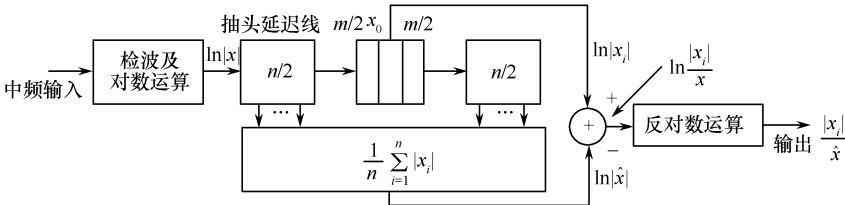


图 7.34 对数单元平均 CFAR 处理原理框图

(2) 杂波边缘效应

图 7.35 定性地说明了杂波边缘效应的过渡过程,它是当参考单元 $N=8$,杂波跃变为 16dB 时,图 7.34 的恒虚警率处理的各主要点的波形。图 7.35 表明,在杂波的边缘,减法器的输出变化最大,而检测门限 u_T 是不变的,故虚警概率变化很大;它还表明,参考单元 N 越大,

恒虚警率处理的过渡过程越长。

5. 选大值对数单元平均恒虚警率处理电路

(1) 工作原理

为了消除杂波边缘内侧虚警显著增大的现象,可采用改进电路——两侧单元平均选大恒

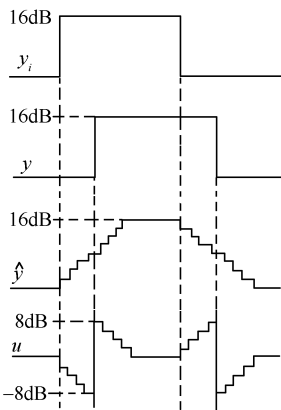


图 7.35 杂波的边缘效应

虚警率电路,如图 7.36 所示。其中,检测点两侧的距离单元分别为平均值估计后送到选大值电路,将两者之间的较大的估计值参加归一化处理,作为相减的参考量。虚警的增大是由于强杂波已到达检测点,而有一侧的采样点仍为弱杂波区占据,使其输出的平均值偏小而产生。将检测点前后的参考单元分别平均估值,并选用其中的较大值作为平均值估值输出,这样就不会出现杂波边缘虚警概率显著增大的现象了,但杂波边缘信号检测能力的损失将相应增大。

图 7.37 用跃变杂波输入说明了图 7.36 的恒虚警率处理的边缘效应。杂波跃变值为 16dB,参考单元 $n=8$,保护单元对杂波的延迟作用暂不考虑,因为它不影响杂波边缘效应的说明。归一化的减法器输出说明,杂波边缘内侧虚警概率显著增大的现象得

到解决,但与图 7.35 相比较,杂波外测负的更大了。可见这种方法仅将杂波的边缘效应转移到一侧,并未彻底解决问题。实际上,要完全消除杂波的边缘效应比较困难,但我们设想可以采用一些简单的办法加以部分改善。例如,在选大值方案里加一些辅助判断,用来确定被测单元是位于强杂波区还是弱杂波区,同时将选大值电路做一些改进。当被测单元处于强杂波区时,它还像原来那样选大值进行归一化处理;当被测单元处于弱杂波区时,转为选小值。这样可以基本上消除杂波的边缘效应。如果恒虚警率处理仅在被测单元处于强杂波区时才用,则选大值方案可以基本上消除杂波的边缘效应。

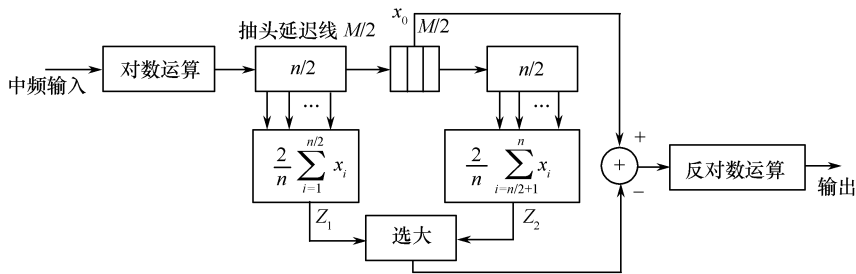


图 7.36 改进的对数单元平均 CFAR 原理框图

(2) 对数单元平均恒虚警率处理的损失

对数单元平均恒虚警率处理当参考单元 n 为无穷大且处于平稳恒虚警率状态时,没有恒虚警率损失,但是当 n 有限时,会带来损失,这与单元平均恒虚警率处理类似。已经证明,对数单元平均恒虚警率处理在参考单元 n_{lm} 有限且与单元平均恒虚警率处理参考单元 n_{lm} 相同的条件下,前者的损失大于后者。分析结果表明,在系统输入为平衡正态干扰的情况下,要使两者的损失一样,参考单元数应满足

$$n_{lm} = \frac{n_{ln} - 0.65}{1.65} \quad (7-61)$$

该式说明,在相同的信噪比条件下, n_{ln} 比 n_{lm} 大约65%时,两者可以得到相同的检测性能。

对数单元平均恒虚警率处理与单元平均恒虚警率处理相比较,前者在动态范围方面具有明显的优点(当采用对数接收机时),而且实现容易,但当参考单元 n 相同时其检测性能稍差。

选大值对数单元平均恒虚警处理的损失,在参考单元 N 相同的条件下,比对数单元平均恒虚警率处理的损失要大,因为前者实际上只用 $n/2$ 个参考单元的杂波本进行其平均值估计。所以,要使两者的损失一样,前者的参考单元数必须为后者的 $\sqrt{2}$ 倍。

6. 参考单元数 n 的取值

通过前面的恒虚警率处理的讨论,可以对参考单元数 n 的取值问题作简要的归纳。参考单元数 n 取多大比较好,主要应考虑如下一些主要因素。

首先,为了使恒虚警率处理在平稳状态下的损失较小,希望参考单元数 n 取大些。

其次,为了使恒虚警率处理的非平稳过渡过程短,扰乱目标出现的概率小,则希望将参考单元数 N 取小些。可见,以上两方面的因素对 n 的取值要求是相互矛盾的。

总之,参考单元数 N 的选取既要考虑系统的有关指标要求,又要考虑杂波的不同特性,通常是多样因素的折中结果。如前所指出的,实际应用中,一般地取 $n=8,16$ 或 32 。

7. 保护单元数 m 的选取

在理想的情况下,目标的中心处于所占据的距离单元的中间,信号幅度最大,两侧对称,幅度逐渐减小。在这种情况下,采用单元平均类型的恒虚警率处理,如果被测单元的两侧不加保护单元,则经恒虚警率处理后的输出信号可能只保留中间距离单元及附近的少量单元的目标信号,且信号幅度会减小许多,这对信号检测是非常不利的,也不利于目标的自动捕获与跟踪。保留目标的具体单元数决定于采用的单元平均恒虚警率处理的类型和参考单元数 N 。

7.6.3 非瑞利分布的参量型恒虚警率处理(双参量 CFAR)^{[9],[10]}

上面讨论了对于瑞利分布的噪声和杂波进行恒虚警处理的原理和方法。但是不同特性参数的雷达所收到的杂波,以及同一雷达所收到的不同类型的杂波,其振幅分布并不一定都可以用瑞利分布来近似。近期对杂波特性的研究证明,当用高分辨率雷达(例如波束宽度 1° 量级,脉冲宽度 $0.1\mu s$ 量级)探测目标时,海浪杂波适合用对数正态分布来表征;对一些地物杂波,则适合用韦伯尔分布描述。这两种分布的特点是在高振幅端有比瑞利分布更大的概率,这是比瑞利杂波苛刻的环境,它可以把很大一类杂波包括在内。

1. 对数—正态分布杂波 CFAR 处理

对于对数—正态和韦伯尔分布杂波进行恒虚警处理的原理与瑞利分布杂波相同,就是要对杂波分布进行归一化处理,使归一化以后的新分布和输入杂波的强度无关。由于上述两种分布均有二个参量,因而取归一化的过程和相应的处理设备比较复杂。下面以对数—正态分布为例来说明归一化的过程。

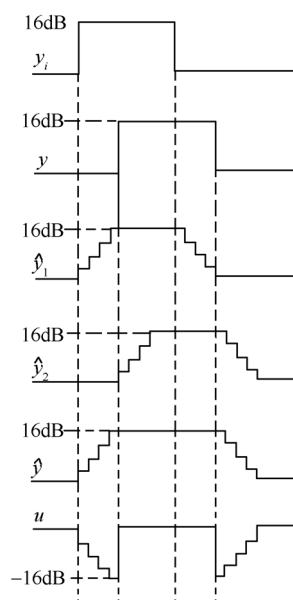


图 7.37 杂波边缘效应

对数—正态分布的概率密度函数为

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left[-\frac{(\ln x - \overline{\ln x})^2}{2\sigma_m^2}\right], x \geq 0$$

式中, σ_m 为 $\ln x$ 的方差。采用对数接收机, 令 $y = \ln x$ 则

$$p_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_m^2}(y - \bar{y})^2\right] \quad (7-62)$$

变量 y 服从正态分布, 其方差为 σ_m , 而统计平均值为 \bar{y} 。下一步要对式(7-50)进行归一化, 使之与 σ_m 与 \bar{y} 无关。为此需引入新变量 u , 令

$$u = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_m} \quad (7-63)$$

则得归一化正态函数为

$$p_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad (7-64)$$

如能将变量 u 加到门限 U_{k_1} 上比较, 由于 u 的分布与杂波参数 σ_m 和 $\overline{\ln x}$ 无关, 故可得到恒虚警的结果。

因此, 对数—正态分布的恒虚警处理是先对输入 x 取对数得到新变量 y , 然后求出变量 y 分布的平均值 $\overline{\ln x}$ 和方差 σ_m , 再进行 $u = (y - \overline{\ln x})/\sigma_m$ 的归一化处理, 最后将输出 u 加到门限比较器, 即可实现恒虚警处理。图 7.38 为对数—正态分布杂波恒虚警率处理的原理图。

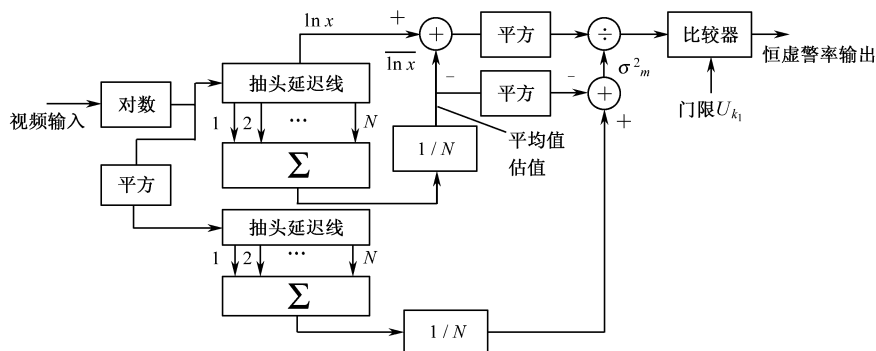


图 7.38 对数—正态分布杂波恒虚警率处理的原理图

2. 有序统计 CFAR 检测器

有序统计 CFAR 检测器即为 CA-CFAR 检测器, 在均匀杂波背景下才有良好的检测性能。但在非均匀杂波背景下, 其性能会因边缘效应和多目标抑制效应明显变坏。针对杂波边缘这种典型的非均匀杂波背景提出选大的改进型, 但它同样只是在与设计要求相吻合的杂波背景下才能取得良好的性能, 一旦杂波背景发生变化, 它们的性能会严重恶化。因此针对这种情况, 又设计出一种对杂波环境具有较强稳定性的参量型 CFAR 检测器—有序统计 CFAR(OS-CFAR)检测器, 原理框图如图 7.39 所示。其基本原理简单明确: 将参考窗内的采样值 $x(1)$, $x(2), \dots, x(n)$ 按大小排序, 得到有序统计量 $x(1) \geq x(2) \geq x(3) \geq \dots \geq x(n)$, 从中合理地取出第 k 个值 $x(k)$ 作为杂波功率的估计, 构成自适应门限 $U_T(k)$ 实现 CFAR 检测。OS-CFAR 和 CA-CFAR 的根本区别在于估计杂波功率的方法。OS 以有序统计量中某个 $x(k)$ 作为杂波功率的估计, 使其自适应门限只对 $x(k)$ 这个样本有较强的依赖, 对参考窗内其他的样本值有较

少的依赖,所以杂波环境的变化对 OS 影响较小。CA-CFAR 的自适应门限为 $U_T \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)$, 它受参考窗内的所有参考单元的制约,杂波环境的变化对它影响也大。应当指出,图 7.39 所示有序统计 CFAR 处理适用于瑞利杂波情况,但这一方法也可用于其他分布杂波的功率估计。

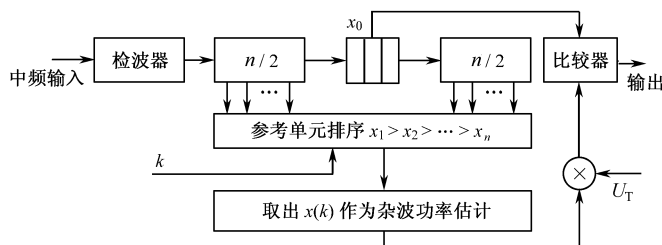


图 7.39 有序统计 CFAR 处理原理框图

3. 韦伯尔分布

韦伯尔分布杂波模型比瑞利和对数—正态模型更能在更宽广的杂波环境中精确地表示实际的杂波分布,并且,适当地调整韦伯尔分布的参数,能够使它成为瑞利分布或接近于对数—正态分布。通常,使用高分辨率的雷达,在低入射角的情况下,海浪杂波能够用韦伯尔分布精确地描述,地物杂波也能够用韦伯尔分布来描述。

设 x 代表杂波回波的包络振幅,则 x 的韦伯尔分布为

$$p(x | H_0) = \begin{cases} \frac{n' x^{n'-1}}{v_x^{n'}} \exp \left[- \left(\frac{x}{v_x} \right)^{n'} \right], & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (7-65)$$

式中, v_x 是分布的中值,它是分布的尺度(比例)参数; n' 是分布的形状(斜度)参数。 n 的取值范围一般为 $0 < n' \leq 2$ 。

显然,韦伯尔分布比瑞利分布复杂。瑞利分布只有一个表示杂波强度的尺度参数 σ ,在尺度参数 σ 一定时,分布的函数也就确定了。韦伯尔分布像对数—正态分布一样,也是一个 v_x 和 n 的双参数分布的函数,除尺度参数外,还有形状参数,它们共同决定分布的函数。

韦伯尔分布杂波的恒虚警处理是以 v_x 和 n' 为参变量进行的,如果把韦伯尔分布的形状参数 n' 固定为 2,并把尺度参数 v_x 的平方 v_x^2 改写成 $2\sigma^2$,则式(7-65)变成

$$p(x | H_0) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp \left(- \frac{x^2}{\sigma^2} \right), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (7-66)$$

这就是瑞利分布。所以,瑞利分布是韦伯尔分布的特例。但是如果把韦伯尔分布杂波输入对瑞利分布杂波具有恒虚警率性能的单元平均恒虚警率电路,其结果如图 7.40 所示。当形状参数 n' 为不同值时,虚警概率有很大的差别,其中虚线是瑞利分布杂波的理论结果,如果取 $n' = 1$,并把 v_x 改写成 σ^2 ,则式(7-65)变成

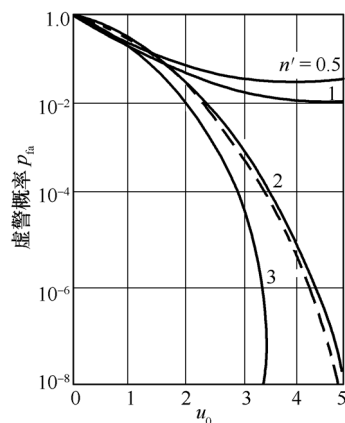


图 7.40 输入韦布尔杂波时,单元平均恒虚警率处理的虚警概率

$$p(x | H_0) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x}{\sigma^2}\right), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (7-67)$$

这就是指数分布。

对韦布尔分布杂波进行恒虚警率处理,也采用归一化的方法。首先令 $y = \ln x$, 则得

$$p(y | H_0) = \frac{n'}{v_x^n} \exp(n'y) \exp\left[-\frac{\exp(n'y)}{v_x^n}\right] \quad (7-68)$$

其均值和方差分别为

$$E(y) = m_y = -\frac{1}{n}(\gamma - \ln v_x^n) \text{ 和 } \text{Var}(y) = \sigma_y^2 = \frac{\pi^2}{6n^2} \quad (7-69)$$

然后对变量 y 进行归一化处理,即令

$$u = \frac{y - m_y}{\sigma_y} = -\frac{y + \frac{1}{n}(\gamma - \ln v_x^n)}{\frac{1}{n'} \frac{\pi}{\sqrt{6}}} \quad (7-70)$$

则得

$$p(u | H_0) = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}u - \gamma\right) \exp\left[-\exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}u - \gamma\right)\right] \quad (7-71)$$

可见,韦布尔分布杂波经取对数和归一化处理后,所得变量 u 的概率密度与函数 v_x 和 n' 均无关,从而实现了杂波的恒虚警率处理。如果把归一化的输出加到门限为 u_T 的检测器上,其虚警概率为

$$\begin{aligned} P_{fa} &= \int_{u_T}^{+\infty} \frac{\pi}{\sqrt{6}} \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}u - \gamma\right) \exp\left[-\exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}u - \gamma\right)\right] du \\ &= \exp\left[-\exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}u_T - \gamma\right)\right] \end{aligned} \quad (7-72)$$

从上面的分析可知,对韦布尔分布杂波的恒虚警率处理与同对数—正态分布杂波的恒虚警率处理是一样的,可以证明,韦伯尔杂波恒虚警率处理器具有图 7.34 所示类似的结构。但应注意,为了满足设定的虚警概率要求,两种分布杂波下的检测门限值通常是不一样的。

7.6.4 时间平均 CFAR^{[12]、[13]}

杂波图把雷达观测区域在坐标内或矩形网络上分成距离—方位单元。在每个杂波图单元中存储的杂波用来为它的距离和方位确立门限值,因此,它是一种 CFAR 形式。

每个杂波图单元的大小等于或大于雷达分辨力。在杂波图的每个距离—方位单元上,与单元中杂波幅度成比例的一个数字存储在图的内存中。因为杂波会随时间变化,在每个单元中的杂波值通过平均大量的扫描(例如 5~10 次扫描)来实现周期性更新。扫描的次数越多,杂波的估计精度越高,损失越少,而且目标在单元移动时带来的影响越小。另一方面,平均时间(扫描次数决定的)应该比移动杂波(雨或者金属箔)在单元内的有限驻留时间短。短的平均时间也使门限值可以在目标通过单元后的几次扫描中恢复到它的适当状态。

随着数字处理和大存储能力的出现,在杂波图中存储大量的数据成为可能,其中,可对几次天线扫描的每个分辨单元中的干扰进行平均。是在几次扫描期间观察单元本身,并设置适当的门限而不必考虑相邻的单元,而不是对相邻的单元进行平均来估计检测单元的干扰电平。这对地杂波特别有好处,因为从一个单元到下一个单元的杂波幅度空间相关很小。很显然,该技术对 ECM 而言是不适当的,因为 ECM 在单次扫描期间可能会发生变化。此外,除非采用高的空间分辨力或长的扫描周期,否则,时间平均技术会导致慢速运动目标的抑制。

与 CA CFAR 相比,杂波图 CFAR 的优点是:它不受非均匀杂波(边缘效应)影响。当慢速目标在单元内停留太长而影响门限值时,杂波图 CFAR 的响应将缩减。这种影响可以通过将使杂波图单元大于协达分辨率单元来减小。增加杂波图单元的尺寸不应太过分,因为它减小杂波间的可见性。

7.6.5 非参量 CFAR

前面讨论的各种恒虚警率处理都属于参量型的,即干扰的分布已知,只有未知参数需要估计,并根据估计的结果进行归一化处理,实现信号的恒虚警率检测。如果干扰分布未知,则解决出现非瑞利干扰时 CFAR 的另一种方法是采用非参量 CFAR(又称分布自由检测)处理,实现信号的恒虚警率检测。

这种技术同样存在严重损耗的问题,但以简单的中值检波器形式得到了应用。中值检波器就是一种具有第二门限 $l=n/2$ 的二进制积累器。由于这个值偏离热噪声最佳检测值不远,所以检测性能不会大大下降。问题是要获得足够的独立杂波采样数而不延长积累时间。其他非参量 CFAR 也得到有效的应用,但所得性能与常规方法所得的性能差别不大。一般而言,在不同环境中 CFAR 越稳定,目标检测损耗就越大。

有关非参量 CFAR 内容在第 5 章中进行过专门的介绍,在此不再讨论。

本章小结

雷达的基本任务是发现目标并测定其坐标,在伴有各种干扰的条件下发现目标的问题属于信号检测的范畴。采用什么样的方式来处理雷达信号和噪声(或干扰)的混合波形,使检测性能最好,这是需要解决的问题,也是本书讨论的核心问题之一。

本章通过样本检测法,多脉冲积累和各种恒虚警率处理方法,较全面地介绍了雷达中信号检测的全过程,从中使读者加深对信号检测理论的理解。由于篇幅限制,本章仅做了简要介绍,若要深入了解,读者可参考雷达专业书籍。

习 题 七

7.1 平稳瑞利杂波环境中,采用对数单元平均恒虚警率处理,归一化输出 u 的概率密度函数为

$$p(u|H_0) = \frac{2}{a} \exp\left(\frac{2}{a}u - \gamma\right) \exp\left[-\exp\left(\frac{2}{a}u - \gamma\right)\right]$$

其中, γ 为欧拉常数; a 是对数接收机的常参数。若检测门限为 u_T , 求虚警概率 P_{fa} 的表示式。

7.2 对瑞利杂波干扰,现采用选大值对数单元平均恒虚警率处理,设检测单元前后参考单元数各为 $n/2=4$ 。如果对数接收机输出的雷达目标信号是如题 7.41 图(a)所示的理想波形,目标信号宽度所占距离单元数为 13。请分别画出检测单元两侧不加保护单元、各加 1 个、2 个或 4 个保护单元时,恒虚警率处理后的输出信号波形。

7.3 韦布尔分布杂波的概率密度函数为

$$p(x|H_0) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{v_x^n} \exp\left[-\left(\frac{x}{v_x}\right)^n\right], & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(1) 证明其恒虚警率处理原理框图如题 7.42 图所示。

(2) 若恒虚警率处理后的检测门限为 u_T , 求虚警概率 P_{fa} 的表示式。

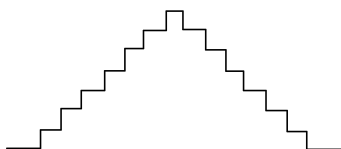


图 7.41 雷达目标信号的理想波形及恒虚警率处理后的波形

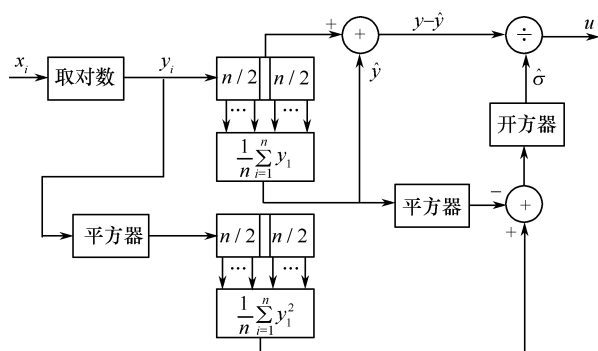


图 7.42 韦布尔分布杂波和对数-正态分布杂波恒虚警率处理原理框图

7.4 韦布尔分布的概率密度函数为

$$p(x|H_0) = \begin{cases} \frac{n' x^{n'-1}}{v_x^n} \exp\left[-\left(\frac{x}{v_x}\right)^n\right], & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

若将其输入对平稳瑞利杂波具有恒虚警率性能的单元平均处理电路中, 证明其虚警概率 p_{fa} 的理论值 (参考单元 $N \rightarrow \infty$) 为

$$P_{fa} = \exp\left\{-\left[u_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n\right\}$$

式中, u_T 为检测门限, n' 为形状参数。提示: 首先利用定积分公式

$$\int_0^{+\infty} x^p \exp(-x^q) dx = \frac{1}{q} \Gamma\left(\frac{1+p}{q}\right)$$

求出韦布尔分布杂波的均值 $E(x|H_0)$, 然后进行归一化处理, 即令 $u = x/E(x|H_0)$, 结果再与检测门限 u_T 比较。

第 8 章 信号参量估计

8.1 概述

在前面各章中,主要讨论的是信号检测问题,即解决信号是否存在或者是几个信号中的哪一个信号存在的问题。然而,在许多场合,信号参量的测量是至关重要的。因为所要传递的信息是调制在信号的某些参量上,而要获得这些信息就必须测定信号的参量。雷达、通信等系统就是如此。

在第 1 章中,讨论了信号统计估计基本理论,提出了参量估计性能标准;解答了如何采用不同的准则最佳地利用观测矢量 \mathbf{x} 来构成估计量。本章是将第 1 章中的统计估计基本理论应用于信号参量估计。

在信号处理领域中,所谓信号参量的估计,就是利用接收到的混合波形(或者它的独立采样值)来确定信号的未知参量(可以是确定性的量,也可以是随机变量)。具体地说,如第 1 章中式(1-69)所列,接收到的信号和噪声的混合波形为

$$x(t) = s(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) + n(t) = s(t, \boldsymbol{\alpha}) + n(t) \quad (8-1a)$$

式中, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T$ 表示待估计的信号参量矢量。参量估计便是按照某种最佳估计准则利用 $x(t)$ 构造一个观测量函数 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ 作为对参量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的估计。采用的最佳估计准则不同,函数 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ 的形式便可能不同,因此存在各种不同的估计量。

为了对信号的参数做出估计,对观测信号作独立采样,得

$$x_k = s_k(\boldsymbol{\alpha}) + n_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (8-1b)$$

式中, x_k 是第 k 次观测值; $\boldsymbol{\alpha}$ 是被估计量; n_k 是第 k 次观测噪声。现在的问题是根据 n 次观测值

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

的观测量函数 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ (可简记为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$) 作为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的估计值。

第 1 章中已经讨论了几种重要的最佳估计准则,即几种构造估计量的基本方法。例如,利用使平均风险为最小的准则,可以构造贝叶斯估计量;利用使似然函数为最大的准则,可以构造极大似然估计量,等等。其中最直观的一种,称为矩法或数字特征法,它是一种经典估计方法,现举例说明。

【例 8.1】 假定接收波形可写为 $x(t) = s(t, \alpha) + n(t) = a + n(t)$ ($0 \leq t \leq T$) 在时间间隔 $(0, T)$ 上它是一个幅度为 a 的矩形脉冲信号和零均值高斯白噪声样本函数的混合,试利用矩法估计该脉冲的幅度,并判断其估计性能。

解:假设(1)采样值可写为

$$x_k = a + n_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

x_k 是 $x(t)$ 的第 k 次独立采样值,或称为观测样本; n_k 为第 k 次观测噪声样本, n 为样本数。现在的任务是利用 x_k 估计信号的幅度 a 。因为噪声是零均值的,容易看出 a 就是观测波形 $x(t)$ 的均值,根据矩法,应当用样本均值作为 a 的估计量,于是有

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

(2) \hat{a} 的期望为

$$E[\hat{a}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + w_i)\right] = a + E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i\right]$$

由于噪声样本 w_i 是零均值的, 所以上式第二项等于零, 于是

$$E[\hat{a}] = a$$

故估计量 \hat{a} 是无偏的。另一方面, 估计误差为

$$\epsilon = \hat{a} - a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i$$

显然, ϵ 的方差为

$$\text{Var}[\epsilon] = \sigma_w^2/n$$

式中, σ_w^2 是噪声样本的方差。由于当 n 趋于无穷时, 估计误差的方差趋于零。因此样本均值估计量 \hat{a} 是均匀一致的。

(3) 观测样本 $x_i = a + w_i$ 的均值估计量为

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

其中, 噪声样本 w_i 是零均值的高斯随机变量, 因而观测样本 x_i 是均值为 a 的高斯随机变量。样本均值估计量 \hat{a} 也是高斯分布的。

由于 x_i 是独立样本, 因此似然函数 $p(\mathbf{x}|\mathbf{a})$ 是 n 个一维高斯密度函数的连乘, 即

$$p(\mathbf{x}|a) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi\sigma_w^2} \right)^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_w^2}(x_i - a)^2\right]$$

考虑到 \hat{a} 为高斯分布, 则根据公式

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) = p(\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}) \cdot h(\mathbf{x})$$

可将 $p(\mathbf{x}|a)$ 分解为

$$p(\mathbf{x}|a) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_w^2/n} \right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(\hat{a} - a)^2}{2\sigma_w^2/n}\right] \times \left(\frac{2\pi\sigma_w^2}{n} \right)^{1/2} \left\{ \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi\sigma_w^2} \right)^{1/2} \exp\left[(n\hat{a}^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2)/2\sigma_w^2\right] \right\}$$

式中, 第一个因子是给定 a 时, 估计量 \hat{a} 的概率密度, 第二个因子显然与 a 无关, 因此 \hat{a} 是充分估计量。

(4) 已证得 \hat{a} 是无偏的, 现在只需证明 \hat{a} 满足式(1-97)即可。如前, 似然函数为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi\sigma_w^2} \right)^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_w^2}(x_i - a)^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_w^2} \right)^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2\right] \end{aligned}$$

对数似然函数为

$$\ln p(\mathbf{x}|\mathbf{a}) = \ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma_w^2}\right)^{n/2} - \frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$$

上式对 a 求导, 得

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\mathbf{a})}{\partial a} = \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a) = \frac{n}{\sigma_w^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - a \right)$$

$$= \frac{n}{\sigma_w^2} (\hat{a} - a)$$

这里, $\frac{n}{\sigma_w^2}$ 就是比例系数 $h(a)$, 显然 \hat{a} 满足式(1-97), 故样本均值估计量是优效估计量。

本章中, 首先讨论在加性高斯白噪声中信号参量的估计, 然后推广到高斯色噪声的情况。

8.2 在白色高斯信道中单参量信号估计⁽²⁾

假定信号 $s(t, \alpha)$ 在白色高斯信道内传输, 则到达接收端的波形将被噪声污染后的观测信号, 即

$$x(t) = s(t, \alpha) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8-1c)$$

式中, $s(t, \alpha)$ 中的参量 α 是随机变化或非随机的待估计量, $n(t)$ 是功率频谱密度为 $N_0/2$ 的白色高斯噪声。

现在采用最大似然估计的方法。给定 α 时 $x(t)$ 的条件概率密度函数 $p(x|\alpha)$ 称为似然函数(likelihood function), 由第2章中式(2-156)有

$$p(x|\alpha) = F \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)]^2 dt \right\} \quad (8-2a)$$

式中

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi N_0} \right)^{n/2}$$

对数似然函数为

$$\ln p(x|\alpha) = \ln F - \frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)]^2 dt \quad (8-2b)$$

对 α 求导, 得

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln p(x|\alpha) = \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)] \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt \quad (8-3)$$

于是 α 的极大似然估计量 $\hat{\alpha}_{ML}$ 是下面方程的解

$$\int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)] \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt \bigg|_{\alpha = \hat{\alpha}_{ML}(x)} = 0 \quad (8-4)$$

为了计算估计的克拉默-拉奥界限, 将式(8-3)对 α 再求导一次, 得

$$\frac{\partial^2 \ln p(x|\alpha)}{\partial \alpha^2} = \frac{-2}{N_0} \int_0^T \left[\frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 dt + \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)] \frac{\partial^2 s(t, \alpha)}{\partial \alpha^2} dt$$

现在来求上式的期望。由于期望是关于 x 的积分运算, 而上式第一项与 x 无关, 故其期望等于本身; 考虑到 $x(t) - s(t, \alpha) = n(t)$, 而 $n(t)$ 是零均值的, 故第二项的数字期望为零, 于是

$$E \left\{ \frac{\partial^2 \ln p(x|\alpha)}{\partial \alpha^2} \right\} = \frac{-2}{N_0} \int_0^T \left[\frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 dt \quad (8-5)$$

若 $\hat{\alpha}_{ML}$ 是无偏估计, 则克拉默-拉奥界限不等式为

$$\sigma_{\hat{\alpha}_{ML}}^2 \geq \frac{-1}{E \left\{ \frac{\partial^2 \ln p(x|\alpha)}{\partial \alpha^2} \right\}} = \frac{1}{\frac{2}{N_0} \int_0^T \left[\frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 dt} \quad (8-6)$$

利用此式可以确定零均值高斯白噪声下波形已知信号的未知参量估计量 $\hat{\alpha}_{ML}$ 的克拉默-拉奥界限。

当信号参量 α 是已知先验概率的随机变量时, 可采用 Bayes 估计方法。在高斯信道中它等效于最大后验估计。因此可根据式(1-97)来求解估计量 $\hat{\alpha}_{MAP}(x)$ 。并由式(1-99)知, 在 $\alpha = \hat{\alpha}_{MAP}(x)$ 时, 有

$$\frac{\partial \ln p(\alpha|x)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \ln p(x|\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \ln p(\alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad (8-7)$$

将式(8-3)代入后得

$$\left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \boldsymbol{\alpha})] \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} dt + \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right\}_{\boldsymbol{\alpha}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}}} = 0 \quad (8-8)$$

当先验概率分布比较均匀时,上式中第二项可以忽略,即近似为

$$\left\{ \int_0^T [x(t) - s(t, \boldsymbol{\alpha})] \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} dt \right\}_{\boldsymbol{\alpha}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{ML}}} = 0 \quad (8-9)$$

此时,最大后验估计就简化为式(8-4)的最大似然估计。

在第1章中已介绍参量估计的若干准则,在此不再重述,仅举例来说明。

【例 8.2】 分析加性噪声中随机参数的估计问题。观测方程为

$$x_k = \alpha + n_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

式中, n_k 是均值为零、方差为 σ_n^2 的独立同分布高斯随机噪声,假设被估计量 α 也是均值为零、方差为 σ_a^2 的高斯随机参量。求 α 的最小均方误差估计。^{[9],[10]}

解: 根据题意,以 α 为条件的观测量 \mathbf{x} 的条件概率密度函数为

$$p(\mathbf{x} | \alpha) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \alpha)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

而随机参量 α 的概率密度函数为

$$p(\alpha) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_a^2} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{\alpha^2}{2\sigma_a^2} \right]$$

为了求参量 α 的最小均方误差估计,首先要求得后验概率密度函数 $p(\alpha | \mathbf{x})$, 因为

$$p(\alpha | \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | \alpha) p(\alpha)}{p(\mathbf{x})}$$

注意到 $p(\alpha | \mathbf{x})$ 是给定 \mathbf{x} 时, α 的条件概率密度函数,于是,对于 $p(\alpha | \mathbf{x})$ 而言, $p(\mathbf{x})$ 相当于使

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\alpha | \mathbf{x}) d\alpha = 1$$

的归一化常数,因此

$$\begin{aligned} p(\alpha | \mathbf{x}) &= \frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_a^2} \right)}{p(\mathbf{x})} \exp \left[- \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \alpha)^2}{2\sigma_n^2} - \frac{\alpha^2}{2\sigma_a^2} \right] \\ &= K_1(\mathbf{x}) \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left[\frac{\sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2x_k\alpha + \alpha^2)}{\sigma_n^2} + \frac{\alpha^2}{\sigma_a^2} \right] \right\} \\ &= K_2(\mathbf{x}) \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left[\frac{n\sigma_a^2 + \sigma_n^2}{\sigma_a^2\sigma_n^2} \alpha^2 - \frac{2\alpha \sum_{k=1}^n x_k}{\sigma_n^2} \right] \right\} \\ &= K_2(\mathbf{x}) \exp \left\{ - \frac{n\sigma_a^2 + \sigma_n^2}{2\sigma_n^2\sigma_a^2} \left[\alpha^2 - \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_n^2/n} 2\alpha \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \right] \right\} \\ &= K_3(\mathbf{x}) \exp \left\{ - \frac{1}{2\sigma_m^2} \left[\alpha - \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_n^2/n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \right]^2 \right\} \\ K_1(\mathbf{x}) &= \frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_a^2} \right)^{1/2}}{p(\mathbf{x})} \end{aligned}$$

式中

$$K_2(\mathbf{x}) = K_1(\mathbf{x}) \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k^2 \right]$$

$$K_3(\mathbf{x}) = K_2(\mathbf{x}) \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma_m^2} \left[\frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_n^2/n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \right]^2 \right\}$$

都是与 α 无关的项,而

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma_a^2 \sigma_n^2}{n\sigma_a^2 + \sigma_n^2}$$

可见,后验概率密度函数 $p(\alpha|\mathbf{x})$ 是高斯型的,因此由式(1-116)可求得最小均方误差估计 $\hat{\alpha}_{\text{MS}}$ 为

$$\hat{\alpha}_{\text{MS}}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_n^2/n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)$$

估计量 $\hat{\alpha}_{\text{MS}}(\mathbf{x})$ 的均方误差为

$$E\{[\alpha - \hat{\alpha}_{\text{MS}}(\mathbf{x})]^2\} = \frac{\sigma_a^2 \sigma_n^2}{n\sigma_a^2 + \sigma_n^2}$$

由于后验概率密度函数 $p(\alpha|\mathbf{x})$ 是高斯型的,所以 $p(\alpha|\mathbf{x})$ 的最大值正好在条件均值处,且条件中位数等于条件均值,因此有

$$\hat{\alpha}_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = \hat{\alpha}_{\text{MED}}(\mathbf{x}) = \hat{\alpha}_{\text{MS}}(\mathbf{x}) = \hat{\alpha}_{\text{B}}(\mathbf{x})$$

再来考察观测 \mathbf{x} 和先验概率密度函数 $p(\alpha)$ 对估计量的影响。

若有 $\sigma_a^2 \ll \sigma_n^2/n$, 则

$$\hat{\alpha}_{\text{B}}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_n^2/n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \xrightarrow{\sigma_a^2 \ll \sigma_n^2/n} 0$$

可见估计值趋近参量的先验平均值(α 的平均值为零)。这时先验知识比观测值更有用。

若有 $\sigma_a^2 \gg \sigma_n^2/n$, 则

$$\hat{\alpha}_{\text{B}}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_n^2/n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \xrightarrow{\sigma_a^2 \gg \sigma_n^2/n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

此时先验知识几乎没有价值,估计量主要决定观测数据。在极限情况下 $\hat{\alpha}_{\text{B}}(\mathbf{x})$ 刚好是 x_k 的算术平均值。

下面分别用 α 代表信号幅度、相位、频率和时延等参量来分析具体的估计问题。

8.2.1 信号幅度估计

当随机或未知参量反映在幅度上时,信号波形可写成

$$s(t, \alpha) = As(t) \quad (8-10)$$

式中, $s(t)$ 是确知函数, $\alpha = A$ 是待估值的参量。因此它相当于线性调制系统中的解调问题,而 $s(t, \alpha)$ 就是在信道中传输的已调制信号。

将式(8-10)代入式(8-9)后可得最大似然估计为下式的解,即

$$\left\{ \int_0^T [x(t) - As(t)]s(t) dt \right\}_{A=\hat{A}_{\text{ML}}(\mathbf{x})} = 0 \quad (8-11)$$

或者

$$\hat{A}_{\text{ML}}(\mathbf{x}) = \int_0^T x(t)s(t) dt / \int_0^T s^2(t) dt \quad (8-12)$$

假定 $s(t)$ 是归一化信号,即 $\int_0^T s^2(t) dt = 1$, 则得归一化后的最大似然估计值为

$$\hat{A}_{\text{ML}}(\mathbf{x}) = \int_0^T x(t)s(t)dt \quad (8-13)$$

它相当于信号检测问题中的统计检验量 I 。

将 $x(t) = As(t) + n(t)$ 代入后得

$$\hat{A}_{\text{ML}}(\mathbf{x}) = \int_0^T [As(t) + n(t)]s(t)dt = A + \int_0^T n(t)s(t)dt \quad (8-14)$$

因为式中 A 在观测时间 T 内是不变的(尽管它未知), $s(t)$ 是确知函数, $n(t)$ 是高斯分布, 因此 $\hat{A}_{\text{ML}}(\mathbf{x})$ 一定也是高斯分布。它的平均值为

$$E[\hat{A}] = E\{\hat{A}_{\text{ML}}(\mathbf{x})\} = E\left[\int_0^T [As(t) + n(t)]s(t)dt\right] = A \quad (8-15)$$

因此它是无偏估计。并且其估计方差为

$$\text{Var}[\hat{A}_{\text{ML}}(\mathbf{x}) - A] = E\left\{\left[\int_0^T n(t)s(t)dt\right]^2\right\} = \int_0^T \int_0^T E\{n(t)n(\tau)\}s(t)s(\tau)dtd\tau \quad (8-16)$$

对于白噪声 $n(t)$, 有 $E\{n(t)n(\tau)\} = \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)$, 代入式(8-16)得

$$\sigma_A^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T s^2(t)dt = \frac{N_0}{2} \quad (8-17)$$

另一方面, 由于 $\frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} = s(t)$, 则由式(8-6)可得

$$\sigma_A^2 \geq \left\{ \frac{N_0}{2} \int_0^T \left[\frac{\partial As(t)}{\partial A} \right]^2 dt \right\}^{-1} = \frac{N_0}{2} \quad (8-18a)$$

因此, \hat{A}_{ML} 的克拉默-拉奥界限等于 $N_0/2$ 。或者由方差的定义, 有

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= \text{Var}(\hat{A}_{\text{ML}} - A) = E[(A - \hat{A}_{\text{ML}})^2] = E\left[\int_0^T n(t)s(t)dt \int_0^T n(u)s(u)du\right] \\ &= \int_0^T s(t) \left[\int_0^T E[n(t)n(u)]s(u)du \right] dt = \frac{N_0}{2} \end{aligned} \quad (8-18b)$$

故 A 的极大似然估计 \hat{A}_{ML} 是达到最小方差限的无偏估计, 因而 \hat{A}_{ML} 是信号振幅的优效估计。

由式(8-13), 可以画出最佳接收机的结构如图 8.1 所示。



图 8.1 幅度估值最佳接收机

由图 8.1 可见, 其中图 8.1(a) 就是一个相关器, 而图 8.1(b) 是对 $s(t)$ 匹配的滤波器, 它们在性能上是等效的。

如果已知信号参量 A 的先验分布是高斯型的, 它的方差为 σ_A^2 , 均值为零, 即

$$p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A^2}} \exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma_A^2}\right\} \quad (8-19)$$

将它代入式(8-8)后得

$$\left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t)dt - \frac{2}{N_0}A - \frac{A}{\sigma_A^2} \right\}_{A=\hat{A}_{\text{ML}}(\mathbf{x})} = 0 \quad (8-20)$$

因此, 它的解为

$$\hat{A}_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = \frac{2\sigma_A^2}{2\sigma_A^2 + N_0} \int_0^T x(t)s(t)dt \quad (8-21)$$

这就是最大后验估计量。

式(8-21)与式(8-13)相比就差一个系数 $2\sigma_A^2/(2\sigma_A^2 + N_0)$ ，因此 $\hat{A}_{\text{ML}}(\mathbf{x})$ 所具有的性质对 $\hat{A}_{\text{MAP}}(\mathbf{x})$ 也可适用。并且要根据式(8-21)画出最大后验幅度估计的接收机如图 8.2 所示。

由图 8.2 可见，它与图 8.1 基本相同，其区别就在于增益不一样，前者为 $2\sigma_A^2/(2\sigma_A^2 + N_0)$ ，后者为 1。

但是这两种估计方法的估计方差是不同的。在最大后验估计时其方差为

$$\text{Var}[\hat{A}_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) - kA] = k^2 N_0 / 2 \quad (8-22)$$

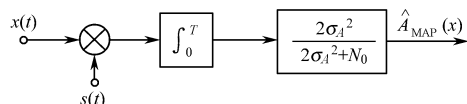


图 8.2 最大后验幅度估计接收机

式中， $k = E\{\hat{A}_{\text{MAP}}(\mathbf{x})\} = 2\sigma_A^2/(2\sigma_A^2 + N_0)$ ，它小于

1。因此，式(8-22)要比式(8-18)小得多，并且 N_0/σ_A^2 值越大就越显著。只有在信噪比很大的情况下它们才比较接近。这说明最大后验估计是利用了信号参量的先验知识，因此其估计质量有所提高。

另外，以上都是在假定 $\int_0^T s^2(t)dt = 1$ ，即归一化的条件下推导的。考虑到接收到的信号能量为

$$E_s = E\{[s(t, A)]^2\} = E\{[As(t)]^2\} \quad (8-23a)$$

如果 A 是非随机未知参量，则得

$$E_s = A^2 E\{s^2(t)\} = A^2 E'_s \quad (8-23b)$$

式中， $E'_s = E\{s^2(t)\} = \int_0^T s^2(t)dt$ 是单位幅度时的平均能量。因此式(8-12)变成

$$\hat{A}_{\text{ML}}(\mathbf{x}) = \frac{A^2}{E_s} \int_0^T x(t)s(t)dt \quad (8-24)$$

相应的估计方差为

$$\text{Var}[\hat{A}_{\text{ML}}(\mathbf{x}) - A] = \frac{N_0}{2E'_s} = \frac{N_0 A^2}{2E_s} \quad (8-25)$$

如果 A 是高斯型随机变量，则由式(8-22)得信号能量为

$$E_s = E\{A^2\}E'_s = \sigma_A^2 E'_s \quad (8-26)$$

因此式(8-21)将变成

$$\hat{A}_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = \frac{2\sigma_A^2}{2\sigma_A^2 E'_s + N_0} \int_0^T x(t)s(t)dt \quad (8-27)$$

相应的估值方差为

$$\text{Var}[\hat{A}_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) - kE'_s A] = \frac{k^2 N_0}{2E'_s} = \frac{k^2 N_0 A^2}{2E_s} \quad (8-28)$$

由式(8-25)和式(8-28)可见，两种准则下估计方差均与 E_s/N_0 成反比，因此为了减小估计方差还必须提高信噪比。

【例 8.3】 利用离散观测样本估计信号的振幅。设观测样本为

$$x_k = As_k + n_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (8-29)$$

式中， s_k 是确知信号的样本； n_k 是均值为零，方差为 σ_n^2 的高斯白噪声样本； A 为未知的非随机参

量, A 和 n_k 统计独立。要求根据观测样本 x_k 对系数 A 做出估计 A_{ML} 。

解: 利用最大似然法构造估计。由题设条件, $x(t)$ 采样后, 给定 A 时 \mathbf{x} 的条件概率密度即似然函数为

$$p(x_1, \dots, x_n | A) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - As_k)^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (8-30a)$$

对数似然函数为

$$\ln p(x_1, \dots, x_n | A) = \ln \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} - \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - As_k)^2}{2\sigma_n^2} \quad (8-30b)$$

由于指数函数是单调增函数, 所以求 $p(x_1, \dots, x_n | A)$ 的峰值位置, 可以转化为求 $\ln p(x_1, \dots, x_n | A)$ 的峰值位置。所以式(8-30b)对 A 求导, 并令结果等于零, 得

$$-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n 2(x_k - as_k)(-s_k) = 0$$

所以 A 的极大似然估计是

$$\hat{A}_{\text{ML}} = \sum_{k=1}^n x_k s_k / \sum_{k=1}^n s_k^2 = C \sum_{k=1}^n x_k s_k$$

式中, $C = \left(\sum_{k=1}^n s_k^2 \right)^{-1}$ 为一常数。显然, 此时 \hat{A}_{ML} 的表达式与式(8-13)中的振幅估计是一致的,

因为和式 $\sum_{k=1}^n x_k s_k$ 可以看做相关积分的离散形式。也就是说, 可以用匹配滤波器或相关器构成最佳的幅度估计器。

不难证明估值 \hat{A}_{ML} 也是无偏和优效的。把这个证明留给读者作为练习。

在上述模型中, 白噪声的方差已知, 也可以建立白噪声方差未知的模型, 同时估计信号幅度和噪声方差。对应例[8.2]各式, 可列出如下:

$$p(x_1, \dots, x_n | A, \sigma_n^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - As_k)^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (8-31a)$$

$$\ln p(x_1, \dots, x_n | A, \sigma_n^2) = \ln \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} - \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - As_k)^2}{2\sigma_n^2} \quad (8-31b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \ln p(x_1, \dots, x_n | A, \sigma_n^2) &= \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n 2(x_k - As_k) \cdot s_k = 0 \end{aligned} \right. \quad (8-32a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma_n^2} \ln p(x_1, \dots, x_n | A, \sigma_n^2) &= \frac{1}{2(\sigma_n^2)^2} \sum_{k=1}^n (x_k - As_k)^2 - \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_n^2} = 0 \end{aligned} \right. \quad (8-32b)$$

所以, 得

$$\hat{A}_{\text{ML}} = \sum_{k=1}^n x_k s_k / \sum_{k=1}^n s_k^2 \quad (8-33)$$

$$\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{A}_{\text{ML}} s_k)^2 \quad (8-34)$$

可以看出, 可先估计信号幅度, 再估计噪声方差来实现。

8.2.2 信号相位估计

假定在信道内传输的信号是

$$s(t, \theta) = A \sin(\omega_0 t + \theta) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8-35)$$

式中, 振幅 A 和角频率 ω_0 为常数, 但参考相位 θ 是未知的或随机参量。此时最似然相位估计可由式(8-9)来求解, 即

$$\left\{ \int_0^T [x(t) - A \sin(\omega_0 t + \theta)] A \cos(\omega_0 t + \theta) dt \right\}_{\theta=\hat{\theta}_{ML}} = 0 \quad (8-36)$$

利用倍角公式 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, 通常满足 $\omega_0 T \gg 1$ 的条件, 容易计算上式左端第二个积分为零, 故上式第二项可以忽略不计。于是式(8-36)变成

$$A \int_0^T x(t) \cos(\omega_0 t + \hat{\theta}_{ML}) dt = 0 \quad (8-37)$$

利用三角公式 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, 将上式展开后得

$$\cos \hat{\theta}_{ML} \int_0^T x(t) \cos \omega_0 t dt = \sin \hat{\theta}_{ML} \int_0^T x(t) \sin \omega_0 t dt \quad (8-38)$$

因此相位估计量为

$$\hat{\theta}_{ML} = \arctan \left\{ \frac{\int_0^T x(t) \cos \omega_0 t dt}{\int_0^T x(t) \sin \omega_0 t dt} \right\} \quad (8-39)$$

这样, 信号相位的最大似然估计量 $\hat{\theta}_{ML}$ 可用正交双路相关器或正交双路匹配器加上 $\arctan(\cdot)$ 来实现。

如图 8.3 所示。

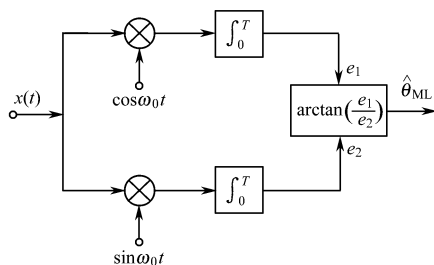


图 8.3 最大似然相位估值接收机

由图 8.3 可见, 它由两路相关器组成, 然后通过反正切函数输出。当然也可以用两路匹配滤波器来等效, 它们的冲激响应分别为 $\cos \omega_0(T-t)$ 和 $\sin \omega_0(T-t)$ 。因为反正切函数是多值函数, 因此相位估计量也是多值的, 但在 $-\pi \sim +\pi$ 范围内只有一个数值。

图 8.3 中两路相关器的输出分别为

$$e_1 = \int_0^T x(t) \cos \omega_0 t dt \quad \text{和} \quad e_2 = \int_0^T x(t) \sin \omega_0 t dt \quad (8-40)$$

它们是相互正交的高斯变量。

现分析相位估计的误差。根据式(8-40a)和(8-40b)可以求出它们的均值为

$$\bar{e}_1 = \frac{AT}{2} \sin \theta \quad \text{和} \quad \bar{e}_2 = \frac{AT}{2} \cos \theta$$

而其方差为

$$\sigma_{e_1}^2 = \sigma_{e_2}^2 = \frac{N_0 T}{4} = \sigma_n^2$$

式中, σ_n^2 是信道中的噪声功率(方差)。

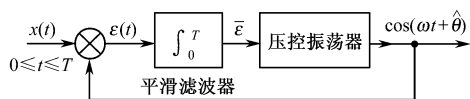


图 8.4 锁相环

相位估计器的第二种结构直接由式(8-37)得出, 这就是图 8.4 所示的锁相环。锁相环的作用是使压控振荡器的输出相位与混有噪声的接收信号的相位同步。压控振荡器的输出可以粗略看成是“干净的”

或不含噪声的, 因此它的输出相位便可以作为接收信号相位的估计, 或者说, 锁相环能够从噪声中提取接收信号的相位。下面对此做简要说明。

参看图 8.4, 假定 $x(t)$ 不含噪声(高信噪比情况接近这种理想模型), 即假定

$$x(t) \approx A \sin(\omega t + \theta)$$

相乘器的输出为

$$\epsilon(t) = A \sin(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \hat{\theta}) = \frac{A}{2} \sin(\theta - \hat{\theta}) + \frac{A}{2} \sin(2\omega t + \theta + \hat{\theta})$$

经积分器或平滑滤波器滤除 $\epsilon(t)$ 的高频项以后,得

$$\bar{\epsilon} = \int_0^T \epsilon(t) dt \approx \sin(\theta - \hat{\theta})$$

对于小相位差,有

$$\bar{\epsilon} \approx (\theta - \hat{\theta})$$

可见 $\bar{\epsilon}$ 代表误差信号。锁相环的作用就是要减小 $\bar{\epsilon}$ 并使 $\bar{\epsilon} \rightarrow 0$, 即使得 $\hat{\theta} \rightarrow \theta$ 。使 $\bar{\epsilon}$ 趋于零也就是使积分 $\int_0^T \epsilon(t) dt = \int_0^T x(t) \cos(\omega t + \theta) dt$ 趋于零,这正好就是式(8-37)所表示的运算。

相位估计的克拉默-拉奥界限可用式(8-6)计算。由式(8-35), $\frac{\partial s(t, \theta)}{\partial \theta} = A \cos(\omega t + \theta)$, 则

$$\int_0^T \left[\frac{\partial s(t, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 dt = \int_0^T A^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt = \frac{A^2}{2} T = E \quad (8-41)$$

E 为信号能量。将此结果代入式(8-6),得

$$\sigma_{\hat{\theta}_{ML}}^2 \geq \frac{1}{\frac{2}{N_0} \int_0^T \left[\frac{\partial s(t, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 dt} = \frac{N_0}{2E} \quad (8-42)$$

即 $\hat{\theta}_{ML}$ 的克拉默-拉奥界限为 $N_0/2E$ 。在高斯信噪比条件下,由于锁相环的作用是使 $\hat{\theta}_{ML} \rightarrow \theta$, 因

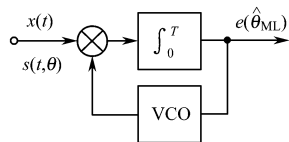


图 8.5 锁相环

而相位估计量是无偏的,还可证明 $\hat{\theta}_{ML}$ 是优效的,其方差等于克拉默-拉奥界限 $N_0/2E$ 。

采用锁相环估计信号的未知相位,在电子系统中已得到广泛应用。图 8.4 的锁相环也可用图 8.5 来表示。

以上都是假定信号相位 θ 是非随机未知参量,因此采用最大似然估计方法。如果 θ 是已知先验分布的随机变量,例如它的概率分布符合高斯型,并且其方差为 σ_θ^2 ,那么也可以采用最大后验估计,它是 Bayes 估计的一种应用。此时可根据式(8-8)求解

$$\left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - A \sin(\omega_0 t + \theta)] A \cos(\omega_0 t + \theta) dt - \frac{\theta}{\sigma_\theta^2} \right\}_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}} = 0 \quad (8-43)$$

$$\text{或者} \quad \frac{2A}{N_0} \int_0^T x(t) \cos(\omega_0 t + \hat{\theta}_{MAP}) dt = \frac{\hat{\theta}_{MAP}}{\sigma_\theta^2} \quad (8-44)$$

这个模型建立起来比较复杂,因此实际上应用不多。虽然用最大似然估值方法与最大后验估计方法相比会带来大一些估计误差,但前者实现起来容易,因此宁愿用牺牲先验知识的代价来换取技术和经济上的合理性。

【例 8.4】 利用对观测信号 $x(t)$ 采样,所得离散观测样本 $x_k (k=1, 2, \dots, n)$ 估计信号的相位 $\hat{\theta}_{ML}$ [18]。设接收输入为 $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) + n(t)$, A, ω_0 已知, θ 是随机变量, $n(t)$ 是均值为 0, 方差为 σ_n^2 的高斯白噪声, θ 和 $n(t)$ 统计独立,求 $\hat{\theta}_{ML}$ 。

解: 输入采样后的条件分布为

$$p(x_1, \dots, x_n | \theta) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - s_k)^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (8-45)$$

式中, $s_k = A \cos[\omega_0 k \Delta t + \theta]$ 。

$$\ln p(x_1, \dots, x_n | \theta) = -\frac{1}{2\sigma_n^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n x_k s_k + \sum_{k=1}^n s_k^2 \right) - \frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma_n^2) \quad (8-46)$$

因为信号 $s(t)$ 是正弦的, 所以有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n s_k^2 &= \sum_{k=1}^n \frac{A^2}{2} [1 + \cos(2k\omega_0 \Delta t + \theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} n + \frac{A^2}{4} \sum_{k=1}^n \{ e^{j(2k\omega_0 \Delta t + \theta)} + e^{-j(2k\omega_0 \Delta t + \theta)} \} \\ &= \frac{A^2}{2} n + \frac{A^2}{4} e^{j(2\omega_0 \Delta t + \theta)} \frac{1 - e^{j2n\omega_0 \Delta t}}{1 - e^{j2\omega_0 \Delta t}} + \frac{A^2}{4} e^{-j(2\omega_0 \Delta t + \theta)} \frac{1 - e^{-j2n\omega_0 \Delta t}}{1 - e^{-j2\omega_0 \Delta t}} \approx \frac{A^2}{2} n \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \ln p(x_1, \dots, x_n | \theta) &= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k A \cos(\omega_0 k \Delta t + \theta) - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_n^2} \cdot \frac{n}{2} A^2 - \frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma_n^2) \end{aligned} \quad (8-47)$$

对 θ 求导

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x_1, \dots, x_n | \theta) = -\frac{A}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k \sin(\omega_0 k \Delta t + \theta) = 0$$

由此求出

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = -\arctan(e_1/e_2) \quad (8-48)$$

其中

$$e_1 = \sum_{k=1}^n x_k \sin(\omega_0 k \Delta t), \quad e_2 = \sum_{k=1}^n x_k \cos(\omega_0 k \Delta t) \quad (8-49)$$

记为

$$e = e_2 - j e_1 = \sum_{k=1}^n x_k (e^{j\omega_0 \Delta t})^{-k} = X(\omega_0) = |X(\omega_0)| e^{j\phi(\omega_0)} \quad (8-50)$$

所以

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \phi(\omega_0) \quad (8-51)$$

8.2.3 信号频率估计

如果在信道内传输的信号是

$$s(t, \omega) = A \sin(\omega_0 t + \theta) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8-52)$$

式中, 幅度 A 和 θ 初相为常数, 且随机相位可以作为杂散参量被平均掉, 但角频率 ω 是未知或随机参量, 那么我们要对 ω 进行估计。这种情况在雷达系统中经常遇到, 例如在对运动目标进行搜索时由于多普勒效应的存在, 使得收到的频率发生变化, 我们可以对频率的偏差进行估计, 用来确定运动目标的飞行速度是多少。在通信系统中采用角度调制方式, 那么其解调器也属于对频率的估计器。

由式(2-157)已知, 随相位信号对 θ 求平均后的似然函数为

$$p(\mathbf{x} | \omega) = \int_0^{2\pi} F \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - A \sin(\omega t + \theta)]^2 dt \right\} \frac{d\theta}{2\pi} = k I_0 \left(\frac{2A}{N_0} M \right) \quad (8-53)$$

式中, k 是与 M 统计无关的常数, $I_0(x)$ 是修正的零阶第一类贝塞尔函数[见式(2-167)]而 M 为充分检验统计量, 它决定于

$$M^2 = \left[\int_0^T x(t) \sin \omega t dt \right]^2 + \left[\int_0^T x(t) \cos \omega t dt \right]^2 \quad (8-54)$$

显然式(8-53)是在给定 ω 条件下的似然函数, 它的大小与角频率有关。因为 $I_0(x)$ 是 x

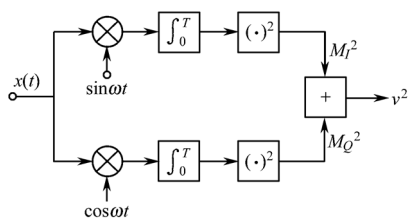


图 8.6 给定 ω 时求充分统计量

的单调函数,因此要求 $p(\mathbf{x} | \omega)$ 对 ω 为最大,就等效于求 M^2 或 M 的最大值。故实现最大似然频率估值的接收机的单元可按式(8-54)来构成,如图 8.6 所示。

但是图 8.6 只能给出一个频率下的充分检验统计量。为了寻求所有可能频率中的最大充分检验统计量,就必须由许多如图 8.6 那样结构的单元来组成,然后将它们的输出进行比较,并择大输出。显然这样组成的频率估计接收机结构比较复杂,比较实用的方案是用匹配滤波器来代替,如图 8.7 所示。

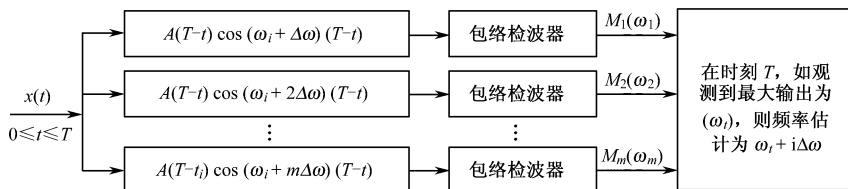


图 8.7 估计频率的最佳接收机

由图 8.7 可见,它是由一系列对不同频率匹配的滤波器并联所组成的,并且在各滤波器后面接有包络检波器(LDE)。每路匹配滤波器和包络检波器的功能是与图 8.6 单元等效的,它们的输出是充分统计量 M_i 。因此只要将它们接在择大输出电路上就可以得到最大的充分统计量 M_{\max} 输出,它等效于最大似然函数 $p(\mathbf{x} | \hat{\omega}_i) = \max p(\mathbf{x} | \omega)$, 其中 $\omega_i = \omega_0 + i\Delta\omega$ 即为最大似然频率估计量。式中 ω_0 是中心角频率, $\Delta\omega$ 是频率间隔。

匹配滤波器的数目决定于预期的频率变化范围和相邻频率间隔 $\Delta\omega$ 。显然 $\Delta\omega$ 值越小,则频率估计的精度就越高,但是相应的匹配滤波器数目就越多。同时, $\Delta\omega$ 亦不必小于频率估计的最小方差,即 C-R 下限。通常是取 $\Delta\omega = 2\pi/T$ 或 π/T , 其中 T 为信号持续时间,即观测时间。

现在来计算频率估计时的 C-R 下限。首先可根据式(8-53)得

$$\ln p(\mathbf{x} | \omega) = \ln k + \ln I_0 \left(\frac{2A}{N_0} M \right) \quad (8-55)$$

假定信噪比足够大,则 $D = \frac{2A}{N_0} M$ 也就很大,此时可利用近似式 $\ln I_0(D) \approx D$, 并代入式(8-55)后得

$$\ln p(\mathbf{x} | \omega) = \ln k + \frac{2A}{N_0} M \quad (8-56)$$

由图 8.7 可知,充分统计量 M 是匹配滤波器和包络检波后的输出,因此可以直接写成

$$M = \left| \int_0^T \tilde{x}(t) \tilde{a}^*(t) dt \right| \quad (8-57)$$

式中, $\tilde{x}(t)$ 是 $x(t)$ 的复包络, $\tilde{a}^*(t)$ 是归一化信号 $a(t) = s(t)/A$ 的共轭复包络,它应与 $a(t)$ 的复包络匹配。

在信噪比足够大的条件下 $\tilde{x}(t)$ 可近似为

$$\tilde{x}(t) \approx \tilde{A}_x(t) = \tilde{A}_x(t) e^{j\gamma_i} = A \tilde{a}(t) e^{j\gamma_i} \quad (8-58)$$

式中, \tilde{A}_x 是 $x(t)$ 中信号部分的复包络, γ 是频率偏差,即 $i\Delta\omega$ 。因此式(8-57)变成

$$M = \left| \int_0^T A \tilde{a}(t) \tilde{a}^*(t) de^{j\gamma_i} dt \right| = A \left| \int_0^T |\tilde{a}(t)|^2 e^{j\gamma_i} dt \right| \quad (8-59)$$

相应地式(8-56)可写成

$$\ln p(\mathbf{x} | \omega) = \ln k + \frac{2A^2}{N_0} \left| \int_0^T |\tilde{a}(t)|^2 e^{j\gamma_i} dt \right| \quad (8-60)$$

它是 γ 的函数。可将式(8-60)对 γ 求二次偏导后得到 C-R 下限。

现令 $z(\gamma) = \int_0^T |\bar{a}(t)|^2 e^{j\gamma t} dt$, 当 $\gamma = 0$ 时, $z(0) = \int_0^T |\bar{a}(t)|^2 dt = 1$ 。其绝对值的一次导数是

$$\frac{\partial |z(\gamma)|}{\partial \gamma} = \frac{1}{2|z(\gamma)|} [z(\gamma)z^*(\gamma)] + [z^*(\gamma)z'(\gamma)] \quad (8-61)$$

而二次导数为

$$\frac{\partial^2 |z(\gamma)|}{\partial \gamma^2} = \frac{1}{|z(\gamma)|} \operatorname{Re}\{z(\gamma)z^{*''}(\gamma) + z'(\gamma)z^{*'}(\gamma)\} - \frac{1}{|z(\gamma)|^3} [\operatorname{Re}\{z^*(\gamma)z'(\gamma)\}]^2 \quad (8-62)$$

C-R 下限是要在 $\gamma = 0$ 处求二阶导数,故将此条件代入式(8-62)后可得

$$\left[\frac{\partial^2 |z(\gamma)|}{\partial \gamma^2} \right]_{\gamma=0} = \operatorname{Re}\{z''(0)\} + |z'(0)|^2 - [\operatorname{Re}\{z'(0)\}]^2 \quad (8-63)$$

结合下列情况:

$$z'(0) = j \int_0^T t |\bar{a}(t)|^2 dt \quad \text{和} \quad z''(0) = - \int_0^T t^2 |\bar{a}(t)|^2 dt \quad (8-64)$$

将它们代入式(8-63)得

$$\left[\frac{\partial^2 |z(\gamma)|}{\partial \gamma^2} \right]_{\gamma=0} = - \int_0^T t^2 |\bar{a}(t)|^2 dt + \left[\int_0^T t |\bar{a}(t)|^2 dt \right]^2 \quad (8-65)$$

实际上,由式(8-52)可知,可取 $\bar{a}(t) = 1$,故式(8-65)可简化为

$$\left[\frac{\partial^2 |z(\gamma)|}{\partial \gamma^2} \right]_{\gamma=0} = - \int_0^T t^2 dt + \left[\int_0^T t dt \right]^2 = t_d^2 \quad (8-66)$$

$$\text{式中} \quad t_d^2 = \int_0^T t^2 |\bar{a}(t)|^2 dt - \left[\int_0^T t |\bar{a}(t)|^2 dt \right]^2 = \int_0^T t^2 dt - \left[\int_0^T t dt \right]^2 \quad (8-67)$$

注意, t_d 与信号带宽的量度不同, t_d 代表信号持续时间的量度,并且可以看做相对于信号平均时间的二阶中心矩。有些作者称 t_d 为信号的均方根时宽。

根据式(8-60)和式(8-66)可以确定最大似然频率估计时的 C-R 下限为

$$\left\{ - \left[\frac{\partial^2 \ln p(x|\omega)}{\partial \omega^2} \right] \right\}^{-1} = \left(\frac{2A}{N_0} t_d^2 \right)^{-1} \quad (8-68)$$

当取 $\bar{a}(t) = 1$, 式(8-56)取近似值为 $T^3/3$ 时, 式(8-57)可简化为

$$\sigma_\omega^2 \geq \left\{ - \left[\frac{\partial^2 \ln p(x|\omega)}{\partial \omega^2} \right] \right\}^{-1} = \frac{3N_0}{2A^2 T^3} = \frac{3N_0}{4E_s T^2} \quad (8-69)$$

式中, $E_s = A^2 T/2$ 是信号能量。

由式(8-69)可见,频率估计的最小方差除了与信噪比 $(2E_s)/N_0$ 成反比外,还与信号持续时间 T 的平方成反比。由于 T 与频率间隔 $\Delta\omega$ 成反比,因此 $\Delta\omega$ 越小,频率估计的最小方差就越低,亦即估计精度越高。这个结论与前面的分析是一致的。

要注意,频率估计的方差取决于信号的时宽,而下面将讨论的时延估计的方差取决于信号带宽。显然,信噪比越大,信号时宽越大,则频率估计的精度越高。

【例 8.5】 设接收到的输入是 $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta) + n(t)$, A 已知, ω, θ 是随机变量, $n(t)$ 是均值为 0, 方差为 σ_n^2 的低频带限高斯白噪声, 信号和干扰统计独立。这是不知道频率时的相位估计问题, 求 $\hat{\theta}_{ML}$ 和 $\hat{\omega}_{ML}$ [18]。

解: 输入采样后的条件分布

$$p(x_1, \dots, x_n | \omega, \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n (x_k - s_k)^2}$$

式中, $s_k = A \cos[\omega k \Delta t + \theta]$ 。则有

$$\begin{aligned} \ln p(x_1, \dots, x_n | \omega, \theta) &= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k A \cos(\omega k \Delta t + \theta) - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{1}{2\sigma_n^2} \frac{n}{2} A^2 - \frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma_n^2) \\ &= \frac{A}{2\sigma_n^2} \{e^{j\theta} X^*(\omega) + e^{-j\theta} X(\omega)\} - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{1}{2\sigma_n^2} \frac{n}{2} A^2 - \frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma_n^2) \end{aligned}$$

其中: $X(\omega) = \sum_{k=1}^n x_k e^{-j\omega k \Delta t} = A(\omega) e^{j\phi(\omega)}$ 。则有

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \omega} \ln p(x_1, \dots, x_n | \omega, \theta) = \frac{1}{2\sigma_n^2} e^{j\theta} \{A'(\omega) e^{-j\phi(\omega)} - A(\omega) e^{-j\phi(\omega)} \cdot j\phi'(\omega)\} + \\ \quad \frac{1}{2\sigma_n^2} e^{-j\theta} \{A'(\omega) e^{j\phi(\omega)} + jA(\omega) e^{j\phi(\omega)} \cdot \phi'(\omega)\} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x_1, \dots, x_n | \omega, \theta) = \frac{j}{2\sigma_n^2} e^{j\theta} \cdot A(\omega) e^{-j\phi(\omega)} - \frac{j}{2\sigma_n^2} e^{-j\theta} A(\omega) e^{j\phi(\omega)} = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} A'(\omega) \cdot [e^{j\theta-j\phi(\omega)} + e^{-j\theta+j\phi(\omega)}] + j\phi'(\omega) [e^{-j\theta+j\phi(\omega)} - e^{j\theta-j\phi(\omega)}] A(\omega) = 0 \\ e^{j\theta-j\phi(\omega)} - e^{-j\theta+j\phi(\omega)} = 0 \end{cases}$$

由这个联立方程求 $\hat{\omega}_{ML}$ 、 $\hat{\theta}_{ML}$

$$\begin{cases} A'(\hat{\omega}_{ML}) = 0, & \text{即 } \hat{\omega}_{ML} \text{ 是 } A(\omega) \text{ 取极大值时 } \omega \\ \hat{\theta}_{ML} = \phi(\hat{\omega}_{ML}), & \hat{\theta}_{ML} \text{ 是 } \omega = \hat{\omega}_{ML} \text{ 时 } \phi(\omega) \end{cases}$$

可以看出,是先估计频率,再估计相位。以 $A(\omega)$ 的峰值频率为估计频率,然后按上述估计相位的方法估计相位。

【例 8.6】 设接收到的输入是 $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta) + n(t)$, A, ω, θ 是随机变量, $n(t)$ 是均值为 0, 方差 σ_n^2 未知的低频带限高斯白噪声。分别求 $\hat{\theta}_{ML}$ 、 $\hat{\omega}_{ML}$ 和 \hat{A}_{ML} [18]。

解: 输入采样后的对数条件分布为

$$\begin{aligned} \ln p(x_1, \dots, x_n | A, \omega, \theta, \sigma_n^2) \\ = \frac{1}{2\sigma_n^2} \left\{ A(\omega) A e^{-j\phi(\omega)+j\theta} + A(\omega) A e^{j\phi(\omega)-j\theta} - \sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{n}{2} A^2 \right\} - \frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma_n^2) \end{aligned}$$

则

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial A} \ln p(x_1, \dots, x_n | A, \omega, \theta, \sigma_n^2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \omega} \ln p(x_1, \dots, x_n | A, \omega, \theta, \sigma_n^2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x_1, \dots, x_n | A, \omega, \theta, \sigma_n^2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_n^2} \ln p(x_1, \dots, x_n | A, \omega, \theta, \sigma_n^2) = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} A(\omega) e^{-j\phi(\omega)+j\theta} + A(\omega) e^{j\phi(\omega)-j\theta} - nA = 0 \\ A'(\omega) [e^{-j\phi(\omega)+j\theta} + e^{j\phi(\omega)-j\theta}] + jA(\omega) \phi'(\omega) [e^{-j\phi(\omega)+j\theta} - e^{j\phi(\omega)-j\theta}] = 0 \\ e^{-j\phi(\omega)+j\theta} - e^{j\phi(\omega)-j\theta} = 0 \\ -\frac{1}{2\sigma_n^2} \left\{ A \cdot A(\omega) [e^{-j\phi(\omega)+j\theta} + e^{j\phi(\omega)-j\theta}] - \sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{n}{2} A^2 \right\} - \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_n^2} = 0 \end{cases}$$

\hat{A}_{ML} 、 $\hat{\omega}_{ML}$ 、 $\hat{\theta}_{ML}$ 和 $\hat{\sigma}_{ML}^2$ 是上述联立方程的解, 且 $A'(\hat{\omega}_{ML}) = 0$, $\hat{\theta}_{ML} = \phi(\hat{\omega}_{ML})$, 则有

$$e^{j\hat{\theta}_{\text{ML}} - j\hat{\phi}(\hat{\omega}_{\text{ML}})} = e^{-j\hat{\theta}_{\text{ML}} + j\hat{\phi}(\hat{\omega}_{\text{ML}})} = 1; \quad \hat{A}_{\text{ML}} = \frac{2}{n} A(\hat{\omega}_{\text{ML}})$$

$$\hat{\sigma}_{\text{ML}} = \frac{-1}{n} \left\{ 2 \hat{A}_{\text{ML}} A(\hat{\omega}_{\text{ML}}) - \sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{n}{2} \hat{A}_{\text{ML}}^2 \right\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{1}{2} \hat{A}_{\text{ML}}^2$$

即, $\hat{\omega}_{\text{ML}}$ 是 $A(\omega)$ 取极大值时的 ω ; $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ 是 $\omega = \hat{\omega}_{\text{ML}}$ 时的 $\phi(\omega)$; \hat{A}_{ML} 是 $\omega = \hat{\omega}_{\text{ML}}$ 时 $A(\omega)$ 乘以 $2/n$;

$\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$ 是 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2$ 减去 $\frac{1}{2} \hat{A}_{\text{ML}}^2$ 。

可以看出, 估计频率是基础。估计出频率后, 就可以估计出相位, 振幅。在估计振幅基础上, 估计噪声方差。

8.2.4 信号时延估计

我们知道, 雷达回波相对于它的发射脉冲有一段时间延迟, 时延的大小与目标距离有关。利用接收波形估计出这个时延, 就可以知道目标的距离。为了分析方便, 假定估计是在高信噪比条件下进行的。在此, 先讨论基带信号, 这时信号的傅里叶变换只在零频附近存在, 相当于在超外差雷达接收机的包络检波器之后, 利用视频信号来估计时延(参看图 8.8)。这样做可以避免考虑相位。然后再讨论在中频上估计时延, 即在雷达接收机包络检波器之前, 利用中频信号来估计时延。

关于噪声的情况需要做一点说明。由图 8.8 容易看出, 雷达接收机包络检波器之后, 加性噪声显然不再是高斯白噪声。但是为了计算简单, 我们仍然采用高斯白噪声模型进行计算。当然, 这样得到的结果是近似的。

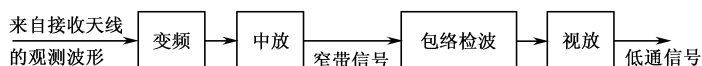


图 8.8 超外差雷达接收机原理框图

1. 在雷达视频上估计时延(基带信号)

这时信号形式为

$$s(t, \tau) = s(t - \tau) \quad (-T/2 \leq t \leq T/2) \quad (8-70)$$

式中, τ 为待估计的时延。同前, 由式(8-4), τ 的极大似然估计是下述方程的解:

$$\int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - s(t - \tau)] \frac{\partial s(t - \tau)}{\partial \tau} dt \Big|_{\tau = \hat{\tau}_{\text{ML}}} = 0 \quad (8-71)$$

式(8-72)可以写成

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \frac{\partial s(t - \tau)}{\partial \tau} dt - \int_{-T/2}^{T/2} s(t - \tau) \frac{\partial s(t - \tau)}{\partial \tau} dt = 0 \quad (8-72)$$

令上式中第二个积分为 I , 则

$$I = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t - \tau) dt$$

而积分 $\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t - \tau) dt$ 等于信号 $s(t - \tau)$ (也就是信号 $s(t)$) 的能量, 为一常数, 故 I 恒等于零。

于是时延 τ 的极大似然估计是如下方程的解为

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \frac{\partial s(t - \tau)}{\partial \tau} dt \Big|_{\tau = \hat{\tau}_{\text{ML}}} = 0 \quad (8-73)$$

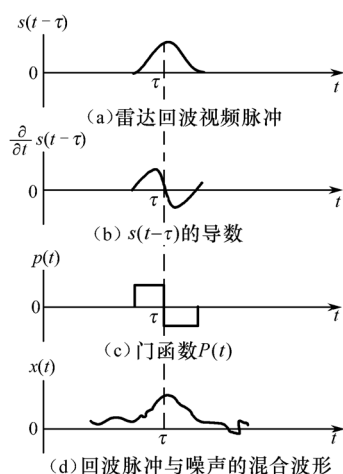


图 8.9 时延估计器波形图

$$\text{考虑到} \quad \frac{\partial s(t-\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial s(t-\tau)}{\partial t} \quad (8-74)$$

则 $\hat{\tau}$ 为下列方程的解为

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \frac{\partial s(t-\tau)}{\partial t} dt \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{ML}} = 0 \quad (8-75)$$

由式(8-75)可见,对时延 τ 做极大似然估计的估计器,应使接收波形 $x(t)$ 同信号的导数 $\partial s(t-\tau)/\partial \tau$ 之相关积分为零,而这正好是雷达自动跟踪环路所要完成的任务。对此做些说明,参看图 8.9。雷达回波视频脉冲如图 8.9(a)所示。其导数 $\partial s(t-\tau)/\partial t$ 如图 8.9(b)所示,这个导数可以用图 8.9(c)所示的门函数来近似。这个门函数在雷达系统中称为距离波门。雷达距离跟踪环路框图如图 8.10 所示。在环路中本地产生一个距离波门,波门中心在时间轴上可以移动。将波门与接收波形(示于图 8.9(d)中)进行时间互相关运算,

如果波门中心没有对准回波脉冲的中心,则相关器将输出一个误差信号去控制波门形成器,使之调节波门中心对准回波脉冲的中心。对准时的波门中心就是回波视频脉冲时延的估计。显然,这也就是式(8-75)所表示的运算。

下面分析估计的性能,计算估计量 $\hat{\tau}$ 的克拉默-拉奥界限。由式(8-6),对于无偏估计 $\hat{\tau}$,有

$$\sigma_{\hat{\tau}_{ML}}^2 \geq \left\{ \frac{2}{N_0} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{\partial s(t-\tau)}{\partial \tau} \right]^2 dt \right\}^{-1} \quad (8-76)$$

考虑到式(8-74),上式变为

$$\sigma_{\hat{\tau}_{ML}}^2 \geq \left\{ \frac{2}{N_0} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{\partial s(t-\tau)}{\partial t} \right]^2 dt \right\}^{-1} \quad (8-77)$$

因为是计算 $\hat{\tau}_{ML}$ 的方差下限,不妨令 $\tau = 0$,于是

$$\sigma_{\hat{\tau}_{ML}}^2 \geq \left\{ \frac{2}{N_0} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{\partial s(t)}{\partial t} \right]^2 dt \right\}^{-1} \quad (8-78)$$

已知信号波形 $s(t)$,由式(8-78)即可算出时延估计 $\hat{\tau}$ 的克拉默-拉奥界限。

为了看出 $\hat{\tau}_{ML}$ 的克拉默-拉奥界限与信噪比和信号带宽的关系,可将式(8-78)做进一步的变换。为此,设 $s(t)$ 的傅里叶变换为 $S(j\omega)$,则

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

容易看出, $ds(t)/dt$ 的傅里叶变换是 $j\omega S(j\omega)$,由巴塞瓦定理得

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{\partial s(t)}{\partial t} \right]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega$$

于是式(8-78)变为

$$\sigma_{\hat{\tau}_{ML}}^2 \geq \left\{ \frac{1}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega \right\}^{-1} \quad (8-79)$$

由于信号能量是

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega$$

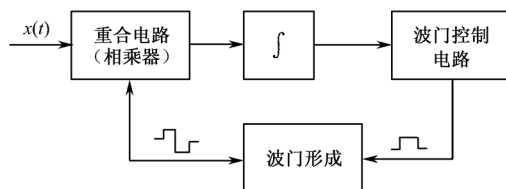


图 8.10 雷达距离跟踪环路框图

代入式(8-79)中,最后得

$$\sigma_{\hat{\tau}_{\text{ML}}}^2 \geq \left(\frac{2E}{N_0} W_s^2 \right)^{-1} \quad (8-80)$$

式中, W_s 是信号带宽的一种量度(以弧度为单位),定义为

$$W_s^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega} \quad (8-81)$$

由此可见, W_s^2 是信号频谱 $|S(j\omega)|^2$ 的归一化二阶原点矩,则称 W_s 为信号 $s(t)$ 的均方根带宽。

式(8-80)中,估计 $\hat{\tau}$ 的克拉默-拉奥界限表明,为了减小时延估计的方差,必须提高信噪比和增加信号的带宽。

2. 在雷达中频上估计时延(窄带信号)

在雷达中频上估计时延,待估信号为时延未知的随机相位信号,其相位 θ 在 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布。

在窄带信号情况下,接收的混合信号 $x(t)$ 可用复包络 $\hat{x}(t)$ 表示为

$$x(t) = \text{Re}\{\hat{x}(t)e^{j\omega_0 t}\} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8-82)$$

而复包络 $\hat{x}(t)$ 由两部分组成:

$$\hat{x}(t) = \tilde{A}(t)e^{j\theta} + \tilde{n}(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8-83)$$

式中, $\tilde{A}(t)e^{j\theta}$ 是有用信号成分的复包络, $\tilde{A}(t)$ 可以是随时间变化的复数,即允许有频率或相位调制。 $\tilde{n}(t)$ 是噪声的复包络。为了讨论的方便,把信号振幅归一化。信号能量为

$$E = \frac{1}{2} \int_0^T |\tilde{A}(t)|^2 dt \quad (8-84a)$$

引进归一化复包络 $\tilde{a}(t)$, 它与 $\tilde{A}(t)$ 的关系为

$$\tilde{A}(t) = (2E)^{1/2} \tilde{a}(t) \quad (8-84b)$$

代入式(8-84a),就得到归一化表达式

$$\int_0^T |\tilde{a}(t)|^2 dt = 1 \quad (8-85)$$

从第3章中,可知式(8-83)的复包络 $\hat{x}(t)$ 的 K-L 展开为

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k f_k(t)$$

式中,复本征函数 $f_k(t)$ 是如下复积分方程的解

$$\int_0^T \tilde{R}_n(t-\tau) f_k(\tau) d\tau = \lambda_k f_k(t)$$

核 $\tilde{R}_n(\tau)$ 为噪声自相关函数的复包络。K-L 系数由下式给出

$$x_k = a_k + j\beta_k = \int_0^T \hat{x}(t) f_k^*(t) dt$$

可以证明,窄带随机相位信号的似然函数可表示为

$$p_\theta(x) = C \exp \left[- \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x_k|^2 + |a_k|^2}{2\lambda_k} \right] I_0(D) = k I_0(D) \quad (8-86)$$

式中, k 是与待估计参量无关的量,其具体形式无需涉及。引用下标 θ 是为了提醒我们,似然函数已经对相位进行了平均。其统计量

$$D = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k a_k}{\lambda_k} \right| = \int_0^T \hat{x}(t) \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^* f_k^*(t)}{\lambda_k} \right] dt$$

$$D = \left| \int_0^{T'} \hat{x}(t) \hat{g}^*(t) dt \right| \quad (8-87)$$

式中, $\hat{g}(t)$ 满足积分方程

$$\int_0^T \hat{R}_n(t-\tau) \hat{g}(\tau) d\tau = \tilde{A}(t) \quad (0 \leq t \leq T') \quad (8-88)$$

与上面讨论基带信号时一样,在估计时延 τ 时,我们假定观测时间 T' 远大于 $\tau + T$, T 为信号的持续时间。

上述式子是在色噪声的普遍情况下导出的。对于我们限于讨论白噪声的情况,自相关函数的复包络为

$$\tilde{R}_n(\tau) = N_0 \delta(\tau) \quad (8-89)$$

将上式代入式(8-88),解得

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{N_0} \tilde{A}(t) = \frac{(2E)^{1/2}}{N_0} \bar{a}(t) \quad (8-90)$$

于是式(8-87)成为

$$D = \frac{(2E)^{1/2}}{N_0} \left| \int_0^{T'} \hat{x}(t) \bar{a}^*(t) dt \right| \quad (8-91)$$

在估计诸如时延和频率这类信号参量时,往往在较大的 E/N_0 条件下进行,这样才能得到足够精确的估计。在高信噪比条件下, D 值很大,因此近似有

$$\ln I_0(D) \approx D \quad (8-92)$$

对数似然函数近似为

$$\ln p_\theta(x) \approx \ln k + D \quad (8-93)$$

为了进行参量估计,需要构成统计量 D 。然而由于信号参量未知,在式(8-91)的相关积分中,无法让原始信号包络 $\bar{a}(t)$ 与接收信号中的有用信号包络 $\bar{a}_x(t)$ 完全一样。由于 $\bar{a}_x(t)$ 中含有待估计的未知参量,与 $\bar{a}(t)$ 有差别。现在,接收信号可以重新表示为

$$\hat{x}(t) = (2E)^{1/2} \bar{a}_x(t) e^{j\theta} + \bar{n}(t) \quad (8-94)$$

把上式代入式(8-91),可得 D 的表示式为

$$D = \frac{2E}{N_0} \left| \int_0^{T'} \bar{a}_x(t) \bar{a}^*(t) dt + \frac{e^{j\theta}}{(2E)^{1/2}} \int_0^{T'} \bar{n}(t) \bar{a}^*(t) dt \right| \quad (8-95)$$

式中,第二个积分代表有用信号与噪声的互相关部分,可以合理地假定用信号与噪声是统计独立或接近于统计独立的,这样在 $2E/N_0$ 大的情况下,第二项可以忽略。式中第一个积分与信号特性有关。包含有待估计的参量,在高信噪比条件下, $\bar{a}_x(t) = \bar{a}(t)$, 又计及式(8-85) (即 $\int_0^{T'} |\bar{a}(t)|^2 dt = 1$)。故有

$$D \approx \frac{2E}{N_0} \left| \int_0^{T'} \bar{a}_x(t) \bar{a}^*(t) dt \right| \quad (8-96)$$

于是,在高信噪比条件下,对数似然函数非常接近于

$$\ln p_\theta(x) \approx \ln k + \frac{2E}{N_0} \left| \int_0^{T'} \bar{a}_x(t) \bar{a}^*(t) dt \right| \quad (8-97)$$

上式中的积分

$$\chi = \int_0^{T'} \bar{a}_x(t) \bar{a}^*(t) dt \quad (8-98)$$

称为模糊度函数。 $|\chi|^2$ 称为模糊曲面。以上所述是在窄带信号情况下讨论信号参量的最大似然估计的基础。下面就来讨论时延的最大似然估计。

对于时延估计,接收波形可写为 $\hat{x}(t - \tau)$, 在高信噪比条件下,由式(8-91)和式(8-93)可知,对数平均似然函数正比于 D , 即有

$$\ln p_{\theta}(\mathbf{x}|\tau) \propto \left| \int_0^{T'} \hat{x}(t - \tau) \bar{a}^*(t) dt \right| \quad (8-99)$$

显然,使上式取最大值的 τ , 就是 τ 的极大似然估计。因此,时延估计器应将接收波形的复包络和随机相位信号复包络的共轭进行互相关计算,并测量此互相关函数的包络达到峰值的时间。

下面着重讨论时延估计的克拉默-拉奥界限。将式(8-98)代入式(8-97),得

$$\ln p_{\theta}(\mathbf{x}|\tau) \approx \ln k + \frac{2E}{N_0} \chi(\tau) \quad (8-100)$$

将式(8-100)对 τ 求导两次得

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \ln p_{\theta}(\mathbf{x}|\tau) \approx \frac{2E}{N_0} \frac{\partial^2 |\chi(\tau)|}{\partial \tau^2} \quad (8-101)$$

将上式代入式(8-6),得

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 \geq \frac{-1}{\frac{2E}{N_0} E \left[\frac{\partial^2 |\chi(\tau)|}{\partial \tau^2} \right]}$$

考虑到 $\chi(\tau)$ 不是接收样本的函数,可将期望算符去掉,于是得

$$\sigma_{\hat{\tau}}^2 \geq \frac{-1}{\frac{2E}{N_0} \frac{\partial^2 |\chi(\tau)|}{\partial \tau^2}} \quad (8-102)$$

余下的问题,是求出上式分母中 $|\chi(\tau)|$ 对 τ 的二阶导数,上述导数是在参量的真值处求值的。由于是计算 $\hat{\tau}$ 的方差的下限,我们假定时延 $\tau = 0$ 不会失去一致性,因此式(8-102)分母中的导数应理解为在未知参量 $\tau = 0$ 处求导。令

$$\begin{aligned} \chi'(\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \chi(\tau), \quad \chi'(0) = \frac{\partial}{\partial \tau} \chi(\tau) \Big|_{\tau=0} \\ \chi''(\tau) &= \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \chi(\tau), \quad \chi''(0) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \chi(\tau) \Big|_{\tau=0} \end{aligned}$$

考虑到

$$|\chi(\tau)| = [\chi(\tau) \chi^*(\tau)]^{1/2} \quad (8-103)$$

式中, $\chi^*(\tau)$ 代表 $\chi(\tau)$ 的共轭,将式(8-103)对 τ 求导,得

$$\frac{\partial}{\partial \tau} |\chi(\tau)| = \frac{1}{2 |\chi(\tau)|} [\chi(\tau) \chi'^*(\tau) + \chi^*(\tau) \chi'(\tau)] \quad (8-104)$$

再求导一次得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} |\chi(\tau)| &= \frac{1}{|\chi(\tau)|} \text{Re}\{\chi(\tau) \chi^{*''}(\tau) + \chi'(\tau) \chi^{*'}(\tau)\} - \\ &\quad \frac{1}{|\chi(\tau)|^3} [\text{Re}\{\chi^*(\tau) \chi'(\tau)\}]^2 \end{aligned} \quad (8-105)$$

推导上式时,利用了下列公式:设 $\bar{n}(t)$ 为复数,则

$$\text{Re}\{\bar{n}(t)\} = \frac{1}{2} [\bar{n}(t) + \bar{n}^*(t)]$$

当 $\tau = 0$ 时,有 $\chi(0) = \chi^*(0) = 1$, 于是式(8-105)变为

$$\frac{\partial^2 |\chi(\tau)|}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=0} = \text{Re}\{\chi''(0)\} + |\chi'(0)|^2 - [\text{Re}\{\chi'(0)\}]^2 \quad (8-106)$$

现在利用式(8-106)和式(8-102)计算时延估计的方差下限。为此,只需算出 $\chi'(0)$ 和 $\chi''(0)$ 。对于时延未知的随机相位信号,接收波形复包络为

$$\hat{x}(t) = \tilde{A}(t - \tau)e^{j\theta} + \bar{n}(t - \tau)$$

$\tilde{A}(t - \tau)$ 又可写为

$$\tilde{A}(t - \tau) = (2E)^{1/2} \bar{a}(t - \tau)$$

式中, $\bar{a}(t - \tau)$ 为信号的归一化复包络。于是模糊函数写成

$$\chi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{a}(t - \tau) \bar{a}^*(t) dt \quad (8-107)$$

可以算得

$$\chi'(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{a}^*(t) \frac{\partial \bar{a}(t - \tau)}{\partial \tau} dt$$

考虑到式(8-74), 上式变为

$$\chi'(\tau) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{a}^*(t) \frac{\partial \bar{a}(t - \tau)}{\partial t} dt$$

于是

$$\chi'(0) = \chi'(\tau)|_{\tau=0} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{a}^*(t) \bar{a}'(t) dt \quad (8-108)$$

式中, $\bar{a}'(t)$ 是 $\bar{a}(t)$ 对 t 的一阶导数。完全类似地可得

$$\chi''(0) = \chi'(\tau)|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{a}^*(t) \bar{a}''(t) dt \quad (8-109)$$

式中, $\bar{a}''(t)$ 是 $\bar{a}(t)$ 对 t 的二阶导数。利用分部积分, 并设 $\bar{a}(t)$ 及其导数在时间间隔的端点处为零, 可将上式化为

$$\chi''(0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{a}'(t)|^2 dt \quad (8-110)$$

与基带信号时一样, 我们将用频域量表示估计 $\hat{\tau}$ 的最小方差。设 $\bar{a}(t)$ 的傅里叶变换为 $A(j\omega)$, 则 $\bar{a}'(t)$ 的傅里叶变换为 $j\omega A(j\omega)$ 。于是

$$\chi'(0) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |A(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \chi''(0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |A(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (8-111)$$

注意到 $\chi'(0)$ 为纯虚数, 故 $\text{Re}\{\chi'(0)\} = 0$ 。将上面两式代入式(8-106)中, 再利用式(8-102)最后得

$$\sigma_{\hat{\tau}_{\text{ML}}}^2 \geq \left(\frac{2E}{N_0} W^2 \right)^{-1} \quad (8-112)$$

式中

$$W^2 = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |A(j\omega)|^2 d\omega - \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |A(j\omega)|^2 d\omega \right]^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |A(j\omega)|^2 d\omega} \quad (8-113)$$

是信号带宽的一种量度, 为频谱 $|A(j\omega)|^2$ 的归一化二阶中心矩。

利用式(8-101)可以确定窄带信号情况下时延估计的克拉默-拉奥界限。将窄带情况和基带情况相比较可以看出, 两者克拉默-拉奥界限的形式完全相同, 只是 W 和 W_s 的表达式不同。具体地说, 窄带情况下 W^2 表达式的分子要多出一项(第二项), 这是因为频谱 $|A(j\omega)|^2$ 的均值不一定为零。

8.3 多个信号参量的同时估计的方法和性能

前面所讨论的都是对单个参量 α 的估计。但是在许多实际问题中, 要求同时估计信号的多个参量, 这就是矢量估计(vector estimation)。例如, 在雷达探测目标时, 通常要求同时估计出某一时刻目标的距离、方位、高度和速度等参数。本节将把单参量估计的概念、方法和性能评估等推广到信号参量的矢量估计中。实际上, 例 8.4 和例 8.5 就是简单的多个信号参量的同时估计例子。

8.3.1 估计方法^[10]

假定有 m 个参量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 需要同时估计, 用 m 维矢量 α 来表示这 m 个被估计的参量, 即矢量为

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T \quad (8-114)$$

式中, 譬如说, α_1 可以是信号振幅, α_2 可以是信号频率, 等等。该矢量称为被估计矢量。由于估计规则构造的估计矢量一定是观测矢量 x 的函数, 所以估计矢量记为 $\hat{\alpha}(x)$, 简写为 $\hat{\alpha}$ 。

设 M 维被估计矢量 α 是高斯随机矢量, 其先验概率密度函数是均值矢量为 m_α , 协方差矩阵为 R_α 的高斯分布, 即

$$p(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} |R_\alpha|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\alpha - m_\alpha)^T R_\alpha^{-1} (\alpha - m_\alpha) \right] \quad (8-115)$$

线性观测模型为

$$x = H\alpha + n \quad (8-116)$$

式中, x 是 N 维观测数据矢量; H 是已知的 $N \times M$ 观测矩阵; α 是 M 维被估计矢量; N 维观测噪声矢量 n 是均值矢量为零、协方差矩阵为 R_n 的高斯噪声, 它与 α 是互不相关的。

在随机矢量 (含单随机参量) 的贝叶斯估计中, 估计矢量 $\hat{\alpha}$ 是利用后验概率密度函数 $p(\alpha|x)$ 结合代价函数 $C(\alpha, \hat{\alpha})$ 来构造的。在线性观测模型下, 当被估计的随机矢量 α 是高斯分布时, 为了按贝叶斯准则推导估计矢量 $\hat{\alpha}$, 需要后验概率密度函数 $p(\alpha|x)$ 的统计特性。前面已经指出, 观测噪声矢量 n 是与被估计的随机矢量 α 相互统计独立的高斯噪声。令矢量 y 为

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H\alpha + n \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ n \end{bmatrix} \quad (8-117)$$

其中, 右上角的单位矩阵 I 是 $N \times N$ 矩阵, 左下角的单位矩阵 I 是 $M \times M$ 矩阵。由于观测噪声矢量 n 与被估计矢量 α 相互统计独立, 且各自是高斯分布的, 所以它们的联合分布是高斯的。另外, 式 (8-117) 表明, 矢量 y 是相互统计独立的高斯随机矢量 α 和 n 的线性变换, 所以它也是高斯分布的。

这样, N 维观测矢量 x 和 M 维被估计矢量 α 是联合高斯分布的, 其均值矢量 m_α 为

$$m_\alpha = \begin{bmatrix} E(x) \\ E(\alpha) \end{bmatrix} \quad (8-118)$$

式中 $E(x) = E(H\alpha + n) = HE(\alpha) = Hm_\alpha$, $E(\alpha) = m_\alpha$

分块协方差矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} R_x & R_{x\alpha} \\ R_{\alpha x} & R_\alpha \end{bmatrix} \quad (8-119)$$

式中 $R_x = E\{[x - E(x)][x - E(x)]^T\} = E[(H\alpha + n - Hm_\alpha)(H\alpha + n - Hm_\alpha)^T]$

$$= E\{[H(\alpha - m_\alpha) + n][(\alpha - m_\alpha)^T H^T + n^T]\} = HR_\alpha H^T + R_n$$

$$R_{x\alpha} = E\{[x - E(x)][\alpha - E(\alpha)]^T\} = E\{[H(\alpha - m_\alpha) + n](\alpha - m_\alpha)^T\} = HR_\alpha$$

$$R_{\alpha x} = R_{x\alpha}^T = R_\alpha H^T$$

$$R_\alpha = E\{[\alpha - E(\alpha)][\alpha - E(\alpha)]^T\} = E[(\alpha - m_\alpha)(\alpha - m_\alpha)^T]$$

所以, 矢量 x 和矢量 α 的联合概率密度函数为

$$p(x, \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+m}{2}} |R|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - Hm_\alpha \\ \alpha - m_\alpha \end{pmatrix}^T R^{-1} \begin{pmatrix} x - Hm_\alpha \\ \alpha - m_\alpha \end{pmatrix} \right] \quad (8-120)$$

利用关系式

$$p(\alpha|x) = \frac{p(x, \alpha)}{p(x)} \quad (8-121)$$

$$\text{和} \quad p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{R}_x|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{m}_a)^T \mathbf{R}_x^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{m}_a) \right] \quad (8-122)$$

可以导出后验概率密度函数 $p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 是高斯型的, 它的均值矢量为

$$E(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) = \mathbf{m}_a + \mathbf{R}_a \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{R}_a \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_n)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{m}_a) \quad (8-123)$$

协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_{a|x} = \mathbf{R}_a - \mathbf{R}_a \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{R}_a \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_n)^{-1} \mathbf{H}\mathbf{R}_a \quad (8-124)$$

在获得后验概率密度函数 $p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 的统计特性后, 就可以讨论高斯噪声中, 高斯被估计随机矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的贝叶斯估计了。

矢量估计的误差矢量定义为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_1 - \hat{\alpha}_1(x) \\ \alpha_2 - \hat{\alpha}_2(x) \\ \vdots \\ \alpha_m - \hat{\alpha}_m(x) \end{bmatrix} \quad (8-125a)$$

这样, 估计矢量的均方误差阵为

$$\mathbf{m}_{\varepsilon_1} = E\{[\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}(x)][\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}(x)]^T\} \quad (8-125b)$$

1. 最小均方误差估计

贝叶斯估计 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ (符号写成 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$) 应使如下平均风险为最小; 即

$$\bar{R} = \int_{(x)} \int_{(\boldsymbol{\alpha})} C[\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha})] p(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) d\mathbf{x} d\hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad (8-126)$$

式中, $C[\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha})]$ 为代价函数。选择不同的代价函数, 便可以得出不同的贝叶斯估计。例如, 如果函数 $C[\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha})]$ 是估计误差的平方和

$$C(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (8-127)$$

则贝叶斯估计化为最小均方误差估计。将式(8-127)代入式(8-126), 考虑到 $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})$, 有

$$\bar{R} = \int_{(x)} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{(\boldsymbol{\alpha})} \left\{ \sum_{j=1}^m [\hat{\alpha}_j(\mathbf{x}) - \alpha_j]^2 \right\} p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\alpha} \quad (8-128)$$

使平均风险 \bar{R} 为最小, 等效于使内积分最小。将内积分对 $\hat{\alpha}_j(\mathbf{x})$ 求导并令结果等于零, 便得到第 j 个参量的最小均方估计及用矢量表示

$$\hat{\alpha}_j(\mathbf{x}) = \int_{(\boldsymbol{\alpha})} \alpha_j p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\alpha} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (8-129)$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MS}}(\mathbf{x}) = \int_{(\boldsymbol{\alpha})} \boldsymbol{\alpha} p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\alpha} \quad (8-130)$$

它是由 m 个式(8-129)所示的方程组成的联立方程。求解这样的联立方程, 可同时获得 m 个参量的估计矢量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MS}}$ 。

如所预期, 参量矢量的最小均方估计等于该参量矢量的条件均值。式(8-130)是第1章中单参量估计公式在多参量情况下的推广。也可以选择其他形式的代价函数, 这与单参量情形完全类似, 不再赘述。

2. 最大后验估计

对于随机矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的最大后验估计, 必须求出使后验概率密度函数 $p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 或 $\ln p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 为最大的 $\boldsymbol{\alpha}$, 将它作为最大后验估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}}$ 。如果 $p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x})$ 最大值的解存在, 则 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}}$ 可以由最大后验方程组解得, 该最大后验方程组为

$$\left. \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{x})}{\partial \theta_j} \right|_{\boldsymbol{\alpha} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}}} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (8-131)$$

这也是由 m 个方程组成的联立方程, 将其简明地表示为

$$\left. \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right|_{\boldsymbol{\alpha} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{MAP}}} = 0 \quad (8-132)$$

式中

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{x})}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{x})}{\partial \alpha_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\alpha} | \mathbf{x})}{\partial \alpha_m} \end{bmatrix} \quad (8-133)$$

3. 最大似然估计

下面讨论最大似然估计。如前所述, 极大似然估计就是使似然函数 $p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha})$ 取最大值的估计。由式(8-2), 高斯白噪声情况下接收波形 $x(t)$ 的似然函数为

$$p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha}) = F \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \boldsymbol{\alpha})]^2 dt \right\}$$

式中, $s(t, \boldsymbol{\alpha})$ 代表信号, $\boldsymbol{\alpha}$ 代表待估计的参量矢量。与式(8-3)类似, 在参量矢量情况下有

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} = \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t, \boldsymbol{\alpha})] \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} dt \quad (8-134)$$

因此, 参量矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的极大似然估计就是下列方程组的解, 即

$$\int_0^T [x(t) - s(t, \boldsymbol{\alpha})] \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (8-135)$$

在下面的讨论中, 将主要利用极大似然法来构造估计。

8.3.2 估计性能

与单参量情况相同, 可以提出若干标准来评价估计量的性能。这里我们仅限于讨论估计的无偏性(与估计的均值相联系)和优效性(与估计的方差相联系)。

无偏性的定义与单参量情况完全相似, 只不过这里采用矢量记号。如果

$$\begin{aligned} E\{\hat{\alpha}_1\} &= E\{\alpha_1\} \\ E\{\hat{\alpha}_2\} &= E\{\alpha_2\} \\ &\vdots \\ E\{\hat{\alpha}_m\} &= E\{\alpha_m\} \end{aligned}$$

亦即

$$E\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}\} = E\{\boldsymbol{\alpha}\} \quad (8-136)$$

则称估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 是无偏的, 否则为有偏估计量。如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是确定性的未知参量矢量, 则估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 的无偏性定义为

$$E\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}\} = \boldsymbol{\alpha} \quad (8-137)$$

即估计量的均值等于未知参量的真值。

优效性定义也是单参量情况的直接推广。设 $\boldsymbol{\alpha}$ 的两个偏估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2$ 分别具有方差 $\text{Var}\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1\}$ 和 $\text{Var}\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2\}$, 如果 $\text{Var}\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1\} < \text{Var}\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2\}$, 则称 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2$ 是优效的。

任何无偏估计量的方差都不能小于一个特定的方差下限, 这个下限由克拉默-拉奥不等式给出。达到方差下限的无偏估计量称为优效估计量。

下面仅就 $\boldsymbol{\alpha}$ 为确定性参量矢量的情况, 讨论多个参量同时估计的克拉默-拉奥不等式。设

$\hat{\alpha}$ 是矢量 α 的无偏估计。定义矩阵 $[\gamma]$ 的元素为

$$\gamma_{ij} = E \left\{ \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\alpha)}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\alpha)}{\partial \alpha_j} \right\} \quad (8-138)$$

采用与证明克拉默-拉奥界限类似的方法,可以证明上式也可写成

$$\gamma_{ij} = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}|\alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right\} \quad (8-139)$$

矩阵 $[\gamma]$ 通常称为费希尔(Fisher)数据矩阵或信息矩阵。它的逆阵记为

$$\psi = \gamma^{-1} \quad (8-140)$$

其元素记为 ψ_{ij} 。容易看出,对于第 i 个无偏估计 $\hat{\alpha}_i$, 它的方差满足下列克拉默-拉奥不等式

$$\sigma_{\hat{\alpha}_i}^2 \geq \psi_{ii} \quad (8-141)$$

其中 ψ_{ii} 是矩阵 ψ 的对角线元素。如果不等式(8-141)变为等式,则称诸估计 $\hat{\alpha}_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 为联合优效估计。与单参量估计类似, $\hat{\alpha}_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 为联合优效估计的条件是

$$\hat{\alpha}_i - \alpha_i = \sum_j g_{ij}(\alpha) \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\alpha)}{\partial \alpha_j} \quad (8-142)$$

式中, $g_{ij}(\alpha)$ 可以是常数或 α 的函数,但不能是接收样本 \mathbf{x} 或估计量 $\hat{\alpha}$ 的函数。

为了更好地理解上述内容,我们考虑信号仅含两个未知参量 α_1 和 α_2 的情况。数据矩阵的元素为

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= -E \left\{ \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\alpha)}{\partial \alpha_1^2} \right\}, & \gamma_{22} &= -E \left\{ \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\alpha)}{\partial \alpha_2^2} \right\} \\ \gamma_{12} &= \gamma_{21} = -E \left\{ \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\alpha)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right\} \end{aligned}$$

数据矩阵为

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

其逆阵 γ^{-1} 等于 γ 的伴随矩阵除以 γ 的行列式,即

$$\psi = \gamma^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \gamma_{22} & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{12} & \gamma_{11} \end{bmatrix}$$

式中, Δ 是矩阵 γ 的行列式,且 $\Delta = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$, 于是联合优效估计的方差为

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{\alpha}_1}^2 &= \psi_{11} = \frac{\gamma_{22}}{\Delta} = \frac{\gamma_{22}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = \frac{1}{\gamma_{11}} \frac{1}{[1 - \rho^2(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)]} \\ &= \frac{-1}{E \left\{ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}|\alpha)}{\partial \alpha_1^2} \right\}} \frac{1}{[1 - \rho^2(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)]} \end{aligned} \quad (8-143)$$

$$\sigma_{\hat{\alpha}_2}^2 = \frac{1}{\gamma_{22}} \frac{-1}{[1 - \rho^2(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)]} = \frac{-1}{E \left\{ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}|\alpha)}{\partial \alpha_2^2} \right\}} \frac{1}{[1 - \rho^2(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)]} \quad (8-144)$$

以上两式中的第一个因子,是信号仅有一个未知参量时优效估计的方差。第二个因子含有如下的量

$$\rho^2(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) = \frac{\gamma_{12}^2}{(\gamma_{11}\gamma_{22})^{1/2}} \quad (8-145)$$

称其为两联合估计的相关系数。容易证明 $0 \leq \rho(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) \leq 1$ 。如果两估计不相关,则 $\rho = 0$, 联合优效估计的方差等于单个优效估计的方差;如果两估计相关,则 ρ 取值于 $0 \sim 1$, 这时联合优效估计的方差大于单个优效估计的方差。换言之,非零的相关将使联合估计的性能变坏。

在结束估计性能的讨论以前,我们还应当给出高斯白噪声情况下费希尔数据矩阵元素的计算公式。考虑到 $x(t) - s(t, \boldsymbol{\alpha}) = n(t)$, 则式(8-144)变为

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} = \frac{2}{N_0} \int_0^T n(t) \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} dt \quad (8-146)$$

将式(8-146)代入式(8-139)中,得

$$\gamma_{ij} = \frac{4}{N_0^2} \int_0^T \int_0^T E\{n(t)n(u)\} \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} dt du \quad (8-147)$$

上式中的 $E\{n(t)n(u)\}$ 是白噪声的自相关函数,等于 $\frac{N_0}{2} \delta(t-u)$, 故

$$\gamma_{ij} = \frac{2}{N_0} \int_0^T \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} dt \quad (8-148)$$

$i = j$ 时,得数据矩阵的对角线元素为

$$\gamma_{ij} = \frac{2}{N_0} \int_0^T \left[\frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} \right]^2 dt \quad (8-149)$$

得到 γ_{ij} 后,便可以求出 $\boldsymbol{\Psi}_{ij}$, 从而求出多参量联合估计的克拉默-拉奥界限。

8.4 高斯色噪声情况下的估计简介⁽¹⁾

现在讨论加性噪声是高斯色噪声情况下信号参量的估计问题,分别讨论两种情况:一是非随机相位信号,它的待估计参量都是非随机变量,其中包括初相位;另一是随机相位情况,它的待估计参量也都是非随机变量,但是不包括初相位,初相位作为随机参量在求似然函数时被平均掉了,它适用于窄带信号的情况。

8.4.1 非随机相位信号

设观测到的接收信号为

$$\mathbf{x}(t) = s(t, \boldsymbol{\alpha}) + n(t) \quad (8-150)$$

式中, $\boldsymbol{\alpha}$ 是待估计的非随机参量矢量,其中包括初相位。 $n(t)$ 是自相关函数为 $R_n(\tau)$ 的零均值平稳高斯噪声。

我们先讨论单个未知参量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的最大似然估计,所得结果不难推广到多个未知参量即矢量参量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的情况。根据第3章高斯色噪声的似然函数表示式,可得对数似然函数的表示式为

$$\ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) = \ln C - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [\mathbf{x}(t) - s(t, \boldsymbol{\alpha})] R_n^{-1}(t - \tau) [\mathbf{x}(\tau) - s(\tau, \boldsymbol{\alpha})] dt d\tau \quad (8-151)$$

式中, C 是一个同参量 $\boldsymbol{\alpha}$ 无关的量, $R_n^{-1}(t, \tau)$ 是逆核,满足关系式

$$\int_0^T R_n^{-1}(t, \tau) R_n(\tau, \beta) d\tau = \delta(t - \beta) \quad (8-152)$$

最大似然估计是使式(8-151)所示的对数似然函数为最大的 $\boldsymbol{\alpha}$ 。为了更明确表示出这个估计量,需要推导似然方程。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [\mathbf{x}(t) - s(t, \boldsymbol{\alpha})] R_n^{-1}(t - \tau) \frac{\partial s(\tau, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} dt d\tau + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [\mathbf{x}(t) - s(t, \boldsymbol{\alpha})] R_n^{-1}(t - \tau) \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} dt d\tau \end{aligned}$$

由于 $R_n^{-1}(t - \tau) = R_n^{-1}(\tau - t)$, 所以上式中的两个积分实际上是相同的。于是

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \int_0^T \int_0^T \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} R_n^{-1}(t - \tau) [x(\tau) - s(\tau, \boldsymbol{\alpha})] dt d\tau \quad (8-153)$$

和第3章的讨论相仿,可以定义函数 $g(t, \boldsymbol{\alpha})$, 它满足积分方程

$$\int_0^T R_n(t - \tau) g(\tau, \boldsymbol{\alpha}) d\tau = s(t, \boldsymbol{\alpha}) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8-154)$$

积分方程的形式解是

$$g(\tau, \boldsymbol{\alpha}) = \int_0^T R_n^{-1}(\tau - t) s(t, \boldsymbol{\alpha}) dt \quad (8-155)$$

对参量 $\boldsymbol{\alpha}$ 求导数,得到

$$\frac{\partial g(\tau, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \int_0^T \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} R_n^{-1}(\tau - t) dt \quad (8-156)$$

将上式代入式(8-153),得到

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \int_0^T \frac{\partial g(\tau, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} [x(\tau) - s(\tau, \boldsymbol{\alpha})] d\tau \quad (8-157)$$

于是,似然方程成为

$$\int_0^T \frac{\partial g(\tau, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} [x(\tau) - s(\tau, \boldsymbol{\alpha})] d\tau \Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{ML}}} = 0 \quad (8-158)$$

最大似然估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{ML}}$ 就是上式的解。

为了求克拉默-拉奥界限,需要计算 $E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})\right]^2\right\}$ 。利用 $[x(\tau) - s(\tau, \boldsymbol{\alpha})] = n(\tau)$, 式(8-157)可改写为

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \int_0^T \frac{\partial g(\tau, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} n(\tau) d\tau \quad (8-159)$$

于是

$$\begin{aligned} E\left\{\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right]^2\right\} &= E\left\{\int_0^T \int_0^T n(t) n(\tau) \frac{\partial g(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial g(\tau, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} dt d\tau\right\} \\ &= \int_0^T \int_0^T R_n(t - \tau) \frac{\partial g(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial g(\tau, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} dt d\tau \end{aligned} \quad (8-160)$$

由式(8-154)对 $\boldsymbol{\alpha}$ 求导,得

$$\int_0^T R_n(t - \tau) \frac{\partial g(\tau, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} d\tau = \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad (8-161)$$

代入式(8-160),得到

$$E\left\{\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right]^2\right\} = \int_0^T \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial g(\tau, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} dt \quad (8-162)$$

所以,对于无偏估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{ML}}$, 克拉默-拉奥不等式是

$$\sigma_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{ML}}}^2 \geq \left[\int_0^T \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial g(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} dt \right]^{-1} \quad (8-163)$$

作为上述结论应用的例子,考虑信号振幅的最大似然估计。为此,令

$$s(t, A) = As(t) \quad (8-164)$$

式中, $s(t)$ 是已知的时间函数,如 $\sin(\omega_0 t + \theta)$, 而 A 是待估计的振幅。 A 的最大似然估计量

\hat{A}_{ML} 是下述似然方程的解

$$\int_0^T \frac{\partial g(\tau, A)}{\partial A} [x(\tau) - As(\tau)] d\tau \Big|_{A=\hat{A}_{\text{ML}}} = 0 \quad (8-165)$$

设 $k(\tau)$ 是下述积分方程的解

$$\int_0^T R_n(t - \tau) k(\tau) d\tau = s(t), \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8-166)$$

两边同乘以 A , 得到

$$\int_0^T R_n(t-\tau)Ak(\tau)d\tau = As(t) = s(t, A), \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8-167)$$

这正是 $g(\tau, A)$ 要满足的积分方程

$$\int_0^T R_n(t-\tau)g(\tau, A)d\tau = s(t, A), \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8-168)$$

$$\text{可见} \quad g(\tau, A) = Ak(\tau), \quad \frac{\partial g(\tau, A)}{\partial A} = k(\tau) \quad (8-169)$$

代入似然方程式(8-165), 得到

$$\int_0^T k(\tau)[x(\tau) - As(\tau)]d\tau \Big|_{A=\hat{A}_{ML}} = 0 \quad (8-170)$$

由此解出最大似然估计为 \hat{A}_{ML} 为

$$\hat{A}_{ML} = \frac{\int_0^T k(\tau)x(\tau)d\tau}{\int_0^T k(\tau)s(\tau)d\tau} = \frac{\int_0^T g(\tau, A)x(\tau)d\tau}{\int_0^T g(\tau, A)s(\tau)d\tau} \quad (8-171)$$

与白噪声情况下的相应式(8-12)比较, 即可看出, 差别在于以 $g(t, A)$ 代替原来的 $s(t, A)$, 或以 $k(t)$ 代替原来的 $s(t)$ 。

实际上, 在白噪声这一特定情况下, 有

$$R_n(t-\tau) = \frac{n_0}{2}\delta(t-\tau) \quad (8-172)$$

代入式(8-166), 解出

$$k(t) = \frac{2}{N_0}s(t) \quad (8-173)$$

将上式代入式(8-171), 得到

$$\hat{A}_{ML} = \int_0^T s(\tau)x(\tau)d\tau / \int_0^T s^2(\tau)d\tau \quad (8-174)$$

此即白噪声情况下的式(8-12)。

再来推算克拉默-拉奥不等式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} &= \frac{\partial [As(t)]}{\partial A} = s(t) \\ \frac{\partial s(t, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} &= \frac{\partial [Ak(t)]}{\partial A} = k(t) = \frac{2}{N_0}s(t) \end{aligned}$$

将以上二式代入式(8-163), 得到克拉默-拉奥不等式以及归一化条件式

$$\sigma_{\hat{A}_{ML}}^2 \geq \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T s^2(t)dt \right]^{-1}, \quad \int_0^T s^2(t)dt = 1 \quad (8-175)$$

式(8-175)成为

$$\sigma_{\hat{A}_{ML}}^2 \geq 2/N_0 \quad (8-176)$$

与白噪声情况下的式(8-18)一致。

从上面的例子中可以得出有用的结论: 若在适当的地方用 $g(t, \boldsymbol{\alpha})$ 来代替 $s(t, \boldsymbol{\alpha})$, 则白噪声情况下的估计量形式便化成色噪声情况下的相应估计量形式。

现在简单讨论一下待估计量是矢量参量的情况。最大似然估计量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_m)$ 是下列似然方程组的解

$$\int_0^T \frac{\partial g(\tau, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} [x(\tau) - s(\tau, \boldsymbol{\alpha})]d\tau \Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{ML}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (8-177)$$

式中,函数 $g(\tau, \mathbf{a})$ 满足积分方程:

$$\int_0^T R_n(t-\tau)g(\tau, \mathbf{a})d\tau = s(t, \mathbf{a}) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8-178)$$

为了推导克拉默-拉奥不等式,需要计算费希尔信息矩阵 \mathbf{F} ,其元素为

$$F_{ij} = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln(x|\mathbf{a})}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right\} \quad (8-179)$$

类似于式(8-159),有

$$\frac{\partial \ln(x|\mathbf{a})}{\partial \alpha_i} = \int_0^T \frac{\partial g(\tau, \mathbf{a})}{\partial \alpha_i} [x(\tau) - s(\tau, \mathbf{a})] d\tau \quad (8-180)$$

$$\text{故} \quad \frac{\partial^2 \ln(x|\mathbf{a})}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \int_0^T \frac{\partial^2 g(\tau, \mathbf{a})}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} [x(\tau) - s(\tau, \mathbf{a})] d\tau - \int_0^T \frac{\partial g(\tau, \mathbf{a})}{\partial \alpha_i} \frac{\partial s(\tau, \mathbf{a})}{\partial \alpha_j} d\tau \quad (8-181)$$

注意到上式中 $[x(\tau) - s(\tau, \mathbf{a})] = n(\tau)$ 的数学期望为零。这样,把式(8-181)代入式(8-179),得

$$F_{ij} = \int_0^T \frac{\partial g(\tau, \mathbf{a})}{\partial \alpha_i} \frac{\partial s(\tau, \mathbf{a})}{\partial \alpha_j} d\tau \quad (8-182)$$

\mathbf{F} 的逆矩阵为 $\boldsymbol{\psi}$, 求出 $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{F}^{-1}$ 之后,即可得到克拉默-拉奥不等式为

$$\sigma_{\hat{\mathbf{a}}_{\text{ML}}}^2 \geq \psi_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (8-183)$$

8.4.2 随机相位信号

现在进一步考虑相位均匀分布的窄带信号情况,求似然函数时把相位作为杂散参量平均掉,这是白噪声情况下随机相位信号参量估计的直接推广。

在窄带信号情况下,接收的混合信号 $x(t)$ 可用复包络 $\tilde{x}(t)$ 表示为

$$x(t) = \text{Re}\{\tilde{x}(t)e^{j\omega_0 t}\} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8-184)$$

而复包络 $\tilde{x}(t)$ 由两部分组成

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}(t)e^{j\theta} + \tilde{n}(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8-185)$$

式中, $\tilde{A}(t)e^{j\theta}$ 是有用信号成分的复包络, $\tilde{n}(t)$ 是噪声的复包络。具体说来,对于能量为 E , 相位为 θ 的有用信号而言,接收信号的复包络是

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}_x(t)e^{j\theta} + \tilde{n}(t) = (2E)^{1/2} \tilde{a}_x(t)e^{j\theta} + \tilde{n}(t) \quad (8-186)$$

对于高信噪比的情况,平均了相位参量之后,对数似然函数可写成

$$\ln p_{\theta}(x) \approx \ln k + D \quad (8-187)$$

式中

$$D = \left| \int_0^T \tilde{x}(t) \tilde{g}^*(t) dt \right| \quad (8-188)$$

而 $\tilde{g}(t)$ 是下式的解

$$\int_0^T \tilde{R}(t-\tau) \tilde{g}(\tau) d\tau = (2E)^{1/2} \tilde{a}(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8-189)$$

这里 $(2E)^{1/2} \tilde{a}(t)$ 是确知的本地信号的复包络,它与接收信号中有用信号成分的复包络 $(2E)^{1/2} \tilde{a}_x(t)$ 在待估计的信号参量方面有小的差别。这样,在高信噪比条件下,对数似然比近似为

$$\ln p_{\theta}(x) \propto \left| \int_0^T \tilde{x}(t) \tilde{g}^*(t) dt \right| \quad (8-190)$$

使上式达到最大的参量就是最大似然估计量。与白噪声情况相比,现在不是将接收信号送入复脉冲响应为 $\tilde{a}^*(T-t)$ 的匹配滤波器后接包络检波器,而是送入复脉冲响应为 $\tilde{g}^*(T-t)$ 的匹配滤波器后接包络检波器,复脉冲响应为 $\tilde{g}^*(T-t)$ 的匹配滤波器,就是窄带广义匹配滤波

器。同白噪声情况相类似,如果要估计诸如信号的载波频率与时延等参量的话,就需要构成一组并列的窄带广义匹配滤波器,由输出出现峰值的时刻及对应的滤波器中心频率来取得时延和频率的估计。

本章小结⁽²⁾

(1) 信号估计也是统计信号处理的一个重要内容,它与信号检测不同,它的功能是要在接收到的含噪信号中尽可能正确地提取随机参量或未知参量,亦即实现估计方差最小的优效估计。实现信号估计的算法称为估计器,它在雷达、通信等有关应用系统中都有重要用途。

(2) 信号估计模型与信号检测模型十分相似,它也是由三个概率空间和两次概率转换组成的,但是其中的区别在于用 M 维参量空间来代替信号检测模型中的 m 维状态空间,相应地用 M 维估计空间来代替原来的 m 维判决空间。

(3) 在信号检测中采用代价系数(即加权系数)来衡量风险因子,而在信号估计中则采用代价函数来代替。信号估计中的代价函数定义为估计误差的函数,而估计误差正是信号参量估计与真值之差,这两者均应视为随机变量,因此估计误差也应是随机变量。

(4) 信号估计的方法也有多种,最常用的是贝叶斯估计、极大极小估计和最大似然估计这三种。根据所采用的估计准则不同,贝叶斯估计又可分为最小方差估计、最大后验估计和后验中数估计三类,它们分别对应于上述三种不同的代价函数,但是在高斯信道中估计高斯参量,可以证明采用上述三种贝叶斯估计方法的结果都是一样的,并且都是无偏和估计方差最小的优效估计。

(5) 在信号参量先验知识缺少的情况下可以采用极大极小估计,它是在假定最不利的先验概率条件下来寻求最小的估计方差,这里将方差为无限大的高斯分布为最不利的概率分布。在极大极小估计方法中计算出来的估计量虽然是无偏的,但其估计方差要比贝叶斯估计方法大,亦即其平均风险并不是最小的。

(6) 最大似然估计也是用于对信号参量的先验概率未知的情况下,但它是将似然函数最大处的参量作为估计量,因此不仅对未知先验概率的随机参量估计适用,同时对非随机的未知参量同样适用。采用最大似然估计的估计量与极大极小估计量相似,由于无法利用信号参量的先验知识,因此其估计质量都不如贝叶斯估计那样好,亦即它们的平均风险要比贝叶斯估计大。

(7) 克拉默-拉奥(C-R)下限是代表估计质量的理论最佳值,亦即估计方差的理论最小值。可以证明,在具有高斯型后验概率密度的情况下,其估计方差可以达到 C-R 下限,这就说明在高斯信道中采用贝叶斯估计信号参量可以实现优效估计,而采用极大极小估计或最大似然估计则可以实现渐近的优效估计。

(8) 本章以随机信号幅度、相位、频率和时延为例,分析计算在白色高斯信道中单参量信号估计的方法,并获得实现上述不同算法的估计器(或称最佳接收机)。在不同的应用系统中不仅要考虑估计器的估计质量,同时还应考虑实现这些估计器的复杂性和其他因素。

(9) 多参量估计是指同时估计随机信号的几个参数,因此要采用联合估计的方案。它不仅算法复杂,而且实现起来也有一定困难,因此在确定估计器方案时应该与分别对单参量估计的方案进行比较。本章以同时估计频率和时延为例,来说明联合多参量估计的计算过程和可能达到的 C-R 下限。

(10) 本章还简要介绍了在高斯色噪声下的信号参量估计的概念。

(11) 在信号参量先验密度函数全然未知的情况下,可采用估计信号参量与检测信号同时

进行的一种方法——最大似然检测。它是先求未知参量的最大似然估计值,然后把估计值当作参量的真值使用,用检测确知信号的方法来检测。

习 题 八

- 8.1 考虑二元参量信号的广义似然比检验问题。若两个假设下观测信号分别为

$$H_0: x_k = n_k, \quad H_1: x_k = m + n_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

式中,参量 m 是未知参量;噪声 $n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 且 $n_k (k=1, 2, \dots, n)$ 之间相互统计独立。

若似然比检测门限 Λ_0 已知,求采用广义似然比检验的判决表示式(提示:未知参量 m 的最大似然估计量

$$\hat{m}_{\text{ML}}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k)。$$

- 8.2 设观测信号

$$x(t) = a \cos(\omega_2 t + \theta) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

式中, $n(t)$ 是均值为零、功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声; a 是已知的信号振幅;随机相位 θ 在 $(-\pi, \pi)$ 上均匀分布;频率 ω_2 是待估计量。如果对随机相位 θ 统计平均之后利用最大似然估计原理来估计频率 ω_2 ;请问估计频率 ω_2 的接收机的结构是怎样的?

- 8.3 若信号为

$$s(t; a) = a s(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

式中, $s(t)$ 是完全已知的,且满足 $\int_0^T s^2(t) dt = 1$; 振幅 a 是待估计的信号参量。设观测方程为

$$x(t) = s(t; a) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

式中, $n(t)$ 是均值为零、功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声。现在假定知道振幅 a 的先验概率密度函数服从均值为零、方差为 σ_a^2 的高斯分布,即

$$p(a) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_a^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{a^2}{2\sigma_a^2} \right]$$

(1) 求振幅 a 的最大后验估计量 \hat{a}_{MAP} 及估计器的结构。

(2) 求振幅 a 的最大后验估计量 \hat{a}_{MAP} 的均方误差 $E[(a - \hat{a}_{\text{MAP}})^2]$ 。

(3) 如果信号振幅 a 的先验概率密度函数服从瑞利分布,即

$$p(a) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma_a^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}\right), & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

求振幅 a 的最大后验估计量 \hat{a}_{MAP} 。

- 8.4 考虑在均值为零、方差为 σ_n^2 的加性高斯白噪声 \mathbf{n} 中接收信号 \mathbf{s} , 已知信号 \mathbf{s} 在 $-s_M$ 与 $+s_M$ 之间均匀分布。单次观测方程为 $\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$, 求 \mathbf{s} 的最佳估计。

- 8.5 设正弦信号为

$$s(t; a, \varphi) = a \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

式中,频率 ω_0 已知;我们希望通过 n 次观测的数据 $x_k (k=1, 2, \dots, n)$ 来估计信号的振幅 a 和相位 φ , 其中 $a > 0, -\pi \leq \varphi \leq \pi$ 。

- 8.6 高斯(正态)分布是一种重要的分布,广泛应用在信号处理系统中。现根据高斯分布的 n 个统计独立的样本 $x_k (k=1, 2, \dots, n)$, 估计其均值 m_x 和方差 σ^2 。

(1) 如果方差 σ^2 已知,求均值 m_x 的最大似然估计量 $\hat{m}_{x\text{ML}}$, 并考查其主要性质;

如果均值 m_x 已知,求方差 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_{x\text{ML}}^2$, 并考查其主要性质;

均值 m_x 和方差 σ^2 均未知,同时求均值 m_x 和方差 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{m}_{x\text{ML}}$ 和 $\hat{\sigma}_{x\text{ML}}^2$, 分别考查它们的主

要性质。

(2) 如果样本数 n 足够大, 使 $(n-1)/n \approx 1$, 从而允许我们认为 $(n-1)/n = 1$ 。在这种条件下, 研究同时获得的估计量 \hat{m}_{ML} 和 $\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$ 的无偏性、克拉默-拉奥界限和有效性。

8.7 若时变线性观测方程为

$$x_k = h_k \theta + n_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

其中, θ 是方差为 σ_θ^2 的零均值待估计的高斯随机变量; n_k 是方差为 σ_n^2 的零均值高斯白噪声, 且 $E(\theta n_k) = 0$ 。

(1) 求 θ 的最小均方误差估计量 $\hat{\theta}_{\text{MSE}}$ 和最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$, 并考查其主要性质。

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{\sigma_\theta^2} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}\right), & \theta \geq 0 \\ 0, & \theta < 0 \end{cases}$$

(2) 求 θ 的最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 。

8.8 假定信号 $s(t; \theta)$ 是由两个独立的高斯随机变量 a 和 b 同时对一个正弦波的频率和振幅进行调制而产生的, 即

$$s(t; \theta) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} b \sin(\omega_0 t + \beta a t)$$

设 a 和 b 分别服从 $a \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$, $b \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$; 观测是在功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的零均值加性高斯白噪声 $n(t)$ 中完成的, 即

$$x(t) = s(t; \theta) + n(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} b \sin(\omega_0 t + \beta a t) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

求同时估计 a 和 b 时的均方误差下界。

8.9 设 \mathbf{x} 为一测量数据矢量, 它服从下面的观测方程:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{w}$$

式中, \mathbf{H} 为观测矩阵, \mathbf{s} 代表不可观测的状态矢量, 而 \mathbf{w} 是加性观测噪声矢量。假定观测噪声矢量服从高斯分布

$$p(\mathbf{w}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\mathbf{R}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{w}\right)$$

式中, \mathbf{R} 是观测噪声矢量的协方差矩阵, 则 $|\mathbf{R}|$ 为行列式。求未知状态矢量 \mathbf{x} 的最大似然估计 $\hat{\mathbf{x}}$ 和估计误差矢量 $\epsilon = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ 的协方差矩阵 \mathbf{P}_ϵ 。这一问题称为线性高斯测量情况下的最大似然估计。

8.10 一观测方程由下式描述, 式中 \mathbf{s} 为一确定性的未知参数, 而观测噪声矢量 \mathbf{w} 服从正态分布:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{s} + \mathbf{w} \quad \text{及} \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}\right)$$

求 \mathbf{s} 的最大似然估计。

8.11 考虑使用 N 个随机变量观测值 s_1, s_2, \dots, s_n 估计一随机变量 \mathbf{x} 的一般情况。若随机变量为复变量, 并且 \mathbf{x} 的估计取作

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{w}^H \mathbf{s} + b$$

式中 $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$ 为观测数据矢量。求使均方误差为阳小的最优滤波器 $\mathbf{w} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T$ 和最小均方误差的表达式。

8.12 研究在加性噪声中随机参量 θ 的估计问题。线性观测方程为

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\theta + \mathbf{n}$$

式中, 观测信号矢量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; 观测矩阵 $\mathbf{H} = (1, 1, \dots, 1)^T$; 观测噪声矢量 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_n)^T$, 其每个分量 n_k 是均值为零、方差为 σ_n^2 的高斯白噪声; θ 是被估计的单随机参量, 其先验概率密度函数的均值为 m_θ , 方差为 σ_θ^2 , 且是高斯分布的。求 θ 的贝叶斯估计量 $\hat{\theta}_b$, 并考察其主要性质。

第9章 波形估计

9.1 概述

在第8章讨论的是信号参量估计,它假定信号参量在观测时间内是不变的,因而属于静态估计。但在许多实际问题中信号参量本身就是个随机过程,因此要估计的是信号波形。本章将要讨论的滤波理论是估计理论的一个重要组成部分。和信号参量的估计不同,滤波理论是用来估计信号的波形或系统状态的。本章我们将讨论最佳线性估计理论,即维纳滤波和卡尔曼滤波理论,它们都是在线性滤波的前提下,以最小均方误差为最佳准则的。采用最小均方误差准则作为最佳滤波准则的原因在于,这种准则下的理论分析比较简单,因而可能得到解析的结果。贝叶斯估计和最大似然估计都要求对观测值做概率描述,线性最小均方误差估计却放松了要求,不再涉及所有的概率假设,而只保留对前二阶矩的要求。

最佳线性滤波问题所要解决的问题是:给定有用信号和加性噪声的混合信号波形,寻求一种线性运算作用于此混合波形,得到的结果将是信号与噪声的最佳分离,最佳的含义就是使估计的均方误差最小。

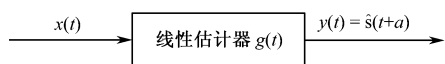


图 9.1 线性估计器框图

我们将要讨论的维纳滤波和卡尔曼滤波就是这种最佳线性滤波。维纳滤波是用线性滤波器实现对平稳随机过程的最佳线性估计,而卡尔曼滤波则用递推估计的算法解决包括非平稳随机过程在

内的波形的最佳线性估计问题。

图 9.1 示出线性估计器的框图。假定在 $(0, T)$ 时间内的观测波形为

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (9-1)$$

式中, $s(t)$ 代表被估计的信号波形, $n(t)$ 是观测的加性噪声。图 9.1 中 $g(t)$ 表示滤波器的加权函数, 输出 $y(t)$ 表示信号 $s(t+\alpha)$ 的估计量 $\hat{s}(t+\alpha)$ 。根据 α 的数值范围的不同, 波形估计可以分为如下三种类型:

① 若 $\alpha=0$, 则称为滤波, 即该估计器试图从观测波形 $x(t)$ 中, 尽可能地排除噪声 $n(t)$ 的干扰, 分离出信号 $s(t)$ 本身。它是根据当前和过去的观测值 $x(t), x(t-1), \dots$, 对当前的信号值 $s(t)$ 进行估计, 使 $x(t) = \hat{s}(t)$ 。

② 若 $\alpha>0$, 则称为预测(或外推), 即该估计器试图估计现时刻 t 以后(未来) α 个时间单位的信号波形值, 如雷达预测运动目标的轨迹等属于这种情况。它是根据过去的观测值估计当前或未来的信号值, 使 $x(t) = \hat{s}(t+\alpha), \alpha>0$ 。

③ 若 $\alpha<0$, 则称为平滑(或内插), 即该估计器试图估计现时刻 t 以前(过去) α 个时间单位的信号波形值, 如数据平滑、地物照片处理等属于这种情况。它是根据过去的观测值估计过去的信号值, 使 $x(t) = \hat{s}(t+\alpha), \alpha<0$ 。

9.2 连续随机过程的维纳滤波

第2章讨论的匹配滤波是在白噪声或有色噪声背景下,接收一个确定性信号。在此讨论的维纳(Wiener)滤波是在白噪声或有色噪声背景下接收随机信号。

接收机为了从干扰中分离出信号,有效的方法之一就是滤波。由于信号和干扰的频谱往往是重叠(或部分重叠)的,所以这种方法要解决的中心问题就是求系统的最佳滤波特性。要衡量某一系统滤波特性的好坏,必须有一定的标准或准则,维纳滤波所采用的准则是最小均方误差准则。这种使均方误差最小的最佳滤波器,适用于需要从噪声中分出有用信号的整个波形,而不是它的一个或某几个参量的情况,更不同于使信噪比达到最大的匹配滤波器。还要注意的是,维纳滤波器也不是自适应滤波器,自适应滤波器的滤波系数是时变的,而维纳滤波器的参数是固定的,它适用于二阶统计特性不随时间变化的平稳随机过程。

参照图 9.1,设系统的输出 $y(t)$ 是所需信号 $s(t+\alpha)$ 的近似,它们之间的误差定义为

$$e(t) = s(t+\alpha) - y(t) \quad (9-2)$$

显然 $e(t)$ 也是随机过程,因此只能用其平方的均值来衡量“滤波”的质量。由式(9-2)得均方误差为

$$E[e^2(t)] = E\{[s(t+\alpha) - y(t)]^2\} \quad (9-3)$$

由于维纳滤波限于讨论平稳随机过程,而且一般是各态历经性的,所以式(9-3)又可写成时间平均形式

$$E[e^2(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [s(t+\alpha) - y(t)]^2 dt \quad (9-4)$$

现在假定 $x(t)$ 或 $y(t)$ 都是平稳随机过程,而且两者是联合平稳的。这就等效于规定观测时间从 $t = -\infty$ 就开始了,而系统参数也必须与时间无关,是非时变的。于是在稳态情况下,可将输出 $y(t)$ 写成卷积积分

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)[s(t-u) + n(t-u)]du \quad (9-5)$$

值得说明的是,在线性系统理论中,系统的输入和输出关系常写成

$$y(t) = \int_0^t h(t, \tau)x(\tau)d\tau \quad (9-6)$$

式中,系统时变冲激响应 $h(t, \tau)$ 定义在零状态下系统在瞬间 τ 加入的冲激函数在瞬间 t 产生的响应。

然而,在滤波理论中,常采用系统加权函数而不采用冲激响应。加权函数这一名词的出现,是因为在某瞬间 t ,式(9-6)的输出函数值取决于输入函数在 0 到 t 区间上的加权平均值。在每一瞬间 t , $h(t, \tau)$ 说明系统如何适当记忆 $x(t)$ 的过去值并相应地对它们加权。虽然加权函数和冲击响应都是 t 和 τ 的函数并描述同一物理过程,但二者具有不同的物理含义。冲激响应是 t 的函数,而把 τ 看作固定参量,它是冲激函数的作用时间。但加权函数则是 τ 的函数,而把 t 看作固定参量。因此,可将输入和输出关系用时变加权函数表示为

$$y(t) = \int_0^t g(\tau, t)x(t-\tau)d\tau \quad (9-7)$$

显然,式(9-6)和式(9-7)应当是等效的,冲激响应和加权函数之间的关系可通过适当地改变式(9-6)或式(9-7)中的变量,然后再比较两个积分而获得,其结果是

$$h(t, \tau) = g(t - \tau, t) \text{ 或 } g(\tau, t) = h(t, t - \tau)$$

对于非时变系统情况, $g(\tau, t)$ 与 t 无关, 记为 $g(\tau)$, 并与 $h(\tau)$ 相等, 即

$$g(\tau) = h(\tau) \quad (9-8)$$

将式(9-5)代入式(9-4)得

$$E[e^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)g(v)R_{xx}(u-v)dudv - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)R_{xs}(\alpha+u)du + R_{ss}(0) \quad (9-9)$$

式中, R_{ss} 为 $s(t)$ 的自相关函数; $R_{ss}(0)$ 为 $s(t)$ 的平均功率; R_{xx} 为 $x(t)$ 的自相关函数; R_{xs} 为 $x(t)$ 和 $s(t)$ 的互相关函数。

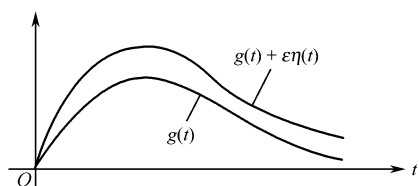


图 9.2 最佳的和受扰的加权函数

顺便指出, 若信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 不相关, 则信号与噪声之间的互相关函数为零, 即

$$R_{sn} = R_{ns} = 0$$

于是, 可得

$$R_{xx} = R_{ss} + R_{nn}, \quad R_{xs} = R_{sx}$$

由于假定信号和噪声的自相关函数与互相关函数都是已知的, 因而由式(9-9)出发可求解加权函数 $g(t)$ 。

由式(9-9)可知, 当输入信号与噪声的统计特性已经确定时, 它的第三项与系统特性无关, 而第一、二项均与系统特性 $g(t)$ 有关。由于 $E[e^2(t)]$ 是 $g(t)$ 的函数, 对应于不同的 $g(t)$ 有不同的 $E[e^2(t)]$ 。因而寻求维纳滤波器的问题也就归结为寻求使用式(9-9)达到最小值的线性系统的加权函数 $g(t)$ 。这个问题可以用变分法解决。按照常用的一次变分方法, 用受扰加权函数 $g(u) + \epsilon\eta(u)$ 代替 $g(u)$ 。这里 ϵ 是一个绝对值较小的参数, 称为扰动因子。 $\eta(u)$ 为任一有连续导数的函数, 称为扰动函数。显然当 ϵ 趋于零时, 受扰加权函数接近于最佳函数 $g(u)$ 。最佳加权函数和受扰的加权函数示于图 9.2 中。用 $g(u) + \epsilon\eta(u)$ 代替式(9-9)中的 $g(u)$, 得

$$E[e^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [g(u) + \epsilon\eta(u)][g(v) + \epsilon\eta(v)]R_{xx}(u-v)dudv - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} [g(u) + \epsilon\eta(u)]R_{xs}(\alpha+u)du + R_{ss}(0) \quad (9-10)$$

应当注意到, 现在 $E[e^2]$ 是 ϵ 的函数, 且式(9-10)在 $\epsilon=0$ 时将有最小值。为求 $E[e^2]$ 为最小值的必要条件, 可利用对参数求导数的法则将 $E[e^2]$ 对 ϵ 求导, 并令 $\epsilon=0$ 时该导数为零。在通过交换积分变量之后, 其结果为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\tau) \left[-R_{xs}(\alpha+\tau) + \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)R_{xx}(u-\tau)du \right] d\tau = 0 \quad (9-11)$$

式(9-11)便是维纳滤波器必须满足的基本方程, 也是今后讨论的出发点。为求解上式, 下面分别考察非因果解和因果解两种情况。

9.2.1 非因果解

若对滤波器加权函数不施加限制, 即假定加权函数 $g(t)$ 是非因果性的, 则较容易获得式(9-11)的解。这时要求滤波器使用尚未得到的数据, 因而是物理不可实现的, 这种滤波器不能工作于“在线”实时处理的情况。然而, 在非实时处理的“离线”应用中, 例如对录取数据进行飞行分析时, 非因果解是很有用的, 所以不应该忽视它。

若对 $g(u)$ 无限制, 则同样对抗动函数 $\eta(\tau)$ 无限制。因此, 若式(9-11)中对 τ 的积分为零, 则对所有 τ , 方括号项必须为零, 于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)R_{xx}(u-\tau)du = R_{xs}(\alpha+\tau) \quad (-\infty < \tau < \infty) \quad (9-12)$$

这是第一类弗雷霍姆积分方程。在这种情况下,式(9-12)左边的项恰好具有卷积积分的形式,利用拉普拉斯变换法很快就可解出。因此,两边取拉普拉斯变换,有

$$G(s)S_{xx}(s) = S_{xs}(s)e^{as} \text{ 或 } G(s) = \frac{S_{xs}(s)e^{as}}{S_{xx}(s)} \quad (9-13)$$

式中, $S_{xx}(s)$ 表示 $x(t)$ 的功率谱密度, $S_{xs}(s)$ 表示 $x(t)$ 与 $s(t)$ 的互功率谱密度, $G(s)$ 是 $g(\tau)$ 的拉普拉斯变换。显然,加权函数 $g(\tau)$ 可通过式(9-13)的逆变换而获得。当信号与噪声不相关时,式(9-13)变为

$$G(s) = \frac{S_s(s)e^{as}}{S_{xx}(s)}$$

滤波器的均方误差由式(9-9)给出。若 $g(u)$ 是满足式(9-12)的最佳加权函数,则均方误差的计算可简化如下:首先将式(9-9)的第二项写成两个相等之和,并将其中之一项与第一项合并,经重新排列各项之后,有

$$\begin{aligned} E[e^2] &= R_{ss}(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)R_{xs}(\alpha+u)du + \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \left[-R_{xs}(\alpha+u) + \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)R_{xx}(v-u)dv \right] du \end{aligned} \quad (9-14)$$

上式中,在 $g(v)$ 为最佳时,对于所有 u ,方括号内的值为零,因此最小均方误差为

$$I = E[e^2]_{\min} = R_{ss}(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)R_{xs}(\alpha+u)du \quad (9-15)$$

式(9-15)所示的最小均方误差公式可改写为如下频域表达式

$$I = E[e^2]_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S_s(j\omega) - G(j\omega)S_{xs}(j\omega)e^{j\alpha\omega}]d\omega$$

当信号与噪声不相关,即 $S_{xs}(j\omega) = S_s(j\omega)$,且在 $\alpha=0$ 时,上式变为

$$I = E[e^2]_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_s(j\omega)S_{nn}(j\omega)}{S_s(j\omega) + S_{nn}(j\omega)}d\omega \quad (9-16)$$

由式(9-16)可看出,信号与噪声的功率谱 $S_s(j\omega)$ 和 $S_{nn}(j\omega)$ 在频域上重叠越少,滤波效果越好。当两者完全不重叠时,理论上可做到 $E[e^2]_{\min}=0$ 。

【例 9.1】 考虑图 9.3 所示的高斯-马尔可夫信号和白噪声的混合(注意:具有指数型相关函数的平稳高斯过程,称为高斯-马尔可夫信号^①见例 9.5 题)。我们希望求出最佳的非因果滤波器($\alpha=0$)。为了简化计算,设 $\sigma^2=\beta=A=1$ 。因为信号和噪声是不相关的,所以

$$S_{xx}(s) = S_{ss}(s) + S_{nn}(s) = \frac{2}{-s^2+1} + 1 = \frac{-s^2+3}{-s^2+1}$$

$$S_{xs}(s) = S_{ss}(s) = \frac{2}{-s^2+1}, \quad e^{as} = 1$$

根据式(9-13)得
$$G(s) = \left(\frac{2}{-s^2+1} \right) / \left(\frac{-s^2+3}{-s^2+1} \right) = \frac{2}{-s^2+3}$$

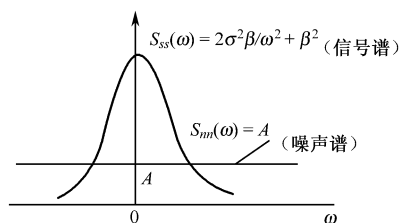
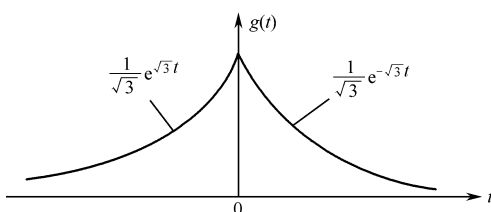


图 9.3 信号和噪声的功率谱密度

^① 功率谱密度为 $S_s(\omega) = \frac{2\sigma^2\beta}{\beta^2 + \omega^2}$ 这种形式的信号属于高斯-马尔可夫信号。

将上式用部分分式展开,得

$$G(s) = \frac{1/\sqrt{3}}{s+\sqrt{3}} + \frac{1/\sqrt{3}}{-s+\sqrt{3}}$$



$g(t)$ 的正和负时间部分由上式的第一项和第二项给出。因此

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}t} & (t \geq 0) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}t} & (t < 0) \end{cases}$$

图 9.4 最佳非因果滤波器的加权函数

这便是最佳的非因果加权函数,如图 9.4 所示。

利用式(9-15)可得非因果最佳滤波器的均方误差为

$$E[e^2]_{\min} \approx 0.577$$

从式(9-13)可看出,最佳加权函数 $g(t)$ 的求解,仅与信号和噪声的相关函数或功率谱有关,而与其幅度分布无关,因而在本例中对信号的高斯假设是多余的,上述结果对其他分布的马尔可夫信号也是适用的。

【例 9.2】 设观测过程为 $x(t)=s(t)+n(t)$, $x(t)$ 与 $s(t)$ 均为零均值,弱平稳; $s(t)$ 与 $n(t)$ 互不相关,并且

$$R_{ss}(\tau) = e^{-a|\tau|} \quad (a > 0)$$

$$R_{nn}(\tau) = e^{-b|\tau|} \quad (b > 0)$$

试设计一个维纳滤波器 $H(\omega) = \frac{S_{xs}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$ 的冲激响应 $h(\tau)$ ①,并求最小均方误差 I 。

解: 因为

$$R_{ss}(\tau) = e^{-a|\tau|} \leftrightarrow S_{ss}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$R_{nn}(\tau) = e^{-b|\tau|} \leftrightarrow S_{nn}(\omega) = \frac{2b}{b^2 + \omega^2}$$

则得

$$H(\omega) = \frac{S_{ss}(\omega)}{S_{ss}(\omega) + S_{nn}(\omega)} = \frac{a(\omega^2 + b)}{(a+b)\omega^2 + ab(a+b)} = \frac{a}{a+b} \left[1 + \frac{b(b-a)}{\omega^2 + ab} \right]$$

由此可得

$$h(\tau) = \frac{a}{a+b} \left[\delta(\tau) + \frac{b(b-a)}{2\sqrt{ab}} e^{-\sqrt{ab}|\tau|} \right]$$

及

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{ss}(\omega)S_{nn}(\omega)}{S_{ss}(\omega) + S_{nn}(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2ab}{a+b} \frac{1}{\omega^2 + ab} d\omega = \frac{2\pi\sqrt{ab}}{a+b}$$

9.2.2 因果解(频谱因式分解法)

为便于参照,重新写出用变分法得出的维纳滤波方程式(9-11),即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\tau) \left[-R_{xs}(\alpha + \tau) + \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)R_{xx}(u - \tau) du \right] d\tau = 0$$

前面谈到 $\eta(\tau)$ 是一个任意的扰动函数。若限制滤波器的加权函数是因果性的,则必须对

① 对于非时变系数 $h(\tau)=g(\tau)$,见式(9-8)。

$\eta(\tau)$ 做类似的限制。否则,得到的是无限制的(非因果)解。因此,对于因果情况,要求 τ 为负值时, $\eta(\tau)=0$,而 τ 为正值时,允许 $\eta(\tau)$ 为任意值。 $\tau < 0$ 时,由于限制 $\eta(\tau)=0$,式(9-11)总是满足的。而 $\tau \geq 0$ 时,要满足式(9-11),则其方括号中的项必须为零,于是得到下列积分方程

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)R_{xx}(u-\tau)du - R_{xx}(\alpha+\tau) = 0 \quad (\tau \geq 0) \quad (9-17)$$

此式称为维纳-霍夫(Wiener-Hoff)方程,由于它仅仅对 $\tau \geq 0$ 有效,这就使得解法更为复杂。

维纳-霍夫积分方程式(9-17)是处理最佳线性滤波问题的一个重要工具,在各种具体条件下求解这个方程,便可得到相应的维纳滤波器的加权函数。具体解法有两种。一种是“时域”解法,即直接由式(9-17)求出各种具体条件下最佳线性滤波器的加权函数。另一种是“频域”解法,需要把时域上的维纳-霍夫积分方程转化为相应的频域上的方程,这便是下面所采用的方法。

式(9-17)的一种基于频谱因式分解的解法如下:首先,为了使用卷积定理求解,需将式(9-17)对 τ 成立的区间扩大到 $(-\infty, +\infty)$,为此,用一未知的负时间函数 $\alpha(\tau)$ ^①代替其右边,于是,式(9-17)可写成

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)R_{xx}(u-\tau)du - R_{xx}(\alpha+\tau) = \alpha(\tau) \quad (-\infty < \tau < \infty) \quad (9-18)$$

将上式两边取拉普拉斯变换,得

$$G(s)S_{xx}(s) - S_{xx}(s)e^{as} = A(s) \quad (9-19)$$

我们知道,在平稳随机过程情况下,输入和输出谱函数可用如下方程联系起来,即

$$S_y(j\omega) = |G(j\omega)|^2 S_{xx}(j\omega) \text{ 或写成 } S_y(s) = G(s)G(-s)S_{xx}(s)$$

式中,功率谱函数 $S(j\omega)$ 与相关函数 $R(\tau)$ 的关系为

$$S_y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau, \quad S_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$S_y(s)$ 可因式分解成两部分,即

$$S_y(s) = S_y^+(s)S_y^-(s)$$

式中, $S_y^+(s)$ 所有极点和零点都在左半平面; $S_y^-(s)$ 所有极点和零点都在右半平面。因此,式(9-19)可写成

$$G(s)S_{xx}^+(s)S_{xx}^-(s) - S_{xx}(s)e^{as} = A(s)$$

或

$$G(s)S_{xx}^+(s) = \frac{A(s)}{S_{xx}^-(s)} + \frac{S_{xx}(s)e^{as}}{S_{xx}^-(s)} \quad (9-20)$$

上述公式中,假定 $G(s)$, $A(s)$ 等拉普拉斯变换都存在,且可表示成有理函数形式。由于 $g(u)$ 是正时间函数,因此, $G(s)$ 的所有极点都在左半平面,于是 $G(s)S_{xx}^+(s)$ 所有极点都在左半平面,而且它的逆变换将是一个正时间函数。同样,由于 $\tau > 0$ 时, $\alpha(\tau)=0$,所以 $A(s)$ 是负时间函数的变换,它的极点都在右半平面,于是 $A(s)/S_{xx}^-(s)$ 的极点都在右半平面。而 $S_{xx}(s)e^{as}/S_{xx}^-(s)$ 有一部分极点在左半平面,另一部分在右半平面。因此,式(9-20)的三项可用文字表达为:

$$[\text{正时间函数}] = [\text{负时间函数}] + [\text{正和负时间函数}]$$

对于 $\tau > 0$ 的解,应该使式(9-20)两边的正时间函数部分相等,故 $G(s)S_{xx}^+(s) = \frac{S_{xx}(s)e^{as}}{S_{xx}^-(s)}$ 的正时间部分,或

① 规定对负的时间, $\alpha(\tau)$ 是未知的,而对正的时间, $\alpha(\tau)$ 为零。

$$G(s) = \frac{1}{S_{xx}^+(s)} \left[\frac{S_{xs}(s)e^{as}}{S_{xx}^-(s)} \right]^+ \quad (9-21)$$

而且 $G(s)$ 的所有极点都在左半平面, 由此可得, 最佳滤波器的加权函数 $g(t)$ 为

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{S_{xx}^+(s)} \left[\frac{S_{xs}(s)e^{at}}{S_{xx}^-(s)} \right] ds \quad (9-22)$$

且当 $t < 0$ 时, $g(t) = 0$, 利用傅里叶变换的性质, 相应的最小均方误差为

$$I = E[e^2]_{\min} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ S_{ss}(s) - \frac{S_{xx}(-s)}{S_{xx}^+(s)} \left[\frac{S_{xs}(s)e^{at}}{S_{xx}^-(s)} \right]^+ \right\} ds \quad (9-23)$$

因为我们要求因果解, 所以不考虑 $\tau < 0$ 的解。于是对式(9-21)中的括号项可解释如下: 首先求 $S_{xs}(s)/S_{xx}^-(s)$ 的逆变换, 其结果通常具有正和负时间函数分量, 并且均必须保留。然后, 将该结果在时间上位移一个值 a (这是考虑到式中 e^{as} 之故)。最后, 对位移后的函数取单边拉普拉斯变换, 就是式(9-21)中方括号内函数的正时间部分。

下面用两个例子来说明维纳-霍夫积分方程的频域解法。

【例 9.3】 考虑与例 9.1 相同的高斯-马尔可夫信号和白噪声的混合。为简化计算, 仍设 $\sigma^2 = \beta = A = 1$, 试求最佳滤波器的因果解。

由于假定信号和噪声是不相关的, 所需的函数为

$$S_{xx}(s) = S_{ss}(s) + S_{nn}(s) = \frac{2}{-s^2 + 1} + 1 = \frac{-s^2 + 3}{-s^2 + 1}$$

$$S_{xs}(s) = S_{ss}(s) = \frac{2}{-s^2 + 1}$$

此外, 由于假定 a 为零, 所以 $e^{as} = 1$ 。

首先因式分解 $S_{xx}(s)$

$$S_{xx}(s) = S_{xx}^+(s)S_{xx}^-(s) = \left[\frac{s + \sqrt{3}}{s + 1} \right] \left[\frac{-s + \sqrt{3}}{-s + 1} \right]$$

接着, 构成 $S_{xs}(s)/S_{xx}^-(s)$ 函数

$$\frac{S_{xs}(s)}{S_{xx}^-(s)} = \left(\frac{2}{-s^2 + 1} \right) / \left(\frac{-s + \sqrt{3}}{-s + 1} \right) = \frac{2}{(-s + \sqrt{3})(s + 1)}$$

上式用部分分式展开, 有

$$\frac{S_{xs}(s)}{S_{xx}^-(s)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{s + 1} + \frac{\sqrt{3} - 1}{-s + \sqrt{3}}$$

显然, 上式的第一项是正时间部分, 因此 $G(s)$ 由式(9-21)给出为

$$G(s) = 1 / \left(\frac{s + \sqrt{3}}{s + 1} \right) \frac{\sqrt{3} - 1}{s + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{s + \sqrt{3}}$$

该滤波器的加权函数是

$$g(t) = \begin{cases} (\sqrt{3} - 1)e^{-\sqrt{3}t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

利用式(9-15), 可得最佳因果滤波器的均方误差为

$$I = E[e^2]_{\min} = 0.732$$

比较例 9.1 和例 9.3 可知, 将所选加权函数的限制条件放松, 则均方误差就减小。实际上, 任何物理可实现的滤波器不可能给出比物理不可实现的滤波器更小的均方误差。所以前面讨论的物理不可实现(非因果)的滤波器在实用中有一定参考价值。

【例 9.4】 已知观测信号 $x(t)=s(t)+n(t)$, 并且信号 $s(t)$ 与噪声 $n(t)$ 都为零均值且互不相关, 又知 $R_{nn}(\tau)=e^{-|\tau|}$, $R_{ss}(\tau)=\frac{7}{12}e^{-2|\tau|}-\frac{1}{6}e^{-|\tau|}$, 试求最佳因果 IIR 滤波器的冲激响应 $h(t)$ 。^①

解: 因为 $R_{nn}(\tau)=e^{-|\tau|} \leftrightarrow S_{nn}(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$

及 $S_{ss}(\omega)=\frac{2\omega^2+1}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$

由题意可得

$$S_{xx}(\omega)=S_{ss}(\omega)=\frac{4\omega^2+9}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$$

令 $s=j\omega$, 则可写为

$$S_{xx}(s)=\frac{9-4s^2}{(s^2-1)(s^2-4)}=S_{xx}^+(s)+S_{xx}^-(s)$$

式中 $S_{xx}^+(s)=\frac{3+2s}{(s+1)(s+2)}$, $S_{xx}^-(s)=\frac{3-2s}{(s-1)(s-2)}$

又因为

$$S_{sx}(\omega)=S_{ss}(\omega)=\frac{2\omega^2+1}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$$

或写成

$$S_{sx}(s)=\frac{1-2s^2}{(s^2-1)(s^2-4)}$$

于是 $\frac{S_{sx}(s)}{S_{xx}^-(s)}=\frac{1-2s^2}{(s+1)(s+2)(3-2s)}=\frac{\frac{4}{5}s+\frac{3}{5}}{(s+1)(s+2)}+\frac{\frac{2}{5}}{2s-3}$

从而, 得 $H(s)=\left[\frac{S_{sx}(s)}{S_{xx}^-(s)}\right]^+ / S_{xx}^+(\omega)=\frac{\frac{4}{5}s+\frac{3}{5}}{3+2s}=\frac{1}{5}\left(2-\frac{3}{2s+3}\right)$

所以将冲激响应为 $h(t)=\frac{2}{5}\delta(t)-\frac{3}{10}e^{-\frac{3}{2}t}u(t)$

【例 9.5】 在随机过程的波形估计中, 有一类称为纯预测问题, 即假设污染信号的加性噪声为零的情况下对波形进行预测。此时需对现时刻 t 经过 a 个单位后的信号进行最佳估计, 维纳滤波理论对这问题也是适用的。假设信号是马尔可夫信号, 即已知其相关函数为

$$R_{ss}(\tau)=\sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$$

此外, 已知 $R_{nn}(\tau)=0$ 。

解: 首先因式分解 $S_{xx}(s)$

$$S_{xx}(s)=S_{ss}(s)=S_{ss}^+(s)S_{ss}^-(s)=\frac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{s+\beta} / \frac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{-s+\beta}$$

然后, 构成 $S_{ss}(s)/S_{xx}^-(s)$ 函数, 即

$$\frac{S_{ss}(s)}{S_{xx}^-(s)}=\frac{S_{ss}(s)}{S_{ss}^-(s)}=S_{ss}^+(s)=\frac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{s+\beta}$$

本题中 $a \neq 0$, 因此上式首先必须乘以 e^{as} , 然后求该结果的正时间部分。这可通过如图 9.5 所

^① 前面已提到, 对于非时变系统 $h(t)=g(t)$, 因此 $H(s)=g(s)$ 。

示的时域中合适的位移来实现 $\left[1 - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{s+\beta}e^{as}\right); 2 - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{s+\beta}\right); 3 - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{s+\beta}e^{as}\right)\right]$ 的正时间部分)。最后将合适的正时间部分代入式(9-21),得

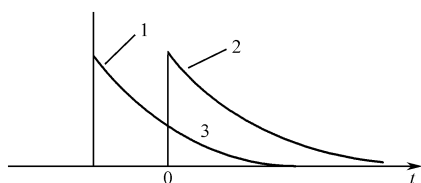


图 9.5 例 9.5 的位移时间函数

$$G(s) = 1 / \left[\frac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{s+\beta} e^{-a\beta} \frac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{s+\beta} \right] = e^{-a\beta}$$

对应的加权函数为

$$g(t) = e^{-a\beta}\delta(t)$$

上述维纳解说明,将输入的当前值乘上一衰减因子 $e^{-a\beta}$,便得到比当前时刻晚 α 单位时刻的关于平稳随机过程的最佳估计。可见,预测估计仅仅取决于输入信号的现刻数值,而与其过去的数值无关,因而具有指数型相关函数的随机过程显然应称为马尔可夫信号。

以上研究的是平稳情况,滤波器的输入和输出都是平稳随机过程。下面简短地讨论一下非平稳情况。假定混合波形 $x(t) = s(t) + n(t)$ 在 $t=0$ 时加入滤波器,并假设滤波器起始静止。这时,虽然输入 $x(t)$ 是平稳过程,其相关函数仍可用 $R_{xx}(\tau)$ 表示,但滤波器输出 $y(t)$ 为非平稳过程,可写为

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (t \geq 0) \quad (9-24)$$

如上所述,理想的输出为 $s(t+\alpha)$ 。因而,滤波器误差为

$$e(t) = s(t+\alpha) - y(t)$$

利用与平稳情况类似的方法,可导出滤波器的均方误差

$$E[e^2] = \int_0^t \int_0^t g(u)g(v)R_{xx}(u-v)dudv - 2 \int_0^t g(u)R_{xx}(\alpha+u)du + R_{ss}(0) \quad (9-25)$$

注意上式与式(9-9)类似,仅积分限不同。寻求使 $E[e^2]$ 最小的滤波器加权函数 $g(t)$,仍应使用变分法,其推导步骤与平稳情况完全类似,结果是

$$\int_0^t g(u)R_{xx}(\tau-u)du = R_{ss}(\alpha+\tau) \quad (0 \leq \tau \leq t) \quad (9-26)$$

式(9-26)的积分方程与维纳-霍夫方程式(9-17)完全类似,仅积分限及 τ 的取值范围不同。

9.2.3 正交性

前面已证明,均方误差最小的滤波器的加权函数必须满足积分方程式(9-26)

$$\int_0^t g(u)R_{xx}(\tau-u)du = R_{ss}(\alpha+\tau) \quad (0 \leq \tau \leq t)$$

此外,滤波器的误差

$$e(t) = s(t+\alpha) - y(t) = s(t+\alpha) - \int_0^t g(u)[s(t-u) + n(t-u)]du$$

现在考虑 t 时刻的滤波器误差和 t_1 时刻 $(0 \leq t_1 \leq t)$ 输入之积的数学期望。设输入表示成 $x(t)$, 则 $x(t_1) = s(t_1) + n(t_1)$, 而

$$E[x(t_1)e(t)] = E\{[s(t_1) + n(t_1)]\}s(t+\alpha) - \int_0^t g(u)[s(t-u) + n(t-u)]du\}$$

将上式中的 $s(t_1) + n(t_1)$ 移入积分式内,并进行数学期望运算,得

$$E[x(t_1)e(t)] = R_{xx}(t-t_1+\alpha) - \int_0^t g(u)R_{xx}(t-t_1-u)du$$

然而 $g(u)$ 必须满足积分方程式(9-26)。因此,上式在 $0 \leq (t-t_1) \leq t$ 时必定为零。由于假定 t_1 位于 0 和 t 之间,所以上式等效于

$$E[x(t_1)e(t)] = 0 \quad (0 \leq t_1 \leq t) \quad (9-27)$$

若两个随机变量之积的数学期望为零,则称两变量是正交的。式(9-27)表明:在现时刻 t 滤波器的误差不仅与同一时刻 t 的输入是正交的,而且与任何前一时刻的输入也是正交的。这是最小均方误差准则的必然结果。

上述证明可倒过来进行,也就是说,若一开始就假定 $e(t)$ 和 $x(t_1)$ 是正交的,同样可得出它满足积分方程式(9-26)的结论。因此,正交性条件是线性滤波器满足最小均方误差准则的充分必要条件。不少作者喜欢一开始利用正交关系来论证最佳性,而不是一开始用使均方误差最小来论证最佳性问题。

9.3 离散随机过程的维纳滤波

9.3.1 离散观测情况

最小均方滤波的维纳法基本上是一种加权函数法,其基本问题总可归纳为:如何对输入的现刻值和过去值加权,以便得到所关心的变量在某时刻的最佳估计。弄清这种方法对如何引申到离散观测情况是有启发的。

考虑滤波器的输入为一组带有噪声的离散观测值 x_1, x_2, \dots, x_n , 如图 9.6 所示(下标表示观测所取的时刻)。设 x_i 为信号 s 和噪声 n 的加性混合,即 $x_1 = s_1 + n_1, x_2 = s_2 + n_2$, 等等。如前所述,我们将滤波器的输出表示为 y , 对应的输出样本为 y_1, y_2, \dots, y_n 。由于讨论的是线性估计,我们可将在 t_n 时刻的输出 y_n 写成现刻及过去观测值的线性组合

$$y_n = g_1 x_1 + g_2 x_2 + \dots + g_n x_n$$

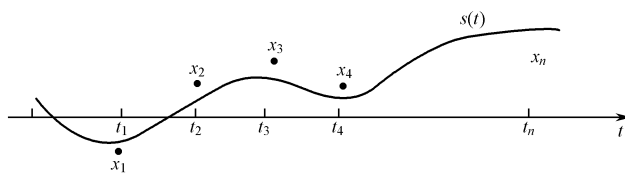


图 9.6 离散观测情况

为了方便计算,先假定信号是非时变的待估随机变量,则滤波器误差可写成

$$e_n = s - y_n = s - (g_1 x_1 + g_2 x_2 + \dots + g_n x_n) = s - \sum_{i=1}^n g_i x_i$$

$$\text{于是均方误差为} \quad E[e_n^2] = E\left\{\left[s - \sum_{i=1}^n g_i x_i\right]^2\right\} \quad (9-28)$$

现在要求选择 g_1, g_2, \dots, g_n , 使 $E[e_n^2]$ 最小,这只需要将式(9-28)对 n 个加权系数 g_i 求偏导数,并令之为零,于是有

$$\frac{\partial E[e_n^2]}{\partial g_i} = -2E\left[s - \sum_{i=1}^n g_i x_i\right]x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (9-29a)$$

$$\text{或写成} \quad \sum_{i=1}^n g_i E[x_i x_j] = E[s x_j] \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (9-29b)$$

也可用如下矩阵方程表示

$$\begin{bmatrix} E(x_1^2) & E(x_1 x_2) & \cdots & E(x_1 x_n) \\ E(x_2 x_1) & E(x_2^2) & \cdots & E(x_2 x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(x_n x_1) & E(x_n x_2) & \cdots & E(x_n^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(x_1 s) \\ E(x_2 s) \\ \vdots \\ E(x_n s) \end{bmatrix} \quad (9-30)$$

正如在时频连续系统中一样,假定信号和噪声的自相关函数、信号与噪声的互相关函数都是已知的,因而式(9-30)中各数学期望都可获得,从而由式(9-30)可解出加权系数 g_1, g_2, \dots, g_n 。

现在设

$$E[x_i x_j] = \phi_{xx}(i, j) \quad (9-31)$$

它表示输入序列 $x(j)$ 的自相关函数,这种表示法适用于非平稳序列。若 $x(j)$ 为平稳序列,则 $\phi_{xx}(i, j) = \phi_{xx}(j, -i)$ 。

同样,设

$$E[sx_j] = \phi_{xs}(j) \quad (9-32)$$

表示输入序列 $x(j)$ 与待估信号 s 的互相关函数,于是式(9-29b)变为

$$\sum_{i=1}^n g_i \phi_{xx}(i, j) = \phi_{xs}(j) \quad (9-33)$$

或写为如下矩阵形式

$$\boldsymbol{\phi}_{xx} \mathbf{g} = \boldsymbol{\phi}_{xs} \quad (9-34)$$

式中, $\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_n]$, $\boldsymbol{\phi}_{xx}$ 为自相关矩阵,其元素为 $\phi_{xx}(i, j)$; $\boldsymbol{\phi}_{xs}$ 为互相关矢量,定义为

$$\boldsymbol{\phi}_{xs} = [\phi_{xs}(1), \phi_{xs}(2), \dots, \phi_{xs}(n)]^T \quad (9-35)$$

加权系数 $[g_1, g_2, \dots, g_n]$ 满足式(9-33)或式(9-34)的估计器就是维纳滤波器,式(9-33)或式(9-34)又称为时域离散形式的维纳-霍夫方程。

相应于上述最佳解的均方误差,可由式(9-27)得到:

$$E[e_n^2] = E[s^2] - \sum_{i=1}^n [g_i E(sx_i)] = E[s^2] - \sum_{i=1}^n g_i \phi_{xs}(i) \quad (9-36)$$

应该指出,在上述推导中,曾假定 s 是不随时间变化的随机变量。若假定 $s(i)$ 为一平稳随机过程,亦可得到类似的结果。

还应该指出,由于最小均方误差准则与正交原理等效,我们也可直接从正交原理出发,将式(9-30)写成

$$E[e_n x_j] = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (9-37)$$

式中, e_n 表示估计误差,同样可推导得到维纳-霍夫方程式(9-33)。

可以将上述连续维纳滤波器的推导思路推广到时间离散情形。利用观测数据 $x(n) = s(n) + v(n)$ 对 $s(n)$ 做出最佳线性均方估计。类似地,可分为离散非因果 IIR 或因果 IIR 维纳滤波器。

9.3.2 平稳序列的因果和非因果维纳滤波器

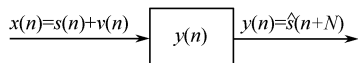


图 9.7 离散维纳滤波器的输入-输出表示

类似于连续过程的维纳滤波(见图 9.1),设计离散过程的维纳滤波器,就是寻求在线性最小均方误差准则下线性滤波器的系统加权函数 $G(z)$ 或单位权值响应 $g(n)$,等同地,寻求系统函数 $H(z)$ 或单位冲激响应 $h(n)$ 。离散滤波器的输入-输出关系如图 9.7 所示。

平稳序列的维纳滤波是建立在求解维纳-霍夫方程基础之上的。但在一般情况下,这是一个相当复杂的过程,原因就是所求得滤波器是因果的,即满足约束条件 $g(k)=0, k<0$ 。为对该问题进行简化,先考虑滤波器为非因果时的情形。此时,用于对 $s(n)$ 的观测可以取从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 所有的值,即 $s(n)$ 的估计值可写成下述线性表达形式。

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k)x(n-k) \quad (9-38)$$

这里的输入

$$x(n) = s(n) + v(n)$$

式中, $s(n)$ 代表信号, $v(n)$ 表示噪声。

希望这种线性系统的输出是尽可能地逼近 $s(n)$ 的某种估计,并用 $\hat{s}(n+N)$ 表示,即

$$y(n) = \hat{s}(n+N)$$

因而该线性系统实际上也就是对于 $s(n)$ 的一种估计器。这种估计器的主要功能是利用当前的观测值 $x(n)$ 以及一系列过去的观测值 $x(n-1), x(n-2), \dots$, 来完成对当前信号值的某种估计。由于这里的信号和噪声都是随机的,所以此类过滤或估计总是一种统计估计。

同样,大体上可将其分成三种形式:

① 若 $N=0$, 则当前的及过去的观测值估计当前的信号值,即由 $x(n), x(n-1), x(n-2), \dots$, 来确定 $\hat{s}(n)$, 这常称作滤波。

② 若 $N>0$, 则由过去的观测值估计当前的甚至将来的信号值,即该估计器试图估计现时刻 n 以后(未来) N 个时间单位的信号波形值,这属于预测或外推。

③ 若 $N<0$, 则由过去的观测值估计过去的信号值,即该估计器试图估计时刻 n 以前(过去) N 个时间单位的信号波形值,这常被称作内插或者平滑。

对于离散维纳滤波,设信号的真值与估计值分别为 $s(n)$ 与 $\hat{s}(n)$, 而它们之间的差为

$$e(n) = s(n) - \hat{s}(n) \quad (9-39a)$$

则它们的均方误差为

$$E[e^2(n)] = \{E[s(n) - \hat{s}(n)]^2\} \quad (9-39b)$$

同样,离散维纳滤波器利用最小均方误差作为最佳准则。类似于连续维纳滤波器。可导出:

(1) 根据式(9-38),相应的离散非因果 IIR 维纳滤波器的维纳-霍夫方程为

$$\phi_{sx}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k)\phi_{xx}(m-k) \quad (9-40)$$

两边取 z 变换,即可解出

$$G(z) = \frac{\Phi_{sx}(z)}{\Phi_{xx}(z)} \quad (9-41)$$

由此,再经过逆 z 变换后,便可求得最佳权值 $g(n)$ 。相应的均方误差为

$$\begin{aligned} I = E[\varepsilon^2] &= E\left\{[s(n) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k)x(n-k)]s(n)\right\} \\ &= \phi_{ss}(0) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k)\phi_{sx}(-k) \end{aligned} \quad (9-42)$$

当滤波器的输入 $x(n) = s(n) + v(n)$ 时,如果 $s(n)$ 和 $v(n)$ 之间不相关且噪声项 $v(n)$ 的均值为零,则可以推出

$$\begin{aligned}\phi_{xs}(m) &= E[x(n)s(n+m)] = E\{[s(n)+v(n)]s(n+m)\} \\ &= E[s(n)s(n+m)] = \phi_{ss}(m)\end{aligned}\quad (9-43)$$

及

$$\begin{aligned}\phi_{xx}(m) &= E[x(n)x(n+m)] = E\{[s(n)+v(n)][s(n+m)+v(n+m)]\} \\ &= E[s(n)s(n+m)] + E[v(n)v(n+m)] = \phi_{ss}(m) + \phi_{vv}(m)\end{aligned}\quad (9-44)$$

对以上进行二次 z 变换后,有 $\Phi_{xs}(z) = \Phi_{ss}(z)$ 及 $\Phi_{xx}(z) = \Phi_{ss}(z) + \Phi_{vv}(z)$ 。把它们代入式(9-41)有

$$G(z) = \frac{\Phi_{ss}(z)}{\Phi_{ss}(z) + \Phi_{vv}(z)} \quad (9-45a)$$

令 $z = e^{j\omega}$ 便可以得到非因果的维纳滤波器的频率响应

$$G(e^{j\omega}) = \frac{S_{ss}(\omega)}{S_{ss}(\omega) + S_{vv}(\omega)} \quad (9-45b)$$

式中, $S_{ss}(\omega)$ 和 $S_{vv}(\omega)$ 分别代表信号和噪声的功率谱密度。

式(9-45b)有着明显的物理意义,它表明在信号功率谱密度为零处,最佳滤波器的幅值应为零;在噪声的功率谱密度为零处,最佳滤波器的幅值应为 1;其余地方,最佳滤波器的幅值应由信号和噪声功率谱密度的比值来确定,比值越大,幅值越接近 1。这一结果是与我们的直观想象相吻合的。

(2) 根据式(9-33),相应的离散非因果 IIR 维纳滤波器的维纳-霍夫方程为

$$\phi_{xx}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k)\phi_{xx}(m-k) \quad (9-46)$$

设

$$S_{xx}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}(k)z^{-k} \quad (\text{其中 } z = e^{j\omega}) \quad (9-47)$$

对 $S_{xx}(z)$ 做因式分解,得到

$$S_{xx}(z) = S_{xx}^+(z)S_{xx}^-(z) \quad (9-48)$$

式中, $S_{xx}^+(z)$ 表示 $S_{xx}(z)$ 的零、极点位于 $|z| < 1$, $S_{xx}^-(z)$ 表示 $S_{xx}(z)$ 的零、极点位于 $|z| > 1$ 。则有

$$\frac{S_{xx}(z)}{S_{xx}^-(z)} = \left[\frac{S_{xx}(z)}{S_{xx}^-(z)} \right]^+ + \left[\frac{S_{xx}(z)}{S_{xx}^-(z)} \right]^- \quad (9-49)$$

于是最佳因果 IIR 维纳滤波器为^①

$$G(z) = \frac{1}{S_{xx}^+(z)} \left[\frac{S_{xx}(z)}{S_{xx}^-(z)} \right]^+ \quad (9-50)$$

$$I = E[e^2] = \phi_{ss}(0) - \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)\phi_{xx}(k) \quad (9-51)$$

【例 9.6】 设接收到的观测序列为 $x(n) = s(n) + w(n)$, 信号序列 $s(n)$ 是平稳、零均值的, 其功率谱为

$$S_{ss}(e^{j\omega}) = \frac{3.5}{4\cos\omega - 8.5}$$

白噪声序列 $w(n)$ 也是零均值的且与 $s(n)$ 互不相关, 其功率谱为

$$S_{ww}(e^{j\omega}) = 1$$

试求: ① 因果 IIR 维纳滤波器的 $G(z)$; ② 非因果 IIR 维纳滤波器的 $G(z)$ 。

① 对于非时变系统有 $G(z) = H(z)$ 。

解:① 因为 $w(n)$ 与 $s(n)$ 互不相关且均为零均值,则有

$$S_{sw}(e^{j\omega}) = S_{ss}(e^{j\omega})$$

令 $z=e^{j\omega}$, 则有 $S_{sw}(z)=1$, 以及

$$S_{sx}(z) = S_{ss}(z) = \frac{3.5z}{2z^2 - 8.5z + 2}$$

于是

$$S_{xx}(z) = S_{ss}(z) + S_{ww}(z) = \frac{2z^2 - 5z + 2}{2z^2 - 8.5z + 2} = \frac{(z-2)(z-0.5)}{(z-4)(z-0.25)}$$

从而有

$$S_{xx}^+(z) = \frac{z-0.5}{z-0.25} \quad S_{xx}^-(z) = \frac{z-2}{z-4}$$

由此得

$$\frac{S_{xx}^+(z)}{S_{xx}^-(z)} = \frac{1.75z}{(z-2)(z-0.25)} = \frac{2}{z-2} + \frac{-0.25}{z-0.25}$$

式中

$$\left[\frac{S_{xx}^+(z)}{S_{xx}^-(z)} \right]^+ = -\frac{0.25}{z-0.25}$$

所以,最佳因果 IIR 维纳滤波器为

$$G(z) = \frac{\left[\frac{S_{xx}^+(z)}{S_{xx}^-(z)} \right]^+}{S_{xx}^+(z)} = -\frac{0.25}{z-0.25} \cdot \frac{z-0.25}{z-0.5} = -\frac{0.25}{z-0.5}$$

或

$$g(n) = -0.25(0.5)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

② 最佳非因果 IIR 维纳滤波器为

$$G(z) = \frac{S_{sx}(z)}{S_{xx}(z)} = \frac{3.5z}{2z^2 - 5z + 2} = \frac{1.75z}{(z-2)(z-0.5)}$$

由于极点 $z=2$ 在单位圆外,使得该滤波器不稳定,故为不可实现的。

9.3.3 白化滤波器

所谓白化滤波器就是将有色高斯噪声变换为白色高斯噪声,这种方法可称为白化,它在许多场合得到广泛应用。

下面我们转回到对因果维纳-霍夫方程的求解,并且只讨论一种特殊情况,即输入信号 $x(n)$ 可由白噪声序列 $w(n)$ 通过一传输函数为 $B(z)$ 的最小相位滤波器而生成。此时由于 $B(z)$ 为最小相位滤波器,故 $1/B(z)$ 也是最小相位滤波器,并且 $x(n)$ 通过该滤波器后会变成白噪声序列,因此我们把滤波器 $1/B(z)$ 称为**白化滤波器**。在上述条件下,所求解的因果维纳滤波器 $H(z)$ 可由图 9.8 所示的两部分组成:首先输入 $x(n)$ 经白化滤波器 $1/B(z)$ 变为一白噪声序列;然后该序列经过滤波器 $G(z)$ 后,形成信号的最小均方误差估计 $\hat{s}(n)$ 。

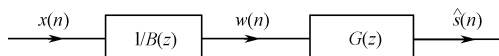


图 9.8 利用白化滤波器求解维纳-霍夫方程的框图

利用 $w(n)$ 为白噪声序列这一条件,很容易求出最佳滤波器 $G(z)$ 的单位权值响应 $g(k)$, $0 \leq k < \infty$ 。实际上由式(9-40)可知,与滤波器 $G(z)$ 相对应的维纳-霍夫方程为

$$\phi_{ws}(m) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k) \phi_{ww}(m-k) \quad (9-52)$$

由于白噪声序列 $w(n)$ 的自相关函数 $\phi_{ww}(m) = \sigma_w^2 \delta(m)$, 其中 σ_w^2 为 $w(n)$ 的方差。代入上式便

可解出

$$g(m) = \begin{cases} \phi_{ws}(m)/\sigma_w^2, & m \geq 0 \\ 0, & m < 0 \end{cases} \quad (9-53)$$

写成 Z 域的形式

$$G(z) = \frac{[\Phi_{ws}(z)]^+}{\sigma_w^2} \quad (9-54)$$

这里 $[\Phi_{ws}(z)]^+$ 表示 $\phi_{ws}(m)u(m)$ 的 Z 变换, 其中 $u(m)$ 为阶跃序列, 它的定义为

$$u(m) = \begin{cases} 1, & m \geq 0 \\ 0, & m < 0 \end{cases}$$

$[\Phi_{ws}(z)]^+$ 与 $\phi_{ws}(m)$ 的 Z 变换 $\Phi_{ws}(z)$ 相比, 仅仅保留了其在单位圆内的极点。这样由图 9.8 可以看出, 最后所要求的维纳滤波器的传输函数 $H(z)$ 应由下式给出

$$H(z) = \frac{G(z)}{\sigma_w^2 B(z)} = \frac{[\Phi_{ws}(z)]^+}{\sigma_w^2 B(z)} \quad (9-55)$$

由于图 9.8 中所示的 $w(n)$ 是一中间序列, 因而上式中的 $\Phi_{ws}(z)$ 不可以直接求出, 这给使用带来了不便。为此, 可以采用下述方法把问题加以转化。根据 $B(z)$ 的因果特性可知

$$x(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} b(k)w(n-k)$$

式中, 单位脉冲响应 $b(n)$ 是 $B(z)$ 的逆变换。把上式两边同乘以 $s(n+m)$ 后取数学期望, 得

$$\begin{aligned} \phi_{xs}(m) &= E[x(n)s(n+m)] = \sum_{k=0}^{+\infty} b(k)E[w(n-k)s(n+m)] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} b(k)\phi_{ws}(m+k) \end{aligned}$$

进行 Z 变换后有

$$\Phi_{xs}(z) = B(z^{-1})\Phi_{ws}(z)$$

这样, 从上式解出 $\Phi_{ws}(z)$ 并代入式(9-55)中便可以得到 $H(z)$ 的表示式

$$H(z) = \frac{1}{\sigma_w^2 B(z)} \left[\frac{\Phi_{xs}(z)}{B(z^{-1})} \right]^+ \quad (9-56)$$

这就是欲求的物理可实现的(因果的)维纳滤波器的系统函数表示式。与非因果维纳滤波器的系统函数相比, 除了加有 $[\]^+$ 这一标志之外, 无其他差别。同样, 因果的维纳滤波器的最小均方误差

$$\begin{aligned} E[e^2(n)]_{\min} &= \phi_{ss}(0) - \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_{ws}^2(k) \\ &= \phi_{ss}(0) - \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\phi_{ws}(k)u(k)]\phi_{ws}(k) \end{aligned} \quad (9-57)$$

于是, 按巴塞瓦尔公式, 这时的最小均方误差的 Z 域表示式可以表示成

$$\begin{aligned} E[e^2(n)]_{\min} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \left\{ \Phi_{ss}(z) - \frac{1}{\sigma_w^2} [\Phi_{ws}(z)]^+ \Phi_{ws}(z^{-1}) \right\} z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \left\{ \Phi_{ss}(z) - \frac{1}{\sigma_w^2} \left[\frac{\Phi_{xs}(z)}{B(z^{-1})} \right]^+ \frac{\Phi_{xs}(z^{-1})}{B(z)} \right\} z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \{ \Phi_{ss}(z) - H_{\text{opt}}(z) \Phi_{xs}(z^{-1}) \} z^{-1} dz \end{aligned} \quad (9-58)$$

【例 9.7】 设已知 $x(n)=s(n)+w(n)$, 以及

$$\Phi_{ss}(z) = \frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$$

$$\Phi_{ww}(z) = 1, \text{ (白噪声)}$$

$$\Phi_{sw}(z) = 0, \text{ (} s(n) \text{ 与 } w(n) \text{ 不相关)}$$

式中, $s(n)$ 为希望得到的信号, $w(n)$ 为加性白噪声。试求物理可实现与物理不可实现两种情况时的 $H_{\text{opt}}(z)$ 与相应的 $E[e^2(n)]_{\min}$ 。

解: 由于 $\Phi_{sw}(z)=0$, 所以

$$\begin{aligned}\Phi_{xx}(z) &= \Phi_{ss}(z) + \Phi_{ww}(z) = \frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)} + 1 \\ &= 1.5 \times \frac{(1-0.4z^{-1})(1-0.4z)}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}\end{aligned}$$

又因为 $\Phi_{xx}(z)=\sigma_w^2 B(z)B(z^{-1})$, 其中 $B(z)$ 为单位圆内的零、极点, $B(z^{-1})$ 由单位圆外的零、极点组成, 同上面的公式相比较, 可得

$$\sigma_w^2 = 1.5, B(z) = \frac{1-0.4z^{-1}}{1-0.6z^{-1}}, B(z^{-1}) = \frac{1-0.4z}{1-0.6z}$$

对于物理可实现情况

$$\begin{aligned}H_{\text{opt}}(z) &= \frac{1}{\sigma_w^2 B(z)} \left[\frac{\Phi_{xs}(z)}{B(z^{-1})} \right] = \frac{1}{\sigma_w^2 B(z)} \left[\frac{\Phi_{ss}(z)}{B(z^{-1})} \right]^+ \\ &= \frac{1-0.6z^{-1}}{1.5(1-0.4z^{-1})} \left[\frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.4z)} \right]^+ \\ \text{由于 } \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.4z)} \right] &= \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-0.6z^{-1}} + \frac{0.4z}{1-0.4z} \right) \right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(0.6)^n}_{(n \geq 0 \text{ 时})} - \underbrace{\frac{1}{2}(2.5)^n}_{(n < 0 \text{ 时})}\end{aligned}$$

因为讨论的是物理可实现情况, 所以应取 $n \geq 0$ 的项, 并有

$$\left[\frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.4z)} \right]^+ = \frac{1/2}{1-0.6z^{-1}}$$

因此

$$H_{\text{opt}}(z) = \frac{1-0.6z^{-1}}{1.5(1-0.4z^{-1})} \frac{1/2}{1-0.6z^{-1}} = \frac{1/3}{1-0.4z^{-1}}$$

考虑到这里的 $\Phi_{xs}(z)=\Phi_{ss}(z)=\Phi_{ss}(z^{-1})=\Phi_{xs}(z^{-1})$, 根据式(9-58), 可得

$$\begin{aligned}E[e^2(n)]_{\min} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c [\Phi_{ss}(z) - H_{\text{opt}}(z)\Phi_{xs}(z^{-1})] z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \left[\frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)} - \frac{1/3}{1-0.4z^{-1}} \frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)} \right] z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{-\frac{0.76}{3 \times 0.6}z + \frac{0.152}{0.6}}{(z-0.4)(z-0.6)[z-(1/0.6)]} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{-\frac{19}{45}(z-0.6)}{(z-0.4)(z-0.6)[z-(1/0.6)]} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{-\frac{19}{45}(z-0.6)}{(z-0.4)(z-0.6)[z-(1/0.6)]} dz\end{aligned}$$

取单位圆做积分围线,上式应为单位圆内极点($z=0.4$)的留数,即有

$$E[e^2(n)]_{\min} = \frac{-19/45}{[0.4 - (1/0.6)]} = \frac{1}{3}$$

而未经该滤波器时的均方误差

$$\begin{aligned} E[e^2(n)] &= E\{[x(n) - s(n)]^2\} \\ &= E[w^2(n)] = \phi_{ww}(0) = 1 \end{aligned}$$

这意味着通过维纳滤波器后均方误差下降了三倍。

对于物理不可实现情况

$$\begin{aligned} H_{\text{opt}} &= \frac{\Phi_{xs}(z)}{\Phi_{xx}(z)} = \frac{\Phi_{ss}(z)}{\Phi_{ss}(z) + \Phi_{ww}(z)} \\ &= \frac{0.38}{(1 - 0.6z^{-1})(1 - 0.6z)} = \frac{0.38}{\frac{0.38}{(1 - 0.6z^{-1})(1 - 0.6z)} + 1} = \frac{0.38}{1.74 - 0.6z - 0.6z^{-1}} \\ &= \frac{\frac{1.16}{1.74} \times 0.38}{\frac{1.16}{1.74}(1.74 - 0.6z - 0.6z^{-1})} = \frac{0.253}{1.16 - 0.4z - 0.4z^{-1}} \\ &= \frac{0.253}{(1 - 0.4z^{-1})(1 - 0.4z)} \\ E[e^2(n)]_{\min} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c [\Phi_{ss}(z) - H_{\text{opt}}(z)\Phi_{xs}(z^{-1})]z^{-1}dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \left\{ \frac{0.38}{(1 - 0.6z^{-1})(1 - 0.6z)} \left[1 - \frac{0.253}{(1 - 0.4z^{-1})(1 - 0.4z)} \right] \right\} z^{-1}dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1.583z(0.907 - 0.4z - 0.4z^{-1})}{(z - 0.6)[z - (1/0.6)](z - 0.4)[z - 1/0.4]} dz \end{aligned}$$

取单位圆做积分围线,在单位圆内有两个极点($z=0.6$, $z=0.4$),因而上式等于这两个极点的留数和,即

$$\begin{aligned} E[e^2(n)]_{\min} &= \frac{1.583 \times 0.6[0.907 - 0.4 \times 0.6 - 0.4 \times (1/0.6)]}{[0.6 - (1/0.6)](0.6 - 0.4)[0.6 - (1/0.4)]} + \\ &\quad \frac{1.583 \times 0.4[0.907 - 0.4 \times 0.4 - 0.4 \times (1/0.4)]}{(0.4 - 0.6)[0.4 - (1/0.6)][0.4 - (1/0.4)]} = 0.302 \end{aligned}$$

前面求得的物理可实现的 $E[e^2(n)]_{\min}=1/3$ 。在此例中物理不可实现的均方误差略小于(或者说稍好于)物理可实现的情况。事实上,可以证明物理可实现条件下的最小均方误差不会小于物理不可实现的情况。

9.4 平稳序列的维纳预测器

此前讨论的维纳滤波器实际上可以看做是一种估计器。它以当前的以及全部过去的观测数据 $x(n)$, $x(n-1)$, $x(n-2)$, \dots , 用来获取当前信号的估计值 $\hat{s}(n)$, 而且令这个估计值与当前的观测值 $x(n)=s(n)+v(n)$ 中的信号值 $s(n)$ 之间的均方误差达到最小。维纳预测器是另一种估计器,它是以观测到的全部过去的的数据来获取当前的或者将来的信号估计值 $\hat{s}(n+N)$, $N \geq 0$ 。

9.4.1 预测器计算公式

一个基本的维纳预测器如图 9.9 所示,预测器希望得到的输出 $y_d(n)$ 为 $s(n+N)$,而真正得到的输出 $y(n)$ 则为 $\hat{s}(n+N)$,它实际上是 $s(n+N)$ 的一种估计值。

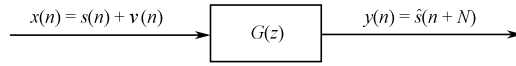


图 9.9 N 步维纳预测器框图

维纳滤波器与维纳预测器并无本质区别,只是前者希望得到的输出为 $s(n)$,而实际得到的输出为 $\hat{s}(n)$;后者希望得到的输出是 $s(n+N)$, $N>0$,但实际得到的输出则为 $\hat{s}(n+N)$, $N>0$ 。

根据图 9.9,不难获得 N 步维纳预测器的输入输出关系,即

$$y(n) = \hat{s}(n+N) \textcircled{1} = \sum_{m=0}^{+\infty} g(m)x(n-m) = \sum_{m=0}^{+\infty} g_i x_i \quad (9-59)$$

为书写方便,令式中 $g_i = g(m)$, $x_i = x(n-m)$ 。

与维纳滤波器的设计相似,维纳预测器的设计实际上也是在所做预测的均方误差 $E[e^2(n+N)] = E\{\hat{s}(n+N) - s(n+N)\}^2$ 最小的条件下确定其 $g(n)$ 或 $G(z)$ 的问题。令

$$E\left\{\frac{\partial E[e^2(n+N)]}{\partial g_i}\right\} = 0 \quad (i \geq 1)$$

$$\begin{aligned} \text{则有} \quad E\left\{\frac{\partial [e^2(n+N)]}{\partial g_i}\right\} &= 2E\left[e(n+N) \frac{\partial e(n+N)}{\partial g_i}\right] = 2E[e(n+N)x_j] \\ &= 2E\{s(n+N) - \sum_i g_i x_i\}x_j = 0 \end{aligned} \quad (9-60)$$

其中, $\frac{\partial [e(n+N)]}{\partial g_i} = x_j$, $e(n+N) = [s(n+N) - \sum_i g_i x_i]$ 。称式(9-60)为正交方程。

写成相关函数的形式为

$$\phi_{x_j y_d} = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i \phi_{x_j x_i} \quad (j \geq 1) \quad (9-61a)$$

$$\text{或} \quad \phi_{x y_d} = \sum_{m=0}^{+\infty} g_{\text{opt}}(m) \phi_{xx}(k-m) \quad (k \geq 0) \quad (9-61b)$$

可以看出上式类似于维纳-霍夫方程,二者相比较,如果我们在维纳滤波器中也以 y_d 表示希望得到的输出,即 $y_d(n) = s(n)$,则有

$$\phi_{x y_d}(k) = \phi_{xs}(k) = E[x(n)x(n+k)]$$

而维纳预测器的 $y_d(n) = s(n+N)$,所以有

$$\phi_{x y_d}(k) = E[x(n)x(n+N+k)] = \phi_{xs}(k+N)$$

进而可得其 Z 变换为

$$\Phi_{x y_d}(z) = z^N \Phi_{xs}(z) \text{ 及 } \Phi_{x y_d}(z^{-1}) = z^{-N} \Phi_{xs}(z^{-1}) \quad (9-62)$$

维纳预测器仍可按无物理可实现约束及有物理可实现约束两种情况。

① 预测 $\hat{s}(n+N)$ 也可用 $\hat{s}(n+N | n)$ 表示。

9.4.2 离散因果和非因果平稳序列维纳预测器

(1) 与维纳滤波器一样,非因果的维纳预测器的计算公式也可表示成

$$G_{\text{opt}}(z) = \frac{\Phi_{xy_d}(z)}{\Phi_{xx}(z)} \quad (9-63)$$

这里唯一的差别只是前者的 $y_d(n) = s(n)$, 而做 N 步预测的维纳预测器的 $y_d(n) = s(n+N)$, 因而后者的最小均方误差为

$$\begin{aligned} E[e^2(n+N)]_{\min} &= E\{[s(n+N) - \hat{s}(n+N)]^2\}_{\min} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c [\Phi_{ss}(z) - G_{\text{opt}}(z)\Phi_{xy_d}(z^{-1})]z^{-1}dz \end{aligned} \quad (9-64)$$

将式(9-62)代入式(9-63)和式(9-64), 即可得

$$G_{\text{opt}}(z) = \frac{z^N \Phi_{xs}(z)}{\Phi_{xx}(z)} \quad (9-65)$$

$$\text{及} \quad E\{[s(n+N) - \hat{s}(n+N)]^2\}_{\min} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c [\Phi_{ss}(z) - G_{\text{opt}}(z)z^{-N}\Phi_{xs}(z^{-1})]z^{-1}dz \quad (9-66)$$

等所需结果。

(2) 因果维纳预测器可依照因果维纳滤波器的计算。

当输入信号 $x(n)$ 可由白噪声序列 $w(n)$ 通过一传输函数为 $B(z)$ 的最小相位滤波器而生成时, 由式(9-55)可以知道, N 步因果维纳预测器的传输函数为

$$G(z) = \frac{1}{\sigma_w^2 B(z)} \left[\frac{\Phi_{xy_d}(z)}{B(z^{-1})} \right]^+ \quad (9-67)$$

由于 $\Phi_{xy_d}(z) = z^N \Phi_{xs}(z)$ 。将它代入式(9-62)和式(9-66)后, 就可分别得到 N 步非因果和因果维纳预测器的传输函数的最终表达形式

$$G(z) = \frac{z^N \Phi_{xs}(z)}{\Phi_{xx}(z)} \text{ 和 } G(z) = \frac{1}{\sigma_w^2 B(z)} \left[\frac{z^N \Phi_{xs}(z)}{B(z^{-1})} \right] \quad (9-68)$$

为了求它们的 N 步预测误差的均方值, 只要把相应的传输函数代入表达式

$$E[e^2(n+N)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c [\Phi_{ss}(z) - z^{-N}H_{\text{opt}}(z)\Phi_{xs}(z^{-1})]z^{-1}dz \quad (9-69)$$

就可以了。

上面讨论的维纳滤波和维纳预测, 维纳滤波在理论上解决了平稳过程的最佳线性滤波问题, 在通信、雷达、自动控制、生物医学等技术领域中获得了广泛的应用。但是它在理论和应用上也受到了限制。首先, 这种滤波方法, 对于随机过程每一时刻的估计, 需要利用该时刻以前的全部观测数据, 每一次估计都需用全部数据重新算一次。因此, 若用计算机按照这种方法进行处理, 那么存储量与计算量显然是太大了, 甚至不能实时处理。其二, 这种理论通常限制在研究和处理平稳随机过程。虽然从原理上可以把维纳滤波推广到非平稳过程中, 但很难得到有效可行的结果; 对于矢量信号波形的维纳滤波(即同时对多个信号波形进行估计), 由于谱因式分解将变得十分困难, 因此也难以在实际中获得应用。

20 世纪 60 年代初, 卡尔曼等人提出了所谓卡尔曼滤波理论和方法, 从根本上解决了维纳滤波存在的主要问题。卡尔曼滤波采用递推的估计方法, 每做一次估计时, 利用前一次的估计结果, 并根据新的观测数据, 算出修正量, 从而给出新的估计。它既运用了过去的全部数据的信息量, 又不必每次都全部重新做计算, 这样就大大减少了计算机需要的存储量与计算时间,

可以进行实时处理。卡尔曼滤波理论和方法,虽然没有正面给出最佳线性滤波方程的闭合解,但是给出了一整套方程的算法,可不断地解出各时刻的估计值,而且它可以方便地用到非平稳随机过程中去,解决其最线性滤波问题。随着电子计算机技术的发展,它更广泛地应用在各种过程的控制,例如制导、雷达对单个或多个目标的跟踪等方面。下面,分别说明标量和矢量卡尔曼滤波方程的建立和使用。

9.5 标量卡尔曼滤波

9.5.1 概述

前面所述最佳滤波问题的维纳解法的最终结果,是求一个滤波器的加权函数,即如何对输入的现刻值和过去值加权,以便确定待估信号某时刻值的最佳估计,也就是维纳滤波是根据全部过去的和当前的观测数据 $x(t), x(t-1), \dots$, 来估计信号的当前值,它的解是以均方误差最小条件下所得的加权函数或冲激响应的形式给出的。它属于非递归算法,由这种算法构成的估计器称为非递归估计器,而最佳的非递归估计器即是维纳滤波器。

维纳滤波是从信号的相关函数、功率谱开始研究的。当信号从单输入变为多输入时,从平稳随机过程变为非平稳过程时,分析变为很复杂,很困难。因此维纳滤波遇到的两个难题是:一是多输入多输出的情况用维纳滤波是很繁琐的;二是对非平稳的输入,维纳滤波不能做一般的解决,即使个别情况可解出,也是非常繁琐的。

下面讨论的卡尔曼滤波仍归采用最小均方误差准则,放弃了用冲激响应,系统函数描述线性系统的常规方法。卡尔曼滤波把信号看做白噪声通过线性系统的结果。这样,就巧妙地将对随机信号的统计描述转化为线性系统的描述,而线性系统的描述不是随机的。它采用状态变量描述线性系统,用正交原理代替解维纳—霍夫方程,用递推快速求解,从而解决了维纳滤波不能解决的两个问题。在此,最佳滤波问题的卡尔曼解法,采用状态来阐述最小均方估计问题。它有两个特点:

① 用状态空间概念来描述其数学公式,采用随机过程的矢量模型;

② 采用递归算法。可以不加修改地应用于平稳和非平稳过程。由这种算法构成的估计器称为递归估计器,最佳的递归估计器则称为卡尔曼滤波器。

实际上,对系统的观测和控制经常是在离散时刻上进行的,而且日益广泛应用的数字计算机也是一种典型的离散时间系统,因此,我们主要讨论离散时间的卡尔曼滤波。

首先看一个简单的非递归法的例子,并用递归法来简化它。在测量一个物理量时,为了减少每次测量引入的随机误差,人们往往用多次独立测量的平均值来确定这个量值。例如,一个恒定电压受到噪声的污染,要求根据混有噪声的观测序列来估计这个电压,它可以采用样本均值进行估计。设观测序列表示为 x_1, x_2, \dots, x_n , 其中 x 的下标表示观测所取的时刻。现在先用非递归算法计算样本均值,具体步骤如下。

① 第一个观测 x_1 : 存储,且均值估计为 $\hat{m}_1 = x_1$;

② 第二个观测 x_2 : 存储 x_1 和 x_2 , 且均值估计为 $\hat{m}_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$;

③ 第三个观测 x_3 : 存储 x_1, x_2 和 x_3 , 且均值估计为 $\hat{m}_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$;

④ 以此类推。

显然,这将按照实验的进程得出样本均值序列。可以看出,所需观测数据的存储量随着时间而增大,而且构成估计所需代数运算的数目也相应地增长。当数据的总数很大时,这将导致多次重复计算和大量的数据存储。

现在再看一下递归算法。它将前次的估计和当前的观测组合成一个新的估计,步骤如下。

① 第一个观测 x_1 : 计算估计为 $\hat{m}_1 = x_1$, 存储 \hat{m}_1 并且抛弃 x_1 。

② 第二个观测 x_2 : 计算前次估计 \hat{m}_1 和现在观测 x_2 的加权和, 作为新的估计量

$$\hat{m}_2 = \frac{1}{2} \hat{m}_1 + \frac{1}{2} x_2$$

存储 \hat{m}_2 并且抛弃 x_2 和 \hat{m}_1 。

③ 第三个观测 x_3 : 计算 \hat{m}_2 和 x_3 的加权和, 作为新的估计量

$$\hat{m}_3 = \frac{2}{3} \hat{m}_2 + \frac{1}{3} x_3$$

存储 \hat{m}_3 并且抛弃 x_3 和 \hat{m}_2 。

④ 以此类推, 显然, 在 n 次上的加权和为

$$\hat{m}_n = \left(\frac{n-1}{n} \right) \hat{m}_{n-1} + \left(\frac{1}{n} \right) x_n$$

很明显, 上述两种算法得出相同的估计序列, 但后者不需要存储前面所有的观测值。在递归算法中, 前面计算的成果被有效地利用了, 可无限地处理下去, 而且不存在加大存储问题。

由此可见, 卡尔曼滤波不需要全部过去的观测数据, 它只是根据前一个估计值 \hat{x}_{k-1} 和最近一个观测数据 x_k 来估计信号的当前值。它是用状态方程和递推方法进行估计的, 而且所得的解是以估计值的形式给出的。

为了便于了解卡尔曼滤波的基本原理, 我们先研究一维(或标量的)卡尔曼滤波方程, 即在单个随机信号 $x(k)$ 作用下卡尔曼滤波器的工作过程, 且假定信号是平稳随机过程, 然后推广到多个随机信号 $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$ 共同作用时的情况, 即推广到多维卡尔曼滤波方程, 而且信号可以是非平稳随机过程。

卡尔曼滤波也分为连续形式和离散形式两种。由于目前几乎全部采用数字信号处理, 所以只讨论离散卡尔曼滤波。

9.5.2 标量信号模型和观测模型

研究维纳滤波时, 信号模型是从信号和噪声的相关函数中得到的; 而卡尔曼滤波的信号模型是信号的状态方程和观测方程。所以现在先从标量信号模型和观测模型开始讨论。

首先规定研究对象——信号及观测数据的物理模型及其数学表达式。这个通过白噪声产生信号的线性系统, 称做信号模型。一维离散时间卡尔曼递推估计理论中, 采用白噪声序列激励下的一阶差分方程, 即卡尔曼滤波中信号模型为

$$s(k) = as(k-1) + w(k-1) \quad (9-70)$$

它是表征待估时变信号 $s(k)$ 的状态方程, 式中, $s(k)$ 是 k 时刻的状态信号值, a 为模型的系统参数, 且有 $(0 \leq a < 1)$, $w(k)$ 为零均值的白噪声序列, 常称为状态噪声或系统噪声, 且有

$$\begin{aligned} E[w(k)] &= 0 \\ E[w(i)w(j)] &= \sigma_w^2 \delta(i, j) \end{aligned} \quad (9-71)$$

因此,随机状态信号 $s(k)$ 可以看做是由均值为零的白噪声 $w(k-1)$ 激励一阶自回归滤波器所产生的平稳随机过程,如图 9.10 所示。图中 z^{-1} 表示延迟一个单位时间(采样周期)。于是,可得 $s(k)$ 的如下统计参数关系式

$$E[s(k)] = 0$$

$$E[s^2(k)] = \phi_{ss}(0) = \sigma_s^2 = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2}$$

$$E[s(k) \cdot s(k+j)] = \phi_{ss}(j) = a^{|j|} \phi_{ss}(0) \quad (9-72)$$

式中, $\phi_{ss}(j)$ 表示相距 j 个间隔的两个样本的自相关,由式 (9-72) 可以看出, a 相当于过程的时间常数, a 越大(趋于 1),过程变化就越慢,即过程发生显著变化需要较长的时间间隔。显然,式(9-72)所示的一阶自回归过程具有指数型相关函数,因而属于本章例 9.1 和例 9.7 所述的马尔可夫信号。

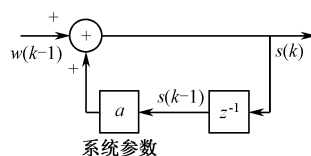


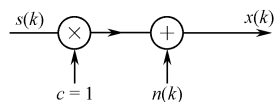
图 9.10 一阶自回归过程的模型

这种一阶信号模型是基本的,因为一个高阶的状态方程可以化成一阶的状态方程组,这将在矢量卡尔曼滤波器一节中详细讨论。同时应当指出,有不少实际信号合乎这种一阶自回归模型。例如,一架飞机以某一速度飞行,飞行员可以根据飞行条件做机动飞行,所产生的速度变化取决于两个因素:系统总的响应时间和由于加速度随机变化造成的速度随机起伏。用 $s(k)$ 表示 k 时刻的飞行速度,用 $w(k)$ 表示改变飞机速度的各种外在因素,如云层及阵风等。这些随机因素对飞机速度的影响是通过参数 a (它表示飞机的惯性和空气阻力)完成的。因此,式(9-70)可用来表示这种随机动态过程的最简单模型。

卡尔曼滤波需要依据观测数据对系统状态进行估计,因此,除了要建立系统信号模型的状态方程外,卡尔曼滤波还需要建立的另一个基本方程是线性观测方程,它可以写成

$$x(k) = cs(k) + n(k) \quad (9-73)$$

式中, $x(k)$ 是观测序列; $s(k)$ 代表状态信号序列; $n(k)$ 是观测噪声; c 称为观测参数,引入它的目的是便于今后向矢量信号模型过渡。观测噪声是来自观测过程中的干扰,应该注意它与信号模型中状态噪声 $w(k)$ 之间的区别。一般认为观测噪声是均值为零,方差为 σ_n^2 的加性白噪声序列,而且与 $w(k)$ 不相关,即满足



$$E[e(k)] = 0$$

$$E[n(k)n(j)] = \sigma_n^2 \delta(k, j)$$

$$E[w(k)n(j)] = 0$$

图 9.11 线性观测模型 这种线性观测模型如图 9.11 所示。

9.5.3 标量卡尔曼滤波算法

列出了信号的状态方程和观测方程后,下一步是求出滤波器的输出,即时变信号 $s(k)$ 的估计 $\hat{s}(k)$ 与观测值 $x(k)$ 之间的关系。前面已提到,卡尔曼滤波器采用递推估计方法,当数据样本增多时,不必重新用过去的全部数据进行计算,而只要利用前一次算出的估计量,再考虑到新数据带来的信息量,从而做出进一步的估计。因此,在一维卡尔曼滤波器里,在第 k 个数据到来时所做出的 k 时刻的估计 $\hat{s}(k)$,具有如下形式

$$\hat{s}(k) = a(k) \hat{s}(k-1) + b(k)x(k) \quad (9-74)$$

它表示现刻 $s(k)$ 的估计值等于前一时刻的估计值与新数据样本 $s(k)$ 的加权和,而且加权系数 $a(k)$ 和 $b(k)$ 是时变的系数。现在的任务就是按照均方误差最小,即

$$p(k) = E[e^2(k)] = E\{[s(k) - \hat{s}(k)]^2\} = \text{最小}$$

来确定加权系数 $a(k)$ 和 $b(k)$ 。为此,求 $p(k)$ 对 $a(k)$ 及 $b(k)$ 的偏导数,并分别令它们等于零

$$\frac{\partial p(k)}{\partial a(k)} = -2E\{[s(k) - a(k)\hat{s}(k-1) - b(k)x(k)]\hat{s}(k-1)\} = 0$$

$$\frac{\partial p(k)}{\partial b(k)} = -2E\{[s(k) - a(k)\hat{s}(k-1) - b(k)x(k)]x(k)\} = 0$$

或写成另一种形式,即

$$E[e(k)\hat{s}(k-1)] = 0 \quad (9-75)$$

$$E[e(k)x(k)] = 0 \quad (9-76)$$

这就是最佳线性递推滤波的正交条件,即误差序列 $e(k)$ 与输入数据 $x(k)$ 及前一时刻的估计量 $\hat{s}(k-1)$ 正交。这与非递推滤波的正交条件式(9-40)是一致的。顺便指出,利用下面式(9-77)和式(9-78),容易证明 $e(k)$ 和 $\hat{s}(k)$ 也是正交的,即

$$E[e(k)\hat{s}(k)] = 0 \quad (9-77)$$

估计的均方误差(即误差功率)为

$$\begin{aligned} p(k) &= E[e^2(k)] = E\{e(k)[s(k) - \hat{s}(k)]\} \\ &= E[e(k)s(k)] - a(k)E[e(k)\hat{s}(k-1)] - b(k)E[e(k)x(k)] \\ &= E[e(k)s(k)] \end{aligned} \quad (9-78)$$

它等于误差与被估计信号乘积的数学期望。

下面根据式(9-75)和式(9-76)确定 $a(k)$ 和 $b(k)$ 。为了书写方便,在推导中暂时将变量 k 写在符号的下角。由式(9-77)有

$$\begin{aligned} E[e_k s_{k-1}] &= E[(\hat{s} - s_k)\hat{s}_{k-1}] = E[(a_k \hat{s}_{k-1} + b_k x_k - s_k)\hat{s}_{k-1}] \\ &= E[(b_k x_k - s_k)\hat{s}_{k-1}] + E[a_k \hat{s}_{k-1} \hat{s}_{k-1}] = 0 \end{aligned}$$

在上式第二项中同时加一个和减一个 $a_k s_{k-1}$ 项,并利用观测方程 $s_k = c s_k + n_k$,则上式变为

$$E[(c b_k s_k + b_k n_k - s_k)\hat{s}_{k-1}] + a_k E[(\hat{s}_{k-1} - s_{k-1} + s_{k-1})\hat{s}_{k-1}] = 0$$

再利用正交条件以及 $e_{k-1} = \hat{s}_{k-1} - s_{k-1}$, $s_k = a s_{k-1} + w_{k-1}$ 和 $E[n_k \hat{s}_{k-1}] = 0$, $E[w_{k-1} s_{k-1}] = 0$, $E[e_{k-1} \hat{s}_{k-1}] = 0$ 等关系式,上述方程可化简为

$$a_k E[s_{k-1} \hat{s}_{k-1}] = (1 - c b_k) E[(a s_{k-1} + w_{k-1}) \hat{s}_{k-1}]$$

由上式解出

$$a_k = a(1 - c b_k) \quad (9-79)$$

式中, a 是信号模型参数, c 为观测参数,将上式代入原估计方程式(9-76),得出信号波形的第 k 个样本的递推估计为

$$\hat{s}_k = a \hat{s}_{k-1} + b_k [x_k - a c \hat{s}_{k-1}] \quad (9-80)$$

上式右边的第一项 $a \hat{s}_{k-1}$ 代表没有取得附加信息,即无新数据 $x(k)$ 时对 $s(k)$ 的最佳估计,也就是依据过去的 $k-1$ 个数据对 $s(k)$ 的预测;第二项是新生项或校正项,表示得到的新观测数据之后,对预测值进行的校正,它是新数据样本 $x(k)$ 与预测值之差再乘一个可变增益因子 b_k ; b_k 是随时间变化的系数,又称为卡尔曼增益。式(9-80)给出的一维卡尔曼滤波器框图如图 9.12 所示。

如何求时变增益 $b(k)$ 是该系统工作的关键问题之一,下面利用正交条件式(9-76)推导 b_k 。

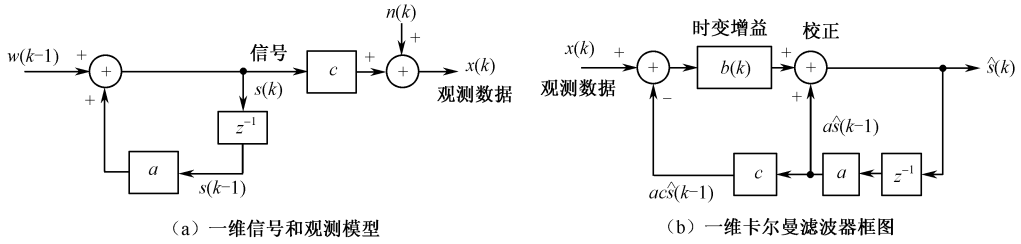


图 9.12 一维卡尔曼滤波

根据式(9-76)有

$$E[e_k x_k] = E[(s_k - \hat{s}_k) x_k] = 0$$

用式(9-74)代换上式中的 \hat{s}_k ,并将 x_k 写成状态信号序列和观测噪声之和,得

$$\begin{aligned} E[e_k x_k] &= E[(s_k - a_k \hat{s}_{k-1} - b_k x_k)(c s_k + n_k)] \\ &= c E[s_k s_k] - c a_k E[\hat{s}_{k-1} s_k] - b_k E[x_k x_k] = 0 \end{aligned}$$

式中,各统计平均项分别为

$$\begin{aligned} E[s_k s_k] &= \sigma_s^2 \\ E[x_k x_k] &= c^2 \sigma_s^2 + \sigma_n^2 \\ E[\hat{s}_{k-1} s_k] &= E[\hat{s}_{k-1} (a s_{k-1} + w_{k-1})] = a E[\hat{s}_{k-1} s_{k-1}] + E[\hat{s}_{k-1} w_{k-1}] \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} E[\hat{s}_{k-1} s_{k-1}] &= E[\hat{s}_{k-1} \frac{1}{c} (x_{k-1} - n_{k-1})] = \frac{1}{c} E[(s_{k-1} - e_{k-1}) x_{k-1}] - \frac{1}{c} E[\hat{s}_{k-1} n_{k-1}] \\ &= \frac{1}{c} E[s_{k-1} x_{k-1}] - \frac{1}{c} E[(a_{k-1} \hat{s}_{k-2} + b_{k-1} x_{k-1}) n_{k-1}] = \sigma_s^2 - \frac{1}{c} b_{k-1} \sigma_n^2 \end{aligned}$$

即

$$E[\hat{s}_{k-1} w_{k-1}] = E[(a_{k-1} \hat{s}_{k-2} + b_{k-1} x_{k-1}) w_{k-1}] = 0$$

将上述各项代入原式,得

$$\begin{aligned} E[e_k x_k] &= c \sigma_s^2 - c a_k a (\sigma_s^2 - \frac{1}{c} b_{k-1} \sigma_n^2) - b_k (c^2 \sigma_s^2 + \sigma_n^2) \\ &= c \sigma_s^2 + a^2 (1 - c b_k) (c \sigma_s^2 - b_{k-1} \sigma_n^2) - b_k (c^2 \sigma_s^2 + \sigma_n^2) = 0 \end{aligned}$$

考虑到 $(1 - a^2) \sigma_s^2 = \sigma_w^2$,由上式解出 b_k ,得

$$b_k = \frac{c(1 - a^2) \sigma_s^2 + a^2 b_{k-1} \sigma_n^2}{c a^2 b_{k-1} \sigma_n^2 + c^2 (1 - a^2) \sigma_s^2 + \sigma_n^2} = \frac{c \sigma_w^2 + a^2 b_{k-1} \sigma_n^2}{c a^2 b_{k-1} \sigma_n^2 + c^2 \sigma_w^2 + \sigma_n^2} \quad (9-81a)$$

$$= \frac{cA + a^2 b_{k-1}}{1 + c^2 A + c a^2 b_{k-1}} \quad (9-81b)$$

式中, $A = \sigma_w^2 / \sigma_n^2$ 代表信噪比。式(9-81a)和式(9-81b)便是卡尔曼增益 b_k 的递推公式。

从上面的结果中不难看出,当信号动态噪声很小时, $\sigma_w^2 = 0$ (即激励信号的白噪声消失了)及 $a = c = 1$ (即信号在观测时间内完全相关)时,则 $s_k = s_{k-1} = s$, $A = \sigma_w^2 / \sigma_n^2 = 0$,此时就变为信号参量的估计了,由式(9-81b)有

$$b_k = \frac{b_{k-1}}{1 + b_{k-1}} \quad (9-82)$$

当观测噪声很小时, $\sigma_n^2 = 0$,则 A 很大, $b_k \approx 1$, $a_k \approx 0$,有 $\hat{s}_k \approx x_k$,这意味着,观测噪声很小时,观测数据几乎完全反映信号,所以信号的最好估计就是观测数据本身。

由式(9-80),估计的均方误差为

$$\begin{aligned} p_k &= E[e_k s_k] = E[(s_k - \hat{s}_k) s_k] = E[s_k^2] - E[\hat{s}_k s_k] \\ &= \sigma_s^2 - [\sigma_s^2 - \frac{1}{c} b_k \sigma_n^2] = \frac{1}{c} b_k \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (9-83)$$

上式可写为

$$b_k = \frac{c p_k}{\sigma_n^2}$$

故 b_k 又可称为归一化估计均方误差。将式(9-83)代入式(9-81a),得

$$b_k = c[\sigma_w^2 + a^2 p_{k-1}] / (\sigma_n^2 + c^2 \sigma_w^2 + c^2 a^2 p_{k-1}) \quad (9-84)$$

式(9-85)和式(9-86)也组成 $b(k)$ 的递推公式,如果模型参数 a 及 σ_w^2 和 σ_n^2 已知,则可根据式(9-86)由 $p(k-1)$ 算出 $b(k)$,再根据式(9-85)由 $b(k)$ 算出 $p(k)$,完成时变增益及均方误差递推。

式(9-82)和式(9-83)是卡尔曼滤波的基本公式。当给定了起始条件之后,依据这两个递推公式便可以持续地给出各个时刻的滤波值,同时由式(9-85)给出滤波的均方误差。现在来确定递推计算的起始条件。可以根据没有观测数据的情况来确定起始估计 $\hat{s}(0)$,即选择 $\hat{s}(0)$ 使下式最小

$$\begin{aligned} p(0) &= E\{[s(0) - \hat{s}(0)]^2\} = \text{最小} \\ \text{令} \quad \frac{\partial p(0)}{\partial \hat{s}(0)} &= -2E[s(0) - \hat{s}(0)] = 0 \end{aligned}$$

故

$$\hat{s}(0) = E[s(0)] \quad (9-85)$$

即取 $s(0)$ 的统计均值为 $\hat{s}(0)$ 。

【例 9.8】 设一随机信号 $s(k)$ 满足

$$s(k) = as(k-1) + w(k-1)$$

已知 $E[s(k)] = 0$, $\phi_{ss}(j) = a^{|j|} \sigma_s^2$, $\sigma_s^2 = \sigma_w^2 / (1 - a^2)$; 观测方程满足

$$x(k) = s(k) + n(k)$$

且已知 $\sigma_w^2 = \sigma_n^2$, $a^2 = 1/2$ 。应用上述条件求对信号波形做递推滤波的时变增益 $b(k)$ 及均方误差 $p(k)$ 。

解: 设系统接收到的第一个数据为 $x(1)$,从而启动系统工作。按式(9-85),递推方程式的起始条件为

$$\hat{s}(0) = E[s(0)] = 0$$

这是由于我们处理的是零均值信号,在未取得观测数据的情况下,其最好的估计就是零。根据

$$\hat{s}(k) = a\hat{s}(k-1) + b(\hat{s})[x(k) - a\hat{s}(k-1)]$$

可得

$$\hat{s}(1) = b(1)x(1) \quad (9-86)$$

为了求出 $b(1)$,应用正交条件,即

$$E\{[s(1) - \hat{s}(1)]x(1)\} = 0$$

式中, $x(1) = s(1) + n(1)$,将式(9-88)代入上式,并取数学期望,得

$$b(1) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_n^2}$$

对于本例的情况, $\sigma_s^2 = 2\sigma_n^2$,因而 $b(1) = 2/3 = 0.67$ 。将 $b(1)$ 值代入式(9-83),则可求得

$$p(1) = 2\sigma_n^2/3$$

至此,我们有了计算 $b(2)$ 所需的全部数据。应用式(9-84),有

$$b(2) = \frac{a^2 p(1) + \sigma_w^2}{\sigma_n^2 + \sigma_w^2 + a^2 p(1)} = \frac{4}{7} = 0.57$$

再由式(9-83)可得均方误差 $p(2) = \frac{4}{7}\sigma_n^2 = 0.57\sigma_n^2$, 然后将 $p(2)$ 代入式(9-84), 得

$$b(3) = 9/16 = 0.562$$

再由式(9-83), 得

$$p(3) = 0.562\sigma_n^2$$

依此递推。算出的诸时变增益 $b(1)$ 、 $b(2)$ 、 \dots , 可以事前存储在计算机内。当输入观测数据后便可不断地给出波形的滤波值 $\hat{s}(k)$, 较容易做出实时处理。

当 k 增加时, $p(k)$ 应逐步达到一个稳定值, 即 $p(k) = p(k-1) = p$ 。为了求出这个稳定值, 应将式(9-84)代入式(9-83), 并代入本例的参数, 得

$$p^2 + 3\sigma_n^2 p - 2\sigma_n^4 = 0$$

该二次方程中仅正值解 $p = 0.562\sigma_n^2$ 有物理意义, 因为 p 表示的是误差功率。由此可知, 本例中 $p(3)$ 已经达到误差功率的稳定值。

式(9-80)到式(9-87)构成了标量卡尔曼滤波器的一套完整算法, 为了使这些结果能推广到矢量信号的情况, 我们把上述方程重新整理排列成如下规范形式:

滤波方程式(9-80)

$$\hat{s}(k) = a \hat{s}(k-1) + b(k)[x(k) - ca \hat{s}(k-1)] \quad (9-87)$$

增益方程式(9-84)

$$b(k) = cp_1(k)[c^2 p_1(k) + \sigma_n^2]^{-1} \quad (9-88a)$$

式中

$$p_1(k) = a^2 p(k-1) + \sigma_w^2 \quad (9-88b)$$

滤波均方误差(误差功率)

$$p(k) = p_1(k) - cb(k)p_1(k) \quad (9-89)$$

它运用了下述状态方程式(9-73)和观测方程式(9-76)所描述的模型

$$s(k) = as(k-1) + w(k-1)$$

$$x(k) = cs(k) + n(k)$$

在这一组方程中, 我们引入了一个新变量 $p_1(k)$, 在下一节中可看到, $p_1(k)$ 这个量将起很重要的作用。事实上, 应该把 $p_1(k)$ 写做 $p(k|k-1)$, 表示在 $k-1$ 时刻对 k 时刻的信号 $s(k)$ 的一步预测估值误差的均方值。同样, 应把 $p(k)$ 写做 $p(k|k-1)$ 。

9.6 标量卡尔曼预测

前面讨论的是在加性白噪声中随机过程现刻值的估计, 这常称为滤波问题。在许多实际问题中, 特别是在控制系统中, 常常希望能事先做出预测。例如, 火炮控制系统需要火炮瞄准目标的前置点, 因而要求系统能预测目标未来的位置。又如在雷达航迹处理中, 需要推算下一个扫描周期中的目标参数。预测(外推)可分为一步、两步或 m 步, 这取决于我们所预测的是多少时间间隔单元后的信号数据。原则上, 预测的步数没有什么限制, 但步数越多, 预测的精度就越差, 所以我们主要讨论一步预测。

关于预测的信号模型和观测模型与前面讨论滤波时所做的规定一样。

对 $s(k)$ 的一步预测用符号 $\hat{s}(k+1|k)$ 表示[因此前面讨论过的滤波又可写成 $\hat{s}(k|k)$], 它表

示根据包括时间 k 在内的前面全部观测数据,对 $k+1$ 时刻的信号值进行估计(即预测)。与滤波情况下的式(9-74)相似,一步线性递推预测的关系为

$$\hat{s}(k+1|k) = \alpha(k)\hat{s}(k|k-1) + \beta(k)x(k) \quad (9-90)$$

式中, $\alpha(k)$ 和 $\beta(k)$ 区别于滤波情况下式(9-72)中的 $a(k)$ 和 $b(k)$, 但仍然是时变的。式(9-90)表明, 对 $k+1$ 时刻的一步预测值, 等于 k 时刻的一步预测值与 k 时刻的输入数据的加权和, 故称之为一步预测方程。所谓最佳线性预测, 就是选择适当的加权系数 $\alpha(k)$ 和 $\beta(k)$, 使预测均方误差最小, 即

$$\begin{aligned} p(k+1|k) &= E[e^2(k+1|k)] \\ &= E\{[s(k+1) - \hat{s}(k+1|k)]^2\} = \text{最小} \end{aligned} \quad (9-91)$$

利用与上一节滤波情况类似的推导方式, 可得出与式(9-77)和式(9-78)类似的正交方程, 即

$$\left. \begin{aligned} E[e(k+1|k)\hat{s}(k|k-1)] &= 0 \\ E[e(k+1|k)x(k)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-92)$$

上两式表明, 预测误差序列与输入数据及前一时刻的预测值正交。与推导递推滤波公式类似, 应用上述正交条件可得出 $\alpha(k)$ 和 $\beta(k)$ 有如下关系

$$\alpha(k) = a - c\beta(k)$$

将上式代入预测方程式(9-90), 则

$$\hat{s}(k+1|k) = a\hat{s}(k|k-1) + \beta(k)[x(k) - c\hat{s}(k|k-1)] \quad (9-93)$$

此式是一步预测方程式(9-90)的另一种形式, 它表明最佳一步预测值应等于前一次的预测值乘以 a , 并加上一个加权的校正项, 该校正项比例于新数据 $x(k)$ 与前时刻对观测值的预测 $c\hat{s}(k|k-1)$ 之差, 而校正项之比例常数 $\beta(k)$ 称为时变的预测增益, 它是随 k 改变的。请注意, 预测方程式(9-93)与滤波方程式(9-80)的差别在于, 滤波方程的校正项正比于 $x(k)$ 与 $ac\hat{s}(k-1)$ 之差, 这是因为此时 $\hat{s}(k-1)$ 表示对 $k-1$ 时刻 $s(k-1)$ 的估计, 而预测方程中 $\hat{s}(k|k-1)$ 表示对 k 时刻 $s(k)$ 的一步预测估计。最佳一步预测器的框图如图 9.13 所示。

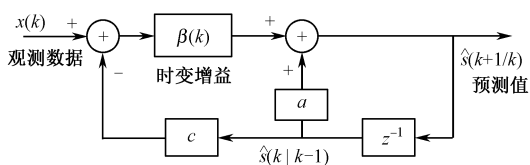


图 9.13 最佳一步预测器框图

应用正交原理和 $p(k+1|k)$ 的定义式, 可以得到均方预测误差和预测增益 $\beta(k)$ 的递推公式如下

$$\beta(k) = \frac{acp(k|k-1)}{c^2p(k|k-1) + \sigma_n^2} \quad (9-94)$$

$$p(k+1|k) = \frac{a}{c}\sigma_n^2\beta(k) + \sigma_w^2 \quad (9-95)$$

式(9-93)、式(9-94)和式(9-95)是一步递推预测的基本公式, 适当地确定起始条件后, 便可进行递推计算。

至此, 似乎对于一步预测器的讨论已经完成。但是, 为了研究同时完成最佳一步预测与最佳滤波的结构, 还需要进一步研究这两种算法的关系。首先, 假定信号模型中随机激励分量很小或为零, 即假定 $w(k-1)=0$, 则有(或近似有) $s(k)=as(k-1)$ 。因而可以合理地认为, 在无其他信号可利用时, $k+1$ 时刻的一步预测值可表示为

$$\hat{s}(k+1|k) = a\hat{s}(k|k) = a\hat{s}(k) \quad (9-96)$$

这就是说, 对 $k+1$ 时刻的一步预测估计等于 k 时刻的滤波估计乘以 a 。这一点是由信号模型本身决定的。可以证明, 当 $w(k-1)$ 为零均值白噪声的一般情况下, 式(9-90)也是正确的。

把表明最佳预测估计与最佳滤波估计之间的关系式(9-90)代入滤波方程式(9-87),有

$$\hat{s}(k+1|k) = a\hat{s}(k) = a\hat{s}(k|k-1) + ab(k)[x(k) - c\hat{s}(k|k-1)] \quad (9-97)$$

在推导式(9-97)中,还使用了式(9-96)的变形 $\hat{s}(k|k-1) = a\hat{s}(k-1)$ 。式(9-97)表明,由滤波方程导出的预测估计表示式与预测方程式(9-93)完全一致的条件是

$$\beta(k) = ab(k) \quad (9-98)$$

由此可知,预测增益与滤波增益也相差 a 倍。

此外,利用式(9-96),可以导出均方预测误差与均方滤波误差之间的关系如下

$$\begin{aligned} p(k+1|k) &= E\{[s(k+1) - \hat{s}(k+1|k)]^2\} = E\{[as(k) + w(k) - a\hat{s}(k)]^2\} \quad (9-99) \\ &= E\{[as(k) - \hat{s}(k)] + w(k)\}^2 = a^2 p(k) + \sigma_w^2 \end{aligned}$$

从式(9-99)可看出它与式(9-88)一致,从而证明式(9-88)中 $p_1(k)$ 就是一步预测估计误差功率 $p(k|k-1)$ 。

由式(9-97)可知,预测估计与滤波估计之间仅差一个比例常数,因而可以用一个结构同时完成滤波与预测。结合式(9-80)和式(9-96)可画出计算流程,如图 9.14 所示。由该图可看出,计算 $\hat{s}(k)$ 部分与最佳滤波框图(图 9.12)完全一致,仅仅变换了延迟 z^{-1} 与乘 a 两项操作的次序。而对 $\hat{s}(k+1|k)$ 的运算,根据式(9-80),应等于 $\hat{s}(k)$ 乘 a 。

式(9-93)~式(9-96)构成了标量卡尔曼预测的递推算法,现略加整理并写成如下规范形式:

预测方程组[同式(9-93)]

$$\hat{s}(k+1|k) = a\hat{s}(k|k-1) + \beta(k)[x(k) - c\hat{s}(k|k-1)]$$

预测增益[同式(9-94)]

$$\beta(k) = acp(k|k-1)[c^2 p(k|k-1) + \sigma_n^2]^{-1}$$

预测均方误差,由式(9-93)和式(9-94)导出

$$p(k+1|k) = a^2 p(k|k-1) - ac\beta(k)p(k|k-1) + \sigma_w^2 \quad (9-100)$$

顺便提一下,上述各卡尔曼滤波公式还可用“新息”和“新息序列”的概念来导出。

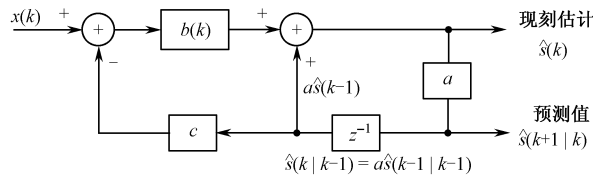


图 9.14 同时实现滤波与预测的框图

9.7 矢量信号模型和观测模型

前面讨论的问题是对单个平稳随机信号的最佳线性滤波和预测,而且假定随机信号为一阶自回归过程。在实际处理的问题中,经常需要对多个信号同时进行估计。例如,在雷达跟踪滤波问题中,需要同时估计目标的三个坐标及三个速度分量。同时还希望能处理更广泛的一类信号,例如高阶的自回归过程等。采用矢量信号的概念,就容易解决这两个问题,既可处理比较复杂的信号类型,又可同时处理可能相关的若干信号。矢量信号定义为如下 q 维矢量

$$\mathbf{s}(k) = \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ \vdots \\ s_q(k) \end{bmatrix} \quad (9-101)$$

式中, $s_1(k), s_2(k), \dots, s_q(k)$ 为待估计的 q 个信号序列。下面用几个例子来说明, 应用矢量信号的一阶自回归模型, 可以表示多个信号, 也可以表示更复杂的信号。

【例 9.9】 假设要同时估计 q 个独立的信号在 k 时刻的样本 $s_1(k), s_2(k), \dots, s_q(k)$, 其中每一个样本都由它本身的一阶自回归过程所产生的, 因而, 第 j 个信号可表示为

$$s_j(k) = a_j s_j(k-1) + w_j(k-1) \quad (j = 1, 2, \dots, q) \quad (9-102)$$

假定诸过程 w_j 是相互独立的零均值白噪声过程。与式 (9-101) 定义的信号矢量类似, 可以定义 q 维噪声矢量

$$\mathbf{w}(k) = \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \\ \vdots \\ w_q(k) \end{bmatrix} \quad (9-103)$$

根据式 (9-101) 和式 (9-103) 对信号矢量和噪声矢量的定义, 式 (9-102) 的 q 个方程可写成一个一阶矢量状态方程

$$\mathbf{s}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k-1) + \mathbf{w}(k-1) \quad (9-104)$$

式中, $\mathbf{s}(k-1)$ 是系统 k 时刻的 q 维状态矢量, $\mathbf{w}(k-1)$ 是系统 $k-1$ 时刻的 q 维噪声矢量, \mathbf{A} 为 $(q \times q)$ 矩阵, 定义为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} \end{bmatrix}$$

对于 $s_j(k)$ 相互独立的情况, 矩阵 \mathbf{A} 是一个对角阵, 可写成

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{qq} \end{bmatrix}$$

由式 (9-104) 可知, q 个独立的一阶自回归信号的产生模型, 可以用 q 维矢量的一阶自回归模型表示, 这只需将相应的矢量代替式 (9-70) 中的标量, 而系统参数 a 变为 $(q \times q)$ 矩阵 \mathbf{A} 。

【例 9.10】 本例将说明, 如果 \mathbf{A} 为非对角阵, 就可用矢量信号的一阶自回归模型处理更复杂的信号。例如, $s(k)$ 服从于二阶方程而不是一阶方程, 即

$$s(k) = as(k-1) + bs(k-2) + w(k-1) \quad (9-105)$$

这就要求我们处理不满足一阶自回归模型的信号。出现这种情况的原因, 可能是根据系统物理特性得知, 二阶动态特性在信号特性中起着重要作用, 也可能是通过实测 $s(k)$ 的功率谱, 发现它与一阶自回归过程的功率谱并不吻合。解决这一问题的办法是, 适当地定义信号矢量的两个分量, 就可以把二阶自回归模型化为一阶自回归矢量模型组。为此, 通常令

$$\begin{aligned} s_1(k) &= s(k) \\ s_2(k) &= s(k-1) = s_1(k-1) \end{aligned}$$

即把 $s(k)$ 用两个分量或两个状态表示, 则式(9-105)可写成

$$\begin{aligned}s_1(k) &= as_1(k-1) + bs_2(k-1) + w(k-1) \\ s_2(k) &= s_1(k-1)\end{aligned}$$

这样做之后, 信号矢量 $s(k)$ 可表示为

$$s(k) = \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(k-1) \\ s_2(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(k-1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

或者写成

$$s(k) = As(k-1) + w(k-1)$$

上式即为一阶矢量信号模型, 其中

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad w(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

A 称为矢量信号 $s(k)$ 的状态(一步)转移矩阵。这样, 我们就可以用一阶自回归矢量信号表示二阶、甚至更高阶的过程。如果定义式(9-104)中的状态转移矩阵 A 为时变矩阵 $A(k)$, 则可以表示具有时变系数的信号, 即非平稳过程。

【例 9.11】 本例讨论平面雷达边扫描边跟踪问题。所谓平面雷达, 即只测量目标的距离和方位, 而不测量目标仰角和高度的雷达。采用边扫描边跟踪体制, 就是天线每旋转一周, 仅得到目标的一次数据。设采样的周期为 T (这里, T 表示天线旋转一周的时间), 在 k 时刻 (即 $t=kT$) 被跟踪的目标处于距离 $R+r(k)$ 。所以在 $k+1$ 时刻目标的距离为 $R+r(k+1)$ 。 R 表示目标的平均距离, 而 $r(k)$ 和 $r(k+1)$ 表示对平均距离 R 的偏移量, 这正是所需要估计的量。假定 $r(k)$ 是均值为零的随机过程。

设目标的径向速度为 $\dot{r}(k)$ 。由于 T 不是太大, 所以可取一阶近似, 有

$$r(k+1) = r(k) + T\dot{r}(k) \quad (9-106)$$

同样, 设目标在 k 时刻的径向加速度为 $\ddot{r}(k)=u(k)$, 有

$$Tu(k) = \dot{r}(k+1) - \dot{r}(k) \quad (9-107)$$

式(9-106)称为距离方程, 式(9-107)称为加速度方程。设加速度 $u(k)$ 是一个零均值的平稳白噪声过程, 且在时间间隔 T 之间不相关, 即 $E[u(k+1)u(k)] = 0$ 。这种对飞行体加速度的假定是相当合理的, 因为由发动机推力的短时间不规则性或阵风等随机因素引起的加速度大致符合这种模型。

现令 $Tu(k) \triangleq u_1(k)$, $u_1(k)$ 同样是白噪声过程, 同时式(9-107)可写成

$$\dot{r}(k+1) = \dot{r}(k) + u_1(k) \quad (9-108)$$

可见, 飞行体的速度 $\dot{r}(k)$ 符合一阶自回归模型。

由式(9-106), 有

$$T\dot{r}(k+1) = r(k+2) - r(k+1) \quad (9-109)$$

对式(9-108)两边乘 T , 再将式(9-106)代入, 则有

$$T\dot{r}(k+1) = r(k+1) - r(k) + Tu_1(k) \quad (9-110)$$

令式(9-109)和式(9-110)相等, 则得

$$r(k+2) = 2r(k+1) - r(k) + Tu_1(k) \quad (9-111)$$

对距离 $r(k)$ 来说, 上式是一个二阶动态方程, 而白噪声加速度过程正是这个随机距离过程的激励函数。在例 9.10 中已经指出, 一个二阶信号过程可用一阶自回归矢量信号表示, 本例也不例外。这里, 我们定义具有两个分量的矢量信号 $s(k)$, 一个分量为距离 $s_1(k)=r(k)$, 另一个

分量为径向速度 $s_2(k) = \dot{r}(k)$ 。将这种表示法应用于式(9-106)和式(9-108),则有

$$s_1(k+1) = s_1(k) + Ts_2(k)$$

$$s_2(k+1) = s_2(k) + u_1(k)$$

此两式可合写成一个矢量方程

$$\mathbf{s}(k+1) = \begin{bmatrix} s_1(k+1) \\ s_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_1(k) \end{bmatrix}$$

或写成

$$\mathbf{s}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{w}(k)$$

显然,这是如式(9-104)所示的一阶矢量状态方程,即矢量信号模型。

下面研究把标量信号的观测模型推广到矢量的情况。设在 k 时刻做了 p 种混有噪声干扰的观测,以便估计 q 维信号矢量 $\mathbf{s}(k)$ 。注意,这 p 个观测可以直接从 q 个信号分量中选出,也可以是信号分量的加权和,通常令 $p \leq q$ 。下面用 $x_1(k), x_2(k), \dots, x_p(k)$ 表示 k 时刻的 p 个观测样本。

【例 9.12】 设 p 个观测样本是 q 个信号分量中的前 r 个,即

$$\left. \begin{aligned} x_1(k) &= c_1 s_1(k) + n_1(k) \\ x_2(k) &= c_2 s_2(k) + n_2(k) \\ &\vdots \\ x_p(k) &= c_p s_p(k) + n_p(k) \end{aligned} \right\} \quad (9-112)$$

式中, $n_j(k)$ 表示加性观测噪声, c_1, c_2, \dots, c_p 为观测参数。现定义 p 维观测样本矢量为 $\mathbf{x}(k)$, 观测噪声矢量为 $\mathbf{n}(k)$, 则可将式(9-110)写成矢量形式而得到如下观测方程

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_p(k) \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (9-113)$$

式中, \mathbf{C} 为 $p \times q$ 的观测矩阵。对于本例, $p < q$, 可表示为

$$\mathbf{C} = \begin{matrix} & \xrightarrow{q} \\ \begin{matrix} \downarrow r \\ \mathbf{C} \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_p & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

【例 9.13】 设 $x_1(k) = 4s_1(k) + 5s_2(k) + n_1(k)$, 其他各分量与上例中式(9-112)一样, 且 $c_2 = c_3 = \dots = c_r = 1$, 则有

$$\begin{aligned} x_1(k) &= 4s_1(k) + 5s_2(k) + 0 \cdot s_3(k) + \cdots + n_1(k) \\ x_2(k) &= 0 \cdot s_1(k) + s_2(k) + 0 \cdot s_3(k) + \cdots + n_2(k) \\ &\vdots \\ x_r(k) &= 0 \cdot s_1(k) + \cdots + s_r(k) + \cdots + n_r(k) \end{aligned}$$

本例说明观测矢量的某些分量为几个信号分量加权和的情况。

【例 9.14】 在例 9.11 所述雷达跟踪问题, 如果待估计的信号不仅有距离 $r(k)$ 和径向速度 $\dot{r}(k)$, 而且要估计方位角 $\theta(k)$ 及其角速度 $\dot{\theta}(k)$, 此时信号矢量 $\mathbf{s}(k)$ 是四个分量的矢量, 即

$$\mathbf{s}(k) = \begin{bmatrix} r(k) \\ \dot{r}(k) \\ \theta(k) \\ \dot{\theta}(k) \end{bmatrix} \quad (9-114)$$

然而,很多平面雷达只测量距离和方位,相应的变化率则按式(9-106)导出,因而,观测矢量可写成

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(k) + n_1(k) \\ \theta(k) + n_2(k) \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (9-115)$$

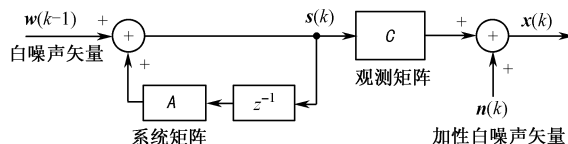


图 9.15 矢量信号模型及观测模型

式中, $n_1(k)$ 和 $n_2(k)$ 分别为相应的观测加性噪声。显然,此时 $q=4, r=2$, 且观测矩阵 \mathbf{C} 可表示为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

综上所述,信号模型与观测模型的矢量形式可用图 9.15 表示。它与前面所述的标量信号的一阶自回归模型(图 9.10)及其观测模型(图 9.11)一致,只是用矢量或矩阵代替相应的标量。

9.8 离散矢量卡尔曼滤波的信号模型

9.8.1 离散状态方程和观测方程^[17]

离散矢量卡尔曼滤波的信号模型是由离散的状态方程和观测方程组成的。设离散时间系统在 t_k 时刻(以下简称 k 时刻)的状态是由 M 个状态变量构成的 m 维状态矢量 $\mathbf{x}(k)$ 来描述的,则其状态方程表示为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{f}(k-1) \quad (9-116)$$

式中, $\mathbf{f}(k-1)$ 是系统在 $k-1$ 时刻的 L 维激励信号; \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 是由系统结构和特性决定的系统矩阵。

当已知系统的初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 后,可以用递推方法得到如下状态方程 $\mathbf{x}(k)$ 的解;

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{f}(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{f}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{f}(0) + \mathbf{B}\mathbf{f}(1)$$

.....

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{f}(k-1) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{B}\mathbf{f}(j) \quad (9-117)$$

在式(9-117)中,等式右边第一项只与初始状态和系统结构有关,与激励 $\mathbf{f}(\cdot)$ 无关,故称为零输入响应;第二项与初始状态无关,只与激励和系统结构有关,故称为零状态响应。

令 $\Phi(k) = \mathbf{A}^k$, 并代入式(9-117)得

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-1-j)\mathbf{B}\mathbf{f}(j) \quad (9-118)$$

当 $f(k)=0$ 时, $\mathbf{x}(k)=\Phi(k)\mathbf{x}(0)=A^k\mathbf{x}(0)$ 。通过 A^k , 可将 $k=0$ 时的状态过渡到任何 $k>0$ 的状态, 故称 $\Phi(k)$ 为转移矩阵或过渡矩阵。当已知 $\mathbf{x}(0)$, 激励 $f(j)$ 以及 A 、 B 矩阵时, 就可以根据式(9-118)求得 $\mathbf{x}(k)$ 的解。若用 k_0 表示 k 的起始值, 则式(9-118)从 $\mathbf{x}(k_0)$ 开始递推, 会有

$$\mathbf{x}(k) = \Phi_{k,k_0}\mathbf{x}(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi_{k,j+1}Bf(j) \quad (9-119)$$

式中, Φ_{k,k_0} 表示从 k_0 状态到 k 状态的转移矩阵。状态转移矩阵 Φ_{k,k_0} 具有以下三个基本性质:

$$\begin{aligned} \Phi_{k,k_0} &= \Phi_{k,l}\Phi_{l,k_0} & (k_0 \leq l \leq k) \\ \Phi_{k,k_0} &= \Phi_{k_0,k}^{-1} \\ \Phi_{k,k} &= I \end{aligned} \quad (9-120)$$

分别表示系统状态的转移具有分步转移性、互逆性和同时刻状态的不变性。

若 $k_0=k-1$, 就可得到一步递推公式

$$\mathbf{x}(k) = \Phi_{k,k-1}\mathbf{x}(k-1) + \Phi(0)Bf(k-1) \quad (9-121)$$

因为 $\Phi_{k-1,k-1}=\Phi(0)=A^0=I$, 所以有

$$\mathbf{x}(k) = \Phi_{k,k-1}\mathbf{x}(k-1) + Bf(k-1) \quad (9-122)$$

式中, 系统的激励信号 $f(k-1)$ 在不同的系统中有不完全相同的含义, 例如, 在电子信息系统通常认为是系统噪声矢量, 在控制系统中称为控制噪声矢量, 而对一个运动物体, 则可看做是外界各种随机干扰, 它会对运动物体的运动规律产生影响, 等等, 这些统一称为系统的扰动噪声矢量, 而且它是时变的; 系统本身在不同时刻对受到的扰动噪声矢量的影响也可能是不同的。

假设激励源为白噪声, 即 $Bf(k-1)=\mathbf{w}(k-1)$ 称为系统动态噪声, 而系统是时变的, 即 $\Phi_{k,k-1}=A(k)$, 则式(9-122)又可写成

$$\mathbf{x}(k) = A(k)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k-1) \quad (9-123)$$

为了书写方便, 在推导中将变量 k 放在下标表示, 则上式为

$$\mathbf{x}_k = A_k\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (9-124)$$

式(9-124)表明 k 时刻的状态 $\mathbf{x}(k)$ 可由它前一时刻状态 $\mathbf{x}(k-1)$ 来求得, 故该式又称为一步递推状态方程。

卡尔曼滤波需要依据观测数据对系统状态进行估计, 因此, 除了要建立系统的状态方程, 还需要建立一个观测方程。一般假设观测系统是线性的, 对于离散时间系统的观测方程可以写成

$$\mathbf{y}_k = C_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (9-125)$$

式中, \mathbf{y}_k 为观测到的信号矢量序列, \mathbf{v}_k 为观测噪声序列, C_k 是观测矩阵 ($M \times N$), M 为 \mathbf{x}_k 的维数, N 为 \mathbf{v}_k 的维数, $C_k\mathbf{x}_k$ 是信号真值, 它是状态变量 \mathbf{x}_k 各分量的线性组合。

在维纳滤波中, 希望得到 $s(n)$ 的估计值 $\hat{s}(n)$ 与真值 $s(n)$ 间的均方误差最小。在卡尔曼滤波中希望得到 \mathbf{x}_k 的估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 与 \mathbf{x}_k 有最小均方误差。有了 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 也就得到了 $\hat{\mathbf{s}}_k$ 。这里信号 \mathbf{s}_k 之所以要表示为状态变量 \mathbf{x}_k 的线性组合, 是因为把待求的量表示为状态方程中的状态变量的线性组合具有很多优点, 由于状态方程是一个一阶多维的方程, 可以用一步递推法求解。卡尔曼滤波相对于维纳滤波在计算上的很多优点, 正是由于它利用了状态方程得到的。

当 \mathbf{y}_k 与 \mathbf{x}_k 都是一维变量, 且 $C_k=1$ 时, 则有

$$y_k = x_k + v_k = s_k + v_k$$

此时, 卡尔曼滤波的观测方程与维纳滤波的信号方程 $x(n)=s(n)+v(n)$ 形式上完全相同。只是在符号上的表示有所差异罢了。在卡尔曼滤波公式中的 y_k 就是维纳滤波中的 $x(n)$, 它们都

表示观察到的数据。

由式(9-124)和式(9-125)得到的卡尔曼滤波的信号模型用图 9.16(a)表示或用图 9.16(b)表示。它是一维时的信号模型,这样更便于与维纳滤波的信号模型图作比较。

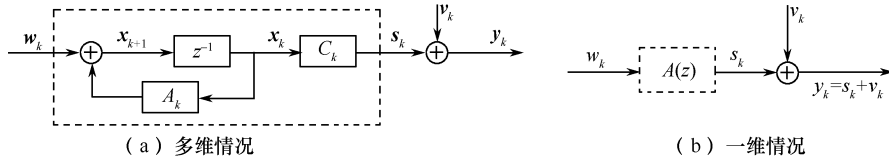


图 9.16 卡尔曼滤波的信号模型

9.8.2 矢量卡尔曼滤波和预测算法

现在研究离散系统的 N 维状态方程和 m 维观测方程[见式(9-124)和式(9-125)],它们分别是

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

假设动态噪声 \mathbf{w}_k 与观测噪声 \mathbf{v}_k 都是均值为零的正态噪声,且两者互不相关,即

$$\left. \begin{aligned} E[\mathbf{w}_k] &= 0 & \text{Cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j] &= E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{kj} \\ E[\mathbf{v}_k] &= 0 & \text{Cov}[\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j] &= E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T] = \mathbf{R}_k \delta_{kj} \\ \text{Cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j] &= E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^T] = 0 & (k, j &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (9-126)$$

式中, $\mathbf{Q}_k = \text{Var}[\mathbf{w}_k] = E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T]$ 称为动态噪声协方差阵, $\mathbf{R}_k = \text{Var}[\mathbf{v}_k] = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T]$ 为观测噪声协方差阵。

系统的初始状态的统计特性为

$$\left. \begin{aligned} E[\mathbf{x}_0] &= \mathbf{m}_{x_0}, \quad \text{Var}[\mathbf{x}_0] = E[(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{x_0})^T] = \mathbf{p}_0 \\ \text{Cov}[\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_k] &= E[\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_k^T] = 0, \quad \text{Cov}[\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_k] = E[\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_k^T] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-127)$$

卡尔曼滤波的目的就是在上述条件下,通过 m 维线性观测系统,从第 1 时刻到第 k 时刻,对 N 维线性动态系统式(9-125)作 k 次观测 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k$,根据这 k 个观测数据,对第 j 时刻的状态 \mathbf{x}_j 进行估计,记为 $\hat{\mathbf{x}}_{(j|k)}$,估计误差为 $\tilde{\mathbf{x}}_{(j|k)} = \mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{x}}_{(j|k)}$,估计的均方误差记做 $\mathbf{P}_{(j|k)} = E[\tilde{\mathbf{x}}_{(j|k)} \cdot \tilde{\mathbf{x}}^T]$ 。当 $j > k$ 时, $\hat{\mathbf{x}}_{(j|k)}$ 称为预测或外推;当 $j < k$ 时, $\hat{\mathbf{x}}_{(j|k)}$ 称为内插。特别当 $j = k$ 时, $\hat{\mathbf{x}}_{(j|k)}$ 称为滤波,并简记为

$$\hat{\mathbf{x}}_{(k|k)} = \hat{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{x}}_{(k|k)} = \tilde{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_{(k|k)} = \mathbf{P}_k$$

这里要研究的是 $j = k$ 时,如何求最小均方误差下的 \mathbf{x}_k 的估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$,即研究滤波的情况。下面推导卡尔曼滤波的算法。

如果暂不考虑噪声 \mathbf{w}_k 与 \mathbf{v}_k ,则从式(9-124)和式(9-125)得到的 \mathbf{x}_k 和 \mathbf{y}_k 分别用 $\hat{\mathbf{x}}'_k$ 和 $\hat{\mathbf{y}}'_k$ 表示,则有

$$\hat{\mathbf{x}}'_k = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (9-128)$$

$$\hat{\mathbf{y}}'_k = \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (9-129)$$

式中, $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 是 \mathbf{x}_{k-1} 的估计值。

下面引入“新息”和“新息序列”的概念。设观测序列 $\{\mathbf{y}_k\}$ 是均值和协方差都已知的随机变量序列,当已知 \mathbf{y}_0 ,但不知 \mathbf{y}_1 时,就可用 $E\{\mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_0\}$ 来估计 \mathbf{y}_1 ,所以包含在观测值 \mathbf{y}_1 中的新息部分 $\tilde{\mathbf{y}}_1$ 就应该为

$$\tilde{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{y}_1 - E[\mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_0]$$

类似地,当已知 $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1$ 但还不知 \mathbf{y}_2 时,就可用 $E[\mathbf{y}_2 | \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1]$ 来估计 \mathbf{y}_2 , 包含在 \mathbf{y}_2 中的新息部分 $\tilde{\mathbf{y}}_2$ 就应当为

$$\tilde{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{y}_2 - [\mathbf{y}_2 | \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1]$$

以此类推,在一般情况下,包含在 \mathbf{y}_k 中的新息部分 $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 应该为

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k - E[\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}] \quad (9-130a)$$

为了计算方便,再定义新息的初值为

$$\tilde{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{y}_0 - E[\mathbf{y}_0]$$

有了上述概述后,可将式(9-130a)简化表示为

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}'_k \quad (9-130b)$$

这表示由于 \mathbf{w}_{k-1} 和 \mathbf{v}_k 的影响而产生了偏离 $\tilde{\mathbf{y}}_k$, 它是实际观测值与没有考虑噪声的估计值之差,即 $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 隐含了 \mathbf{w}_{k-1} 与 \mathbf{v}_k 的信息,也就是说 $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 隐含了当前最新的观测值 \mathbf{y}_k 的信息,故称 $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 为新息(innovation)。 $\{\tilde{\mathbf{y}}_k\}$ 称为新息(序列)过程。

新息序列 $\{\tilde{\mathbf{y}}_k\}$ 具有两个重要性质。第一是零均值,第二是不相关,即

性质 1 n 时刻的新息 $\{\tilde{\mathbf{y}}_n\}$ 与所有过去的观测数据 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{n-1}$ 正交,即

$$E\{\tilde{\mathbf{y}}_n, \mathbf{y}_k\} = 0 \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (9-131)$$

性质 2 新息过程由彼此正交的随机序列 $\{\tilde{\mathbf{y}}_n\}$ 组成,即

$$E\{\tilde{\mathbf{y}}_n, \tilde{\mathbf{y}}_k\} = 0 \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (9-132)$$

性质 3 表示观测数据的随机序列 $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ 与表示新息过程的随机序列 $\{\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_n\}$ 一一对应,即

$$\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\} \sim \{\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_n\} \quad (9-133)$$

性质 1 表明,新息过程 $\{\tilde{\mathbf{y}}_k\}$ 与原观测过程 $\{\mathbf{y}_k\}$ 的线性空间正交。然而,性质 3 表明,包含在观测数据 \mathbf{y}_k 中的信息也存在于新过程 $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 之中。另一方面, $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 不相关性(性质 2)又意味着 $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 的每一个值都带来新的信息。因此,常将新过程 $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 称作为原观测过程的新息过程,这就是新息的确切涵义。

因此,为了获得最优估值,有必要利用某一系数矩阵 \mathbf{H}_k [见下面式(9-150)]来校正估计值 $\hat{\mathbf{x}}'_k$, 这样将会得到更好的估计。此时

$$\hat{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{H}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}'_k) = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{H}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (9-134)$$

式(9-134)就是卡尔曼滤波估计的递推公式。 k 时刻的滤波误差定义为

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \quad (9-135)$$

如果能求出这个 \mathbf{x}_k 与 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 的均方误差阵(应为方阵)最小条件下的 \mathbf{H}_k , 然后再将 \mathbf{H}_k 代入式(9-134),则所求得 $\tilde{\mathbf{x}}_k$ 将是对 \mathbf{x}_k 的线性最优估计。

下面求在最小均方误差条件下的增益矩阵 \mathbf{H}_k , 而且设初始状态 \mathbf{x}_0 与 $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$ 均不相关。 k 时刻滤波的均方误差阵(即误差的协方差矩阵)为

$$\mathbf{P}_k = E[\tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T] \quad (9-136)$$

而未考虑噪声时的均方误差阵为

$$\mathbf{P}'_k = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}'_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}'_k)^T] \quad (9-137)$$

为了求得 \mathbf{P}_k 作为 \mathbf{H}_k 的函数, 先求出 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}_k$ 。将式 (9-124) 和式 (9-125) 代入式 (9-134), 得

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{H}_k [\mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}] \quad (9-138)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k (\mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}) + \mathbf{H}_k \mathbf{v}_k$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_k \quad (9-139)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) [\mathbf{A}_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}] - \mathbf{H}_k \mathbf{v}_k$$

将式 (9-139) 以及式 (9-126) 代入式 (9-136), 得均方误差阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T] \\ &= E\{[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)(\mathbf{A}_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}) - \mathbf{H}_k \mathbf{v}_k] \times \\ &\quad [(\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)(\mathbf{A}_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}) - \mathbf{H}_k \mathbf{v}_k]^T\} \\ &= E\{[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{A}_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{H}_k \mathbf{v}_k] \times \\ &\quad [(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \mathbf{A}_k^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{w}_{k-1}^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)^T - \mathbf{v}_k^T \mathbf{H}_k^T]\} \\ &= E[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{A}_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \mathbf{A}_k^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)^T] + \\ &\quad E[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)^T] - \\ &\quad E[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) \cdot \mathbf{A}_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \cdot \mathbf{v}_k^T \mathbf{H}_k^T] - \\ &\quad E[\mathbf{H}_k \mathbf{v}_k \mathbf{A}_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)^T] + E[\mathbf{H}_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{H}_k^T] + \\ &\quad E[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{A}_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \mathbf{w}_{k-1}^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)^T] + \\ &\quad E[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{w}_{k-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \mathbf{A}_k^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)^T] - \\ &\quad E[\mathbf{H}_k \mathbf{v}_k \mathbf{w}_{k-1}^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)^T] - E[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{w}_{k-1} \mathbf{v}_k^T \mathbf{H}_k^T] \end{aligned} \quad (9-140)$$

式 (9-140) 中

$$E[(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T] = \mathbf{P}_{k-1}$$

$$E[\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^T] = \mathbf{Q}_{k-1}$$

$$E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{R}_k$$

式 (9-140) 中共有 9 项, 因为 \mathbf{v}_k 与 \mathbf{w}_{k-1} 互不相关, 即 $E[\mathbf{v}_k \mathbf{w}_{k-1}^T] = E[\mathbf{v}_{k-1} \mathbf{v}_k^T] = 0$, 故式 (9-140) 第 8、9 两项均为零。另外, 根据式 (9-117), 得

$$\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-2} \mathbf{A}^{k-2-j} \mathbf{w}_j \quad (9-141)$$

由该式可以看出 \mathbf{x}_{k-1} 与 $\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k-2}$ 有关, 而与 \mathbf{w}_{k-1} 无关, 因此

$$E[\mathbf{x}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^T] = E[\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T] = 0 \quad (9-142)$$

根据式 (9-138) 得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1} = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-2} + \mathbf{H}_{k-1} (\mathbf{C}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{C}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-2}) \quad (9-143)$$

由上式可见, $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 依赖于 \mathbf{x}_{k-1} (即依赖于 $\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k-2}$) 及 \mathbf{v}_{k-1} , 而与 \mathbf{w}_{k-1} 和 \mathbf{v}_k 不相关, 故有

$$E[(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \mathbf{v}_k^T] = E[\mathbf{v}_k (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T] = 0 \quad (9-144)$$

$$E[(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \mathbf{w}_{k-1}^T] = E[\mathbf{w}_{k-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T] = 0 \quad (9-145)$$

综上所述, 式 (9-140) 中第 3、4、6、7 项均为零, 只有第 1、2、5 项不为零, 即

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)^T + (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{Q}_{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{H}_k \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k^T$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) (\mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_{k-1}) (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{H}_k \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k^T \quad (9-146)$$

又因

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_k &\triangleq E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}'_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}'_k)^T] \\ &= E[(\mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})][(\mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T] \\ &= E\{[\mathbf{A}_k(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}][\mathbf{A}_k(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}]^T\} \\ &= \mathbf{A}_k [E(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T] \mathbf{A}_k^T + E[\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^T] \\ &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_{k-1} \end{aligned} \quad (9-147)$$

将上式代入式(9-146)得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}'_k (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{H}_k \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k^T \\ &= \mathbf{P}'_k - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k - \mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k^T \mathbf{H}_k^T + \mathbf{H}_k (\mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k) \mathbf{H}_k^T \end{aligned} \quad (9-148)$$

由于 $\mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k$ 是正定阵, 可写成

$$\mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k = \mathbf{S} \mathbf{S}^T$$

令 $\mathbf{U} = \mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k^T$, 又因为 $\mathbf{P}'_k = \mathbf{P}'_k^T$, 所以

$$\mathbf{U}^T = (\mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k^T)^T = \mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k^T = \mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k$$

故有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}'_k - \mathbf{H}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{U} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{H}_k \mathbf{S} \mathbf{S}^T \mathbf{H}_k^T \\ &= [\mathbf{H}_k \mathbf{S} - \mathbf{U} (\mathbf{S}^T)^{-1}] [\mathbf{H}_k \mathbf{S} - \mathbf{U} (\mathbf{S}^T)^{-1}]^T + \mathbf{P}'_k - \mathbf{U} (\mathbf{S} \mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{U}^T \\ &= [\mathbf{H}_k \mathbf{S} - \mathbf{U} (\mathbf{S}^T)^{-1}] [\mathbf{H}_k \mathbf{S} - \mathbf{U} (\mathbf{S}^T)^{-1}]^T + \mathbf{P}'_k - \mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k \end{aligned} \quad (9-149)$$

式(9-149)第2、3项均与 \mathbf{H}_k 无关, 而第1项为半正定矩阵, 因此, 使 \mathbf{P}_k 为最小的 \mathbf{H}_k 应满足条件

$$\mathbf{H}_k \mathbf{S} - \mathbf{U} (\mathbf{S}^T)^{-1} = 0$$

即

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{U} (\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{U} (\mathbf{S} \mathbf{S}^T)^{-1} = \mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (9-150)$$

将式(9-150)代入式(9-149), 得最小均方误差阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}'_k - \mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k \\ &= \mathbf{P}'_k - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}'_k \end{aligned} \quad (9-151)$$

式(9-134)、式(9-147)、式(9-150)和式(9-151)表示了离散卡尔曼滤波的最终形式, 表9.1列出了上述诸式。由式(9-134)可见, 如果已知 \mathbf{H}_k , 利用前一个 \mathbf{x}_k 的估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 和当前的观测值 \mathbf{y}_k 就可以求得 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 。 \mathbf{H}_k 是按式(9-150)计算的, 代入式(9-134)求出的就是在最小均方误差条件下的 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 。从式(9-147)、式(9-150)中可看出 \mathbf{P}'_k 和 \mathbf{H}_k 的计算不依赖于观测序列 y_1, y_2, \dots, y_{k-1} , 因此有可能预先计算并存储增益矩阵 \mathbf{H}_k 。图9.17是卡尔曼滤波算法的计算流程图。

表 9.1 离散卡尔曼滤波算法

状态方程	$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}$ (9-124)
量测方程	$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$ (9-125)
统计特性	$\begin{aligned} E[\mathbf{w}_k] &= 0 \quad E[\mathbf{v}_k] = 0 \\ \text{Cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j] &= E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{kj} \\ \text{Cov}[\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j] &= E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T] = \mathbf{R}_k \delta_{kj} \\ \text{Cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j] &= E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^T] = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9-126)$

续表

初始条件	$E[\mathbf{x}_k] = m_{x_0} \quad \text{Var}[\mathbf{x}_0] = E[(\mathbf{x}_0 - m_{x_0})(\mathbf{x}_0 - m_{x_0})^T] = \mathbf{p}_0$ $\text{Cov}[\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_k^T] = E[\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_k^T] = 0$ $\text{Cov}[\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_k] = E[\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_k^T] = 0$	(9-127)
递推公式	$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{H}_k (y_k - \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$	(9-134)
增益方程	$\mathbf{H}_k = \mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$	(9-150)
均方误差阵	$\mathbf{P}'_k = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_{k-1} \text{ (未考虑噪声情况)}$	(9-147)
	$\mathbf{P}_k = \mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}'_k \text{ (滤波的)}$	(9-148)

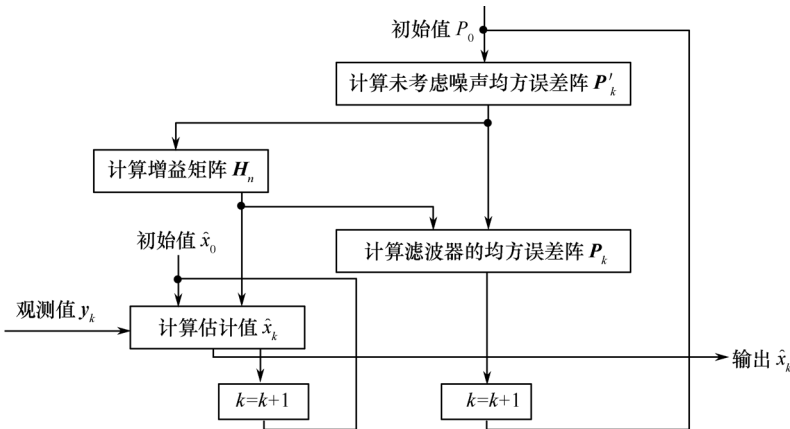


图 9.17 卡尔曼滤波算法的计算流程图

根据已知矩阵 A_k, C_k, Q_k, R_k , 并已知初始值 P_0, x_0 及观测到的 y_k , 即可进行计算。

图 9.18 示出了这种一步递推计算 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 的方法。另外,还可以将被估计(滤波)的信号和被预测的信号联系起来。在纯预测的情况下, $\mathbf{v}_k=0$, 并且,若 $\mathbf{m}_x=0$, 则 \mathbf{w}_k 可不必考虑, 于是

$$\hat{\mathbf{x}}_{(k+1|k)} = \hat{\mathbf{x}}'_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k \quad (9-152)$$

式(9-152)说明,给出被滤波信号 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 后,未来一步信号的最优估计忽略了噪声的影响,并假设转移矩阵 $\Phi_{k+1,k}$ (即 \mathbf{A}_k)只对估计起作用。用 \mathbf{A}_k 乘估计(滤波)方程(9-134),并用式(9-152)的关系就可以得到预测方程

$$\hat{\mathbf{x}}_{(k+1|k)} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{(k|k-1)} + \mathbf{G}_k [y_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{(k|k-1)}] \quad (9-153)$$

式中, $\mathbf{G}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{H}_k$ 称做预测增益矩阵, 将 \mathbf{A}_k 乘以式(9-134), 并用 $\mathbf{P}_{(k|k-1)}$ 表示 \mathbf{P}'_k 得

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{C}_k^T [\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1} \quad (9-154)$$

式(9-153)是预测均方误差阵。而且有

$$\mathbf{P}_{(k+1|k)} = [\mathbf{A}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{C}_k] \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (9-155)$$

式(9-154)是预测误差协方差矩阵。它是通过把式(9-151)代入到式(9-147)中,并用 $\mathbf{P}_{(k|k-1)}$ 表示 \mathbf{P}'_k 后得到的。在研究预测情况时,预测误差协方差是个重要参数。

这种由式(9-152)给出的滤波和预测的简单关系可用图 9.19 表示。它可实现从卡尔曼滤波器中获得一步预测。

下面讨论卡尔曼滤波公式中增益矩阵 \mathbf{H}_k 与初始均方误差阵 \mathbf{P}_0 、动态噪声协方差阵 \mathbf{Q}_{k-1} 及测量噪声协方差阵 \mathbf{R}_k 之间的关系。

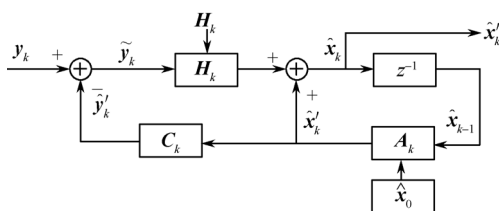


图 9.18 卡尔曼滤波求 \hat{x}_k 的一步递推法

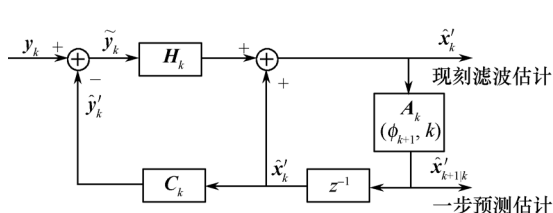


图 9.19 同时实现矢量信号滤波和预测输出的方框图

(1) 由式(9-150)可以看出,当 R_k 增大时, H_k 变小,这是因为如果测量噪声增大,则增益应取小些,以减弱测量噪声的影响。

(2) 当 P_0 变小或 Q_{k-1} 变小或两者都变小时,从式(9-147)可以看出 P_k' 变小,从而可以看出 P_k 变小, H_k 变小,这是因为 P_0 变小表示初始估计较好, Q_{k-1} 变小表示状态转移的随机波动小,所以新加进的观测值对状态预测的校正影响减弱,增益矩阵 H_k 应当变小。

9.8.3 利用标量卡尔曼滤波运算过渡到矢量卡尔曼滤波

上面利用递推方法和“新息”概念导出了矢量信号的离散矢量卡尔曼滤波的离散状态方程和观测方程。并根据观测矢量 $x(k)$,最佳地估计信号矢量 $s(k)$ (滤波问题)或 $s(k+1|k)$ (预测问题)。也就是使

$$E\{[x_j(k) - \hat{x}_j(k)]^2\} \quad (j = 1, 2, \dots, q) \quad (9-156)$$

同时达到最小,实际上,上面的推导结果,可采用 Scovell 给出的标量运算与矩阵运算的关系(见表 9.2)可直接列出所推导的结果。

矢量卡尔曼滤波的问题在形式上完全与满足一阶动态方程的单个时变信号的处理方法一样,只是把所有方程改变为矩阵形式,并用一种矩阵最优化步骤即可得到最佳解。因此,使用 Scovell 给出的标量运算和矩阵运算的关系(见表 9.2),则可将一维(标量)情况的方程推广到多维(矢量)情况的方程。

表 9.2 标量运算向矢量运算的过渡

标 量	矢 量
$a+b$	$A+B$
Ab	AB
a^2b	ABA^T
$(a+b)^{-1}$	$(A+B)^{-1}$

根据第 4 节和第 5 节的标量卡尔曼滤波和卡尔曼预测的推导结果,就可从单个信号向矢量信号过渡,系统参数 a 过渡为系统转移矩阵 A ,观测系数 c 变为观测矩阵 C 。下面将讨论另外几个有关矢量的过渡。

观测噪声方差向观测噪声协方差矩阵的过渡可以写成

$$\sigma_n^2 = \sigma_{n_1,1}^2 = E[n_1^2(k)] \Rightarrow R(k) = E[n(k)n^T(k)] \quad (9-157)$$

这里,我们使用了表 9.2 中的第三条,且令 $b=1$ 。例如,对于两个信号的情况,有

$$R(k) = E \begin{bmatrix} n_1^2(k) & n_1(k)n_2(k) \\ n_2(k)n_1(k) & n_2^2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{n_1,1}^2 & \sigma_{n_1,2}^2 \\ \sigma_{n_2,1}^2 & \sigma_{n_2,2}^2 \end{bmatrix}$$

类似地,对于系统噪声,有

$$\sigma_w^2 = \sigma_{w_1,1}^2 = E[w_1^2(k)] \Rightarrow Q(k) = E[w(k)w^T(k)] \quad (9-158)$$

式中, $Q(k)$ 表示系统噪声协方差矩阵。注意,若噪声矢量各分量之间不相关,则协方差矩阵 $R(k)$ 与 $Q(k)$ 为对角阵。

单个信号情况下的均方误差过渡到矢量信号情况下的误差协方差矩阵,可以写成

$$p(k) = p_{1,1}(k) = E[e_1^2(k)] \Rightarrow \mathbf{P}(k) = E[\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)] \quad (9-159)$$

对于两个信号的情况,有

$$\mathbf{P}(k) = E \begin{bmatrix} e_1^2(k) & e_1(k)e_2(k) \\ e_2(k)e_1(k) & e_2^2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) \end{bmatrix}$$

式中,对角线上各项,正是式(9-156)所示各信号分量的均方误差。

应用上述原理,下面列出标量卡尔曼滤波方程组和矢量卡尔曼滤波方程组的对应关系式。

(1) 滤波方程[第一式同式(9-87),第二式同式(9-134)]

$$\begin{aligned} \hat{s}(k) &= a\hat{s}(k-1) + b(k)[x(k) - ca\hat{s}(k-1)] \\ \hat{\mathbf{s}}(k) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k-1) + \mathbf{H}(k)[\mathbf{x}(k) - \mathbf{C}\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k-1)] \end{aligned} \quad (9-160)$$

(2) 增益方程[第一式同式(9-88),第二式同式(9-89),第三式同式(9-150)]

$$\begin{aligned} b(k) &= p_1(k)c[c^2p_1(k) + \sigma_n^2]^{-1} \\ p_1(k) &= a^2p(k-1) + \sigma_w^2 \\ \mathbf{H}(k) &= \mathbf{P}_1(k)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}_1(k)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}(k)]^{-1} \end{aligned} \quad (9-161)$$

式中

$$\mathbf{P}_1(k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(k)$$

式中

(3) 滤波均方误差[第一式同式(9-89)],第二式同式(9-151)

$$\begin{aligned} p(k) &= p_1(k) - c \cdot b(k)p_1(k) \\ \mathbf{P}(k) &= \mathbf{P}_1(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{C}\mathbf{P}_1(k) \end{aligned} \quad (9-162)$$

上述式(9-160)~式(9-162)构成了矢量卡尔曼滤波器,它适用于由下述状态方程和观测方程所描述的模型为

$$\hat{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k-1) + \mathbf{w}(k-1) \quad (9-163)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (9-164a)$$

注意,根据表 9.2 中标量一矩阵的对应关系, $b(k)$ 变为 $\mathbf{B}(k)$ 似乎更为合理,而在上述方程中,在此用 $\mathbf{H}(k)$ (或 $\mathbf{K}(k)$)而不是用 $\mathbf{B}(k)$ 表示增益矩阵,因为这是卡尔曼滤波文献中的习惯用法。另外,有些作者用 $\mathbf{P}(k|k-1)$ 代替 $\mathbf{P}_1(k)$,以便更清楚地表明 $\mathbf{P}_1(k)$ 表示预测误差协方差矩阵。

最后应该指出,对于时变系统信号模型和时变观测模型,系统矩阵 \mathbf{A} 及观测矩阵 \mathbf{C} 皆为时变的,用 $\mathbf{A}(k)$ 和 $\mathbf{C}(k)$ 表示。

同样,下面列出标量卡尔曼一步预测算法方程组和矢量卡尔曼一步预测算法的对应关系式:

预测方程[第一式同式(9-90)]

$$\begin{aligned} \hat{s}(k+1|k) &= a\hat{s}(k|k-1) + \beta(k)[x(k) - c\hat{s}(k|k-1)] \\ \hat{\mathbf{s}}(k+1|k) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k|k-1) + \mathbf{G}(k)[\mathbf{x}(k) - \mathbf{G}\hat{\mathbf{s}}(k|k-1)] \end{aligned} \quad (9-164b)$$

预测增益[第一式同式(9-94)]

$$\begin{aligned} \beta(k) &= acp(k|k-1)[c^2p(k|k-1) + \sigma_n^2]^{-1} \\ \mathbf{G}(k) &= \mathbf{A}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}(k)]^{-1} \end{aligned} \quad (9-165)$$

预测均方误差[第一式同式(9-100)]

$$\begin{aligned} p(k+k|k) &= a^2p(k|k-1) - ac\beta(k)p(k|k-1) + \sigma_w^2 \\ \mathbf{P}(k+1|k) &= [\mathbf{A} - \mathbf{G}(k)\mathbf{C}]\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(k) \end{aligned} \quad (9-166)$$

在上述方程中,引入了预测增益矩阵 $\mathbf{G}(k)$,它显示的是标量卡尔曼预测器中预测增益

$\beta(k)$ 在矢量情况的推广,方程中的其他量,均与前面使用的相同。

与标量情况的式(9-96)相似,可以得到矢量信号的预测估计与滤波估计之间的关系:

$$\hat{\mathbf{s}}(k+1|k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) \quad (9-167)$$

这表明,在忽略 $\mathbf{w}(k)$ 的情况下,信号的最佳一步预测估计应等于信号的滤波估计左乘以矩阵 \mathbf{A} 。滤波方程式(9-160)两边左乘矩阵 \mathbf{A} 并使用式(9-167),可得到预测方程式(9-164)。且有 $\mathbf{G}(k) = \mathbf{A}\mathbf{H}(k)$ [若 \mathbf{A} 为时变的,则 $\mathbf{G}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{H}(k)$]。这表明预测增益矩阵与滤波增益矩阵也是用矩阵 \mathbf{A} 联系起来的。

应用上述矢量信号滤波与预测之间的有趣关系,特别是式(9-167)的关系,可以建立同时实现矢量信号的滤波与预测的运算流程图,与图 9.19 完全相同。

在结束本节前,最后指出:卡尔曼滤波器采用线性递推的方法获得系统状态的最佳估计,所以适应性强,应用范围广,外推和平滑数据的精度高,是计算航迹数据等应用的一种好方法,这是它的优点。但是,它要求目标的状态模型是已知的,这常常不易做到。此外,由于它是递推计算的,如果模型与实际情况有较大的出入,有可能使估计误差越来越大,造成滤波器的发散,这是一个重要的缺点。再者,卡尔曼滤波器的计算量也较大,当状态的维数是 n 时,每收到一次观测数据,大约需要 $3n^2$ 次乘除法运算和 $3n^3$ 次加法减运算,所以在给定场合下是否采用卡尔曼滤波器,应根据数据的精度要求以及计算机的实时处理能力等因素来决定。

下面简略介绍克服由模型误差和计算误差引起的滤波发散的方法。

1. 关于模型误差所引起的滤波发散问题及其克服方法

系统模型误差源主要有三方面:

- (1) 系统的数学模型与实际物理过程不能很好地符合;
- (2) 不适当的线性化或降维处理;
- (3) 系统状态噪声和测量噪声的统计参数选取不合理。

由模型误差所产生的滤波发散现象集中表现为数据饱和,即随着时间的增加,测量数据对状态的修正作用越来越小,直到消失。克服这种滤波发散的方法主要有,限定下界滤波,衰减记忆滤波,限定记忆滤波和自适应滤波等。当然,这些方法均是以牺牲滤波最佳性为代价而换取滤波收敛性的。

2. 关于滤波数不稳定性问题及其克服方法

计算误差引起滤波发散的根源,是计算机的有限字长及舍入误差使得滤波协方差矩阵失去对称性或正半定性,造成计算值与理论值之差越来越大,从而产生滤波数值不稳定性问题。

为克服滤波数值不稳定性现象,Potter 首先建议以平方根的形式传播滤波协方差矩阵,他的这种设想仅限于零输入噪声和标量测量情况。后来,Potter 的想法被推广到存在输入噪声和矢量测量情况。同时,逆协方差矩阵平方根的更新方程和 U-D 因式分解方法也已得到证明。就目前来说,可利用的方法主要有:协方差平方根滤波与平滑,信息平方根滤波与平滑,序列平方根滤波与平滑和 U-D 因式分解滤波及其各种变体。实践已经表明,当计算机字长有限和估计问题出现严重病态情况时,上述方法均具有良好的数值稳定性,并能产生两倍于标准卡尔曼滤波的有效精度。换言之,当需要避免数值方面的困难时,与协方差滤波相比较,上述方法不会因为更新方程中的计算误差而使协方差矩阵失去对称性和非负定性,而且滤波计算只需要一半有效数字就行了。

平方根类型的滤波方法并非总是没有缺点的,这种方法在实现过程中经常(但不总是)需

要比较庞大的计算机程序,其计算量可能是标准卡尔曼滤波的 0.5~1.5 倍,这取决于状态、输入和输出量的维数 n, r 和 m 。对于小的 m ,协方差平方根滤波比信息平方根滤波更有效,但对于中等的或较大的 m ,则结论相反。

尽管 U-D 因式分解滤波实质上不属于平方根滤波的范畴,但它拥有平方根滤波的一切性质,是提高滤波数值稳定性的一种行之有效的方法。

9.9 用于雷达跟踪的卡尔曼滤波算法简介

现在继续例 9.11 和例 9.14 所讨论平面雷达边扫描边跟踪飞机的例子。在雷达中,发射与接收脉冲之间的延时提供了目标距离 r 的估计,而检测目标时刻的天线位置提供了目标方位 θ 的估计。典型的雷达天线转速为 6 转/分~15 转/分,因而数据的时间间隔 T 相应为 4~10 秒。也就是说,跟踪滤波器每隔 T 秒更新一次。

在例 9.11 中,已得出

$$r(k+1) = r(k) + T\dot{r}(k) \quad (9-168)$$

$$\text{和} \quad \dot{r}(k+1) = \dot{r}(k) + u_1(k) \quad (9-169)$$

同样地,可以写出相对于某平均值的方位偏移量 $\theta(k+1)$ 及方位速度 $\dot{\theta}(k+1)$ 的差分方程

$$\theta(k+1) = \theta(k) + T\dot{\theta}(k) \quad (9-170)$$

$$\text{和} \quad \dot{\theta}(k+1) = \dot{\theta}(k) + u_2(k) \quad (9-171)$$

式中, $u_2(k)$ 代表方位角速度在估计采样间隔 T 内的变化量,也假定它是零均值的白噪声过程,即

$$E[u_2(k)] = 0, E[u_2(k+1)u_2(k)] = 0$$

同时假定 $u_1(k)$ 与 $u_2(k)$ 分别代表 \dot{r} 和 $\dot{\theta}$ 的机动噪声,即经过 T 秒递推间隔后径向速度与方位速率的改变量,它们是目标偏离恒速轨道的原因。可以想像,它们均会以某种方式随 T 的增大而变大。例如,设 T 秒内有一恒力作用,则 $u_1(k) = T\ddot{r}(k)$, $u_2(k) = T\ddot{\theta}(k)$ 。实际上,由于 T 秒内作用于目标的外力是随机的,因而才可把 $u_1(k)$ 与 $u_2(k)$ 看做白噪声序列。

由式(9-168)~式(9-171)这样一组状态方程,唯一地描述了目标的状态。为了更加简明地表示这些信号,可写成矢量形式,即用矢量信号表示上述 4 个差分方程,得出矢量模型为

$$\begin{bmatrix} s_1(k+1) \\ s_2(k+1) \\ s_3(k+1) \\ s_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(k+1) \\ \dot{r}(k+1) \\ \theta(k+1) \\ \dot{\theta}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ s_3(k) \\ s_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_1(k) \\ 0 \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

或者写成

$$\mathbf{s}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{U}(k) \quad (9-172)$$

下面再写出雷达的观测模型。雷达传感器每 T 秒提供一次关于距离 $r(k) = s_1(k)$ 和方位 $\theta(k) = s_3(k)$ 的带有噪声的观测数据,观测数据序列可表示为

$$x_1(k) = s_1(k) + n_1(k)$$

$$x_3(k) = s_3(k) + n_3(k)$$

与例 9.14 讨论的情况一样,观测矢量模型可写为

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ s_3(k) \\ s_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_3(k) \end{bmatrix}$$

或写成 $\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k)$ (9-173)

式中 $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$, $\mathbf{n}(k) = \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_3(k) \end{bmatrix}$

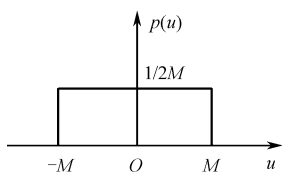
矩阵 \mathbf{C} 为 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (9-174)

通常假设 $n_1(k)$ 和 $n_3(k)$ 为零均值的白噪声, 其方差分别为 σ_r^2 和 σ_θ^2 , 而且 $n_1(k)$ 和 $n_3(k)$ 互不相关, 即 $E[n_1(k)n_3(k)] = 0$ 。

虽然在下面的讨论中把观测数据及被估计的飞行参量规定为平稳过程, 因而其方差不随 k 变化, 但是非平稳过程情况也容易处理。例如角度观测误差也许是由于阵风作用于天线造成的, 而这些阵风在一天的某段时间内较大, 因而会出现非平稳情况。

根据式(9-157), 观测噪声的协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(k) &= E[\mathbf{n}(k)\mathbf{n}^T(k)] \\ &= \begin{bmatrix} E[n_1^2(k)] & E[n_1(k)n_2(k)] \\ E[n_1(k)n_2(k)] & E[n_2^2(k)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r^2(k) & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9-175)$$



根据式(9-158), 系统噪声或机动噪声的协方差矩阵可写为

$$\mathbf{Q}(k) = E[\mathbf{U}(k)\mathbf{U}^T(k)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (9-176)$$

图 9.20 加速度 $u(k)$ 的概率密度 式中, $\sigma_1^2 = E[u_1^2(k)]$, $\sigma_2^2 = E[u_2^2(k)]$ 分别代表 T 乘以径向加速度的方差和 T 乘以方位加速度的方差。径向加速度和方位加速度与发动机推力的随机变化及随机阵风的扰动有关, 其方差都可以看做与时间无关。为了简化分析, 假设加速度 $u(k)$ 无论在 r 方向或者在 θ 方向上都是均匀分布的*, 即 r 和 θ 的加速度 $u(k)$ 的概率密度函数在 $[-M, +M]$ 内均匀分布 $[p(u) = \frac{1}{2M}]$, 其中 M 为径向和横向的最大加速度, 如图 9.20 所示。

由此不难算出 $u(k)$ 的方差为

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 p(u) du = \frac{1}{2M} \int_{-M}^M u^2 du = \frac{M^2}{3} \quad (9-177)$$

由于 $u_1 = Tu$, $u_2 = u_1/R$, R 是飞机与雷达的平均距离, 故式(9-137)中的方差为

$$\sigma_1^2 = T^2 \sigma_u^2, \quad \sigma_2^2 = \sigma_1^2 / R^2 \quad (9-178)$$

有了 σ_1^2 和 σ_2^2 两个参量就可确定矩阵 $\mathbf{Q}(k)$ 。至此, 我们已具有完全确定图 5.19 的卡尔曼滤波运算的全部信息。

启动卡尔曼滤波器需要得到第一个估计以及相应于这一估计的第一个误差协方差矩阵。这可用几种方法求得, 但在这里我们不准备详细讨论这一问题。我们将采用所谓准最

* Schwartz 和 Shaw 使用了一种更为实际的概率密度 $p(u)$, 见参考文献[6]。

佳方法来给出起始条件,它适用于本题中平面雷达这种使用两个观测数据(距离和方位)的情况。设想测量两次,即 $k=1$ 和 $k=2$ 时对距离偏移与方位偏移各测两次,其中第一组数据 $x(1)$ 可以用来估计距离和方位,但不能估计距离变化率和方位变化率,只有获得了前两组观测数据 $x(1)$ 和 $x(2)$ 后,滤波器才启动。利用 $x(1)$ 和 $x(2)$,就可得出有 4 个分量的信号矢量信号 $\hat{s}(2)$

$$\hat{s}(2) = \begin{bmatrix} \hat{s}_1(2) = \hat{r}(2) = x_1(2) \\ \hat{s}_2(2) = \hat{\dot{r}} = \frac{1}{T}[x_1(2) - x_1(1)] \\ \hat{s}_3(2) = \hat{\theta}(2) = x_2(2) \\ \hat{s}_4(2) = \hat{\dot{\theta}}(2) = \frac{1}{T}[x_2(2) - x_2(1)] \end{bmatrix} \quad (9-179)$$

上式表明,距离和方位估计就是最近一次的雷达读数,而速率的准最佳估计是两个读数之差除以 T ,即承认观测值是在无噪声和目标等运动情况下得到的。这公式直观看来是合理的,而且还符合飞机为一阶系统动态特性的假定(忽略了式(9-172)中加速度的影响)。还应指出,式(9-179)就是所谓的两点外推,它能不断利用最新一组数据估计距离和方位,用最新两组数据估计距离速率和方位速率。这种滤波器本质上是非递归滤波器。在雷达跟踪问题上,它在跟踪精度上比卡尔曼滤波器要低得多,但其所需的计算机处理时间和存储容量较少。

不难看出,我们可计算的第一个误差协方差矩阵为 $P(2)$,或用另一种符号写成 $P(2|2)$,利用式(9-159),有

$$P(2|2) = E\{[s(2) - \hat{s}(2)][s(2) - \hat{s}(2)]^T\} \quad (9-180)$$

为此,需求 $s(2) - \hat{s}(2)$ 。利用式(9-174)和式(9-175)解出 $s(2)$,再由式(9-181)解出 $\hat{s}(2)$,于是可得下述结果

$$s(2) - \hat{s}(2) = \begin{bmatrix} \hat{s}_1(2) - s_1(2) \\ \hat{s}_2(2) - s_2(2) \\ \hat{s}_3(2) - s_3(2) \\ \hat{s}_4(2) - s_4(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1(2) \\ \frac{n_1(2) - n_1(1)}{T} - u_1(1) \\ n_2(2) \\ \frac{n_2(2) - n_2(1)}{T} - u_2(1) \end{bmatrix} \quad (9-181)$$

将式(9-181)代入式(9-180),得

$$P(2|2) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \quad (9-182)$$

式中,元素 p_{ij} 由 $E\{[s_i(2) - \hat{s}_i(2)][s_j(2) - \hat{s}_j(2)]^T\}$ 给出。考虑到 $U(k)$ 和 $n(k)$ 之间不相关,而且 $U(k)$ 和 $n(k)$ 各自的样本之间亦不相关,故元素 p_{ij} 可算出如下:

$$p_{11} = E[n_1^2(2)] = \sigma_r^2$$

$$p_{12} = p_{21} = E\left\{n_1(2) \left[\frac{n_1(2) - n_1(1)}{T} - u_1(1) \right] \right\} = \frac{\sigma_r^2}{T}$$

类似地,有

$$p_{22} = \frac{2\sigma_r^2}{T^2} + \sigma_1^2, \quad p_{33} = \sigma_\theta^2$$

$$p_{44} = \frac{2\sigma_\theta^2}{T^2} + \sigma_2^2, \quad p_{34} = p_{43} = \frac{\sigma_\theta^2}{T}$$

其他各元素为零,因此

$$\mathbf{P}(2|2) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \quad (9-183)$$

式(9-182)和式(9-183)可用来启动离散卡尔曼滤波算法,处理 $k=3$ 以后的观测值。

现举一例说明 $\mathbf{P}(2|2)$ 的具体计算。为计算 $\mathbf{P}(2|2)$ 中 8 个元素,首先要根据式(9-177)~式(9-179)求出 σ_1^2, σ_2^2 ,若已知目标距离 R ,天线扫描时间 T ,以及目标最大的随机加速度 M ,例如, $R=160\text{km}, T=15\text{s}, M=2.1\text{m/s}^2$, 则

$$\sigma_1^2 = 10^3/3, \quad \sigma_2^2 = 1.3 \times 10^{-8}$$

由式(9-176),可算出 $\mathbf{Q}(k)$ 。若已知 $\sigma_r=1000\text{m}, \sigma_\theta=1^\circ$,由式(9-175),可算出 $R(k)$ 。又由式(9-174),即可得到估计误差协方差矩阵的初始值

$$\mathbf{P}(2|2) = \begin{bmatrix} 10^6 & 6.7 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 6.7 \times 10^4 & 0.9 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9 \times 10^{-4} & 1.9 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 1.9 \times 10^{-5} & 2.6 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

当按照上述两点外推并求出估计误差的起始协方差矩阵后,则可由式(9-167)得

$$\mathbf{P}(k+1|k) = [\mathbf{A} - \mathbf{G}(k)\mathbf{C}]\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(k)$$

和式(9-162)得

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}_1(k) - \mathbf{H}(k)\mathbf{C}\mathbf{P}_1(k)$$

式中

$$\mathbf{P}_1(k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(k-1)$$

这意味着

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k|k)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(k) \quad (9-184)$$

再加上式(9-161):

$$\mathbf{H}(k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}_1(k)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}(k)]^{-1}$$

等矩阵方程实现迭代运算。利用式(9-184)可算出一步预测误差的协方差矩阵 $\mathbf{P}(3|2)$,再由式(9-161)求得增益矩阵的起始值 $\mathbf{H}(3)$ 。然后由新的观测矢量 $\mathbf{x}(3)$ 计算 $\hat{\mathbf{s}}(3)$ 和下一步预测矢量 $\hat{\mathbf{s}}(4|3)$,同时根据式(9-182)求出 $\mathbf{P}(3|3)$ 。由此反复递推,便可得出本例中矢量信号的估计结果。实际上以上计算都可由计算机来完成。

计算机模拟表明,增益调整位置很快降到最终的稳定值,对于本例,只要 6 次迭代就足以达到稳定值。均方预测误差也单调地降至稳定值,在本例中,距离预测均方误差的稳定值和距离观测噪声的方差 σ_r^2 差不多,而方位预测均方误差的稳定值比 σ_θ^2 稍小一些。方位预测误差需 8 次迭代才收敛于其稳定值,而距离预测误差 5 次迭代就收敛于其稳定值。

以上讨论中,把观测数据及被估计的飞行参量规定为平稳过程。为了推广应用到非平稳过程(此时系统参数是时变的),应将信号模型及观测模型改写成

$$\mathbf{s}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{s}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (9-185)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (9-186)$$

式中, $\mathbf{s}(k)$ 和 $\mathbf{w}(k)$ 均为 n 维列矢量; 由 k 到 $k+1$ 的转移矩阵 $\mathbf{A}(k)$ 为 $n \times n$ 方阵; 观测数据 $\mathbf{x}(k)$ 和 $\mathbf{n}(k)$ 为 m 维列矢量; 观测矩阵 $\mathbf{C}(k)$ 为 $m \times n$ 矩阵; $\mathbf{w}(k)$ 和 $\mathbf{n}(k)$ 假定是均值为零的白噪声过程, 且两者互不相关, 它们的协方差矩阵各为

$$\left. \begin{aligned} E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)] &= \mathbf{R}(k)\delta_{kj} \\ E[\mathbf{n}(k)\mathbf{n}^T(k)] &= \mathbf{Q}(k)\delta_{kj} \end{aligned} \right\} \quad (9-187)$$

而且都与时间 k 有关。这种白噪声的定义是白噪声概念在非平稳随机过程中的推广; 各线性变换矩阵 $\mathbf{A}(k)$ 及 $\mathbf{C}(k)$ 对于非平稳随机过程而言都是时间 k 的函数, 而且 $\mathbf{s}(k)$ 和 $\mathbf{C}(k)\mathbf{s}(k)$ 的均值都不一定为零。

9.10 常增益滤波方法

滤波和预测的目的是估计当前和未来时刻目标的运动状态, 包括位置、速度和加速度等。前面我们讨论了两种线性滤波器: 维纳滤波器和卡尔曼滤波器, 现在我们讨论另一种线性滤波器: 常增益 α - β 与 α - β - γ 滤波器。

9.10.1 α - β 滤波

α - β 滤波器最早是为了改善边扫描边跟踪雷达的跟踪性能而提出的。这种体现的雷达, 在天线波瓣一次扫过目标期间, 大约能收到几个至几十个目标回波脉冲, 但从一串回波脉冲到下一串回波脉冲则相隔一个天线扫描周期, 可长达数秒。因而这种雷达的距离和角度跟踪系统处于采样跟踪状态, 从而要求跟踪系统具有对目标状态进行预测的能力, 以防止下一次采样之前雷达已失去对目标的跟踪。

α - β 滤波以输入是均匀变化的信号为前提的。当得到 k 时刻的测量值 $x(k)$ 后, 按下列方程对信号 $s(k)$ 进行估计

$$\hat{s}(k) = \hat{s}(k | k-1) + \alpha[x(k) - \hat{s}(k | k-1)] \quad (9-188)$$

$$\hat{s}(k) = \hat{s}(k | k-1) + \frac{\beta}{T}[x(k) - \hat{s}(k | k-1)] \quad (9-189)$$

一步预测为

$$\hat{s}(k | k-1) = \hat{s}(k-1) + T\hat{\dot{s}}(k-1) \quad (9-190)$$

$$\hat{\dot{s}}(k | k-1) = \hat{\dot{s}}(k-1) \quad (9-191)$$

式中, $\hat{s}(k)$ 是第 k 个周期的平滑坐标; $\hat{s}(k | k-1)$ 是在第 $(k-1)$ 个周期内计算所得的第 k 个周期的外推坐标; $x(k)$ 是第 k 个周期录取的坐标; $\hat{\dot{s}}(k)$ 是第 k 个周期的速度估计; T 是天线扫描周期; 校正系数 α 和 β 分别为位置和速度平滑系数。它们可以是常数, 也可以是随采样序列分段改变。我们引入以下记号:

$$\text{滤波估计矢量} \quad \hat{\mathbf{s}}(k) = [\hat{s}(k) \hat{\dot{s}}(k)]^T$$

$$\text{预测估计矢量} \quad \hat{\mathbf{s}}(k | k-1) = [\hat{s}(k | k-1) \hat{\dot{s}}(k | k-1)]^T$$

$$\text{状态转移矩阵} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

滤波增益矩阵 $\mathbf{H} = [\alpha \beta / T]^T$

则可写出 α - β 滤波的矢量矩阵表达式。式(9-191)和式(9-192)写成矩阵形式为

$$\hat{\mathbf{s}}(k | k-1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k-1) \quad (9-192)$$

同样,式(9-188)和式(9-189)写成矩阵形式为

$$\hat{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{s}(k | k-1) + \mathbf{H}[\mathbf{x}(k) - \mathbf{C}\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k | k-1)] \quad (9-193)$$

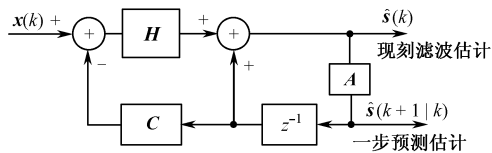


图 9.21 同时实现矢量信号滤波
与预测的常增益 α - β 滤波运算流程

由上两式可知, α - β 滤波是一种递推滤波, 其运算流程如图 9.21 所示。

将式(9-192)和式(9-193)以及图 9.21 与卡尔曼滤波方程式(9-160)和预测方程式(9-164)以及图 9.19 相比较, 显然它们具有相同的结构形式, 不同之处仅在于卡尔曼滤波增益 $\mathbf{H}(k)$ 是

时变的, 而 α - β 滤波增益 \mathbf{H} 是恒定的, 非时变的。因此, 可以认为 α - β 滤波是卡尔曼滤波的特例。

α - β 滤波器实质上是一个二阶线性定常系统, 它有两个自由参数, 即 α 和 β 。因此可以用线性系统的理论讨论 α - β 滤波器的性质和选择 α 和 β 的数值。通过计算可以求得位置估值和速度估值的等效传递函数 $H_s(z)$ 和 $H_{\dot{s}}(z)$ 分别为

$$H_s(z) = \frac{\hat{s}(z)}{x(z)} = \frac{az \left(z + \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \right)}{z^2 - (2 - \alpha - \beta)z + (1 - \alpha)} \quad (9-194)$$

$$H_{\dot{s}}(z) = \frac{\hat{\dot{s}}(z)}{x(z)} = \frac{\frac{\beta}{T}z(z-1)}{z^2 - (2 - \alpha - \beta)z + (1 - \alpha)} \quad (9-195)$$

由上两式可以看出, 滤波器的特征方程为

$$z^2 - (2 - \alpha - \beta)z + (1 - \alpha) = 0 \quad (9-196)$$

根据稳定性判据可知, 滤波器的稳定区域是由

$$2\alpha + \beta < 4, \quad 0 < \alpha < 2, \quad 0 < \beta < 4$$

所规定的三角形, 如图 9.22 所示。只要 α 和 β 的取值落在这个区域之内, 滤波器就是稳定的。

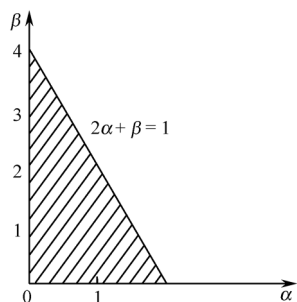


图 9.22 滤波器的稳定区域

α 和 β 值的选择除了满足稳定性条件以外, 还要考虑对滤波器暂态和稳态性能的要求。就滤波器的暂态特性而言, 可分为过阻尼、欠阻尼和临界阻尼三种情况。这三种情况的区域划分如图 9.23 所示。工程上常采用临界阻尼状态。

临界阻尼状态时, 特征方程的根是两个正的重根 r , 由此可建立起求解 α - β 参数值的关系式来, 即

$$(z - r)^2 = z^2 - (2 - \alpha - \beta)z - (1 - \alpha)$$

比较上式两边的各个系数, 可得

$$2r = 2 - \alpha - \beta$$

$$r^2 = 1 - \alpha$$

因此临界阻尼状态时 α 与 β 的关系式为

$$\beta = 2 - \alpha - 2\sqrt{1 - \alpha} \quad (9-197)$$

α 是位于 0~1 的某一个数值, 它的数值可以根据系统所要求的

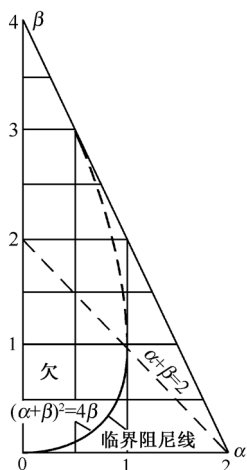


图 9.23 稳定区域划分

阻尼比和自然谐振频率来确定。若要求系统的带宽越大, α 就应越大, 这时平滑越差; 反之, α 越小, 系统带宽就越小, 平滑将越好。

9.10.2 α - β - γ 滤波

对于一个等加速输入过程可用 α - β - γ 法来实现递推滤波。

α - β - γ 滤波的滤波方程组为

$$\left. \begin{aligned} \hat{s}(k) &= \hat{s}(k|k-1) + \alpha[x(k) - \hat{s}(k|k-1)] \\ \hat{\dot{s}}(k) &= \hat{\dot{s}}(k|k-1) + \frac{\beta}{T}[x(k) - \hat{s}(k|k-1)] \\ \hat{\ddot{s}}(k) &= \hat{\ddot{s}}(k|k-1) + \frac{2\gamma}{T^2}[x(k) - \hat{s}(k|k-1)] \end{aligned} \right\} \quad (9-198)$$

预测方程组为

$$\left. \begin{aligned} \hat{s}(k|k-1) &= \hat{s}(k-1) + \hat{\dot{s}}(k-1)T + \hat{\ddot{s}}(k-1)T^2/2 \\ \hat{\dot{s}}(k|k-1) &= \hat{\dot{s}}(k-1) + \hat{\ddot{s}}(k-1)T \\ \hat{\ddot{s}}(k|k-1) &= \hat{\ddot{s}}(k-1) \end{aligned} \right\} \quad (9-199)$$

其矩阵表达式为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}(k|k-1) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k-1) \\ \hat{\mathbf{s}}(k) &= \hat{\mathbf{s}}(k|k-1) + \mathbf{H}[x(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{s}}(k|k-1)] \end{aligned} \right\} \quad (9-200)$$

式中

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= [\hat{\dot{s}} \ \hat{\ddot{s}} \ \hat{\ddot{s}}]^T, \quad \hat{\mathbf{s}}(k|k-1) = [\hat{\dot{s}} \ \hat{\ddot{s}} \ \hat{\ddot{s}}]^T_{k|k-1} \\ \mathbf{C} &= [1 \quad 0 \quad 0], \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \alpha & \frac{\beta}{T} & \frac{2\gamma}{T^2} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

系统的位置、速度和加速度估值对应输入测量值的等效传递函数为

$$\left. \begin{aligned} H_s(z) &= \frac{[\alpha^3 + (-2\alpha + \beta + \gamma)z^2 + (\alpha - \beta + \gamma)z]}{z^3 - (3 - \alpha - \beta - \gamma)z^2 + (3 - 2\alpha - \beta + \gamma)z - (1 - \alpha)} \\ H_{\dot{s}}(z) &= \frac{\left(\frac{\beta}{T}z\right)(z-1)\left[z + \frac{2\gamma - \beta}{\beta}\right]}{z^3 - (3 - \alpha - \beta - \gamma)z^2 + (3 - 2\alpha - \beta + \gamma)z - (1 - \alpha)} \\ H_{\ddot{s}}(z) &= \frac{\left(\frac{2\gamma}{T^2}z\right)(z-1)(z-1)}{z^3 - (3 - \alpha - \beta - \gamma)z^2 + (3 - 2\alpha - \beta + \gamma)z - (1 - \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (9-201)$$

因此系统的特征方程为

$$z^3 - (3 - \alpha - \beta - \gamma)z^2 + (3 - 2\alpha - \beta + \gamma)z - (1 - \alpha) = 0 \quad (9-202)$$

由稳定性判据可知, 系统的稳定条件为

$$\begin{aligned} \alpha &> 0, \beta > 0, \gamma > 0, 2\alpha + \beta \leq 4, \\ 2\alpha &> \beta, \alpha(\beta + \gamma) > 2\gamma \end{aligned} \quad (9-203)$$

α 、 β 和 γ 的参数值选择与 α - β 滤波器的参数值选择一样, 应考虑系统的稳定性以及暂态和稳态特性。

在临界阻尼状态选择时,系统特征方程的根是三重正实根 r ,即

$$(z-r)^3 = z^3 - (3-\alpha-\beta-\gamma)z^2 + (3-2\alpha-\beta-\gamma)z - (1-\alpha)$$

由此可得 α 、 β 和 γ 与根 r 的关系式

$$\alpha = 1 - r^3 \quad (9-204)$$

$$\beta = 1.5(1-r^2)(1-r) \quad (9-205)$$

$$\gamma = 0.5(1-r)^3 \quad (9-206)$$

给定 α 值后,可求得 r 值,从而得到 β 和 γ 的数值。

值得指出的是,常增益滤波器具有卡尔曼滤波器的结构形式,因此可以根据卡尔曼滤波理论来选择滤波增益阵。这样就为设计常增益滤波器提供了更多的方法,同时也建立起常增益滤波器与卡尔曼滤波器之间的联系。 α - β 滤波适合于目标做匀速运动的情况, α - β - γ 滤波适合于目标做匀加速运动的情况。在稳态时它们与卡尔曼滤波是等效的,但是在暂态过程中,或者目标做随机机动变化时,它们的性能不如卡尔曼滤波。由于 α - β 滤波和 α - β - γ 滤波是两种较简单且易于工程实现的常增益滤波方法,所以已被广泛应用于对数据处理精度要求不高或者数据处理量较大的跟踪滤波器的设计过程中。

本章小结

本章讨论对随机过程的估计,即波形估计。线性估计所遵循的最佳准则是最小均方误差准则。

首先讨论了非递归线性滤波器实现对平稳随机过程的最佳线性估计,即维纳滤波,其信号模型是从信号和噪声的相关函数得到的。维纳滤波的基本问题是如何对输入的现刻值和过去值加权,以便得到所关心的变量在某时刻的最佳估计。在各种具体条件下求解维纳滤波器的加权函数的重要工具是维纳-霍夫方程。它常用频域及传递函数的方法来求解最佳滤波问题。

接着讨论了采用递推估计的算法解决包括非平稳随机过程在内的波形的最佳线性估计,即卡尔曼滤波,它是从状态方程和测量方程着手建立其信号模型的。卡尔曼滤波采用状态法来阐述最小均方估计,其基本特点是:一是采用了随机过程的矢量模型;二是采用递归算法。卡尔曼滤波具有适应性强,应用范围广,外推和平滑数据的精度高等优点。

综上所述,卡尔曼滤波与维纳滤波中解决最佳滤波的方法不相同点为:维纳滤波是用频域及传递函数的方法,而卡尔曼滤波是用时域及状态变量的办法,它在理论上是维纳滤波的推广和发展,特别在处理多变量系统、时变线性系统及非线性系统的最佳滤波等领域,为我们提供了一种比较有效的方法,克服了基于频域处理所遇到的困难。这些困难包括:维纳滤波要求平稳,而卡尔曼滤波则不要求;它允许初始时间不是负无穷大,这在很多情况下是有实际意义的;卡尔曼滤波的另一个不同点是把状态或信号过程的产生看成是白噪声激励有限维数系统的输出;此外,维纳滤波要求过程的自相关函数和互相关函数的简单知识,而卡尔曼滤波则要求时域中状态变量及信号产生过程的详细知识。

最后,将 α - β 滤波及 α - β - γ 滤波作为卡尔曼滤波的特例,做了扼要介绍。

表 9.3 列出了用 Singer 模型和五种滤波方法的跟踪精度和计算时间。表中结果是在某典型的应用处理机上计算得到的。

表 9.3 五种滤波方法计算结果比较表

序号	滤波方式	跟踪精度		每次循环所需时间(μs)
		方位($^{\circ}$)	距离(m)	
1	两点外推	1.90	490	50
2	维纳滤波	1.25	350	150
3	α - β 滤波	1.40	380	325
4	简化卡尔曼滤波	1.70	350	600
5	卡尔曼滤波	1.10	320	740

从表 9.3 可得到如下结论:从跟踪精度来看,以卡尔曼滤波为最好,两点外推滤波为最差,从计算时间来看,以卡尔曼滤波为最长,两点外推滤波为最短。对一个具体的跟踪问题来说,选择何种滤波方法,需视跟踪精度和计算要求折中考虑。

一般来说,随着现代微处理机技术的发展,计算要求已不再成为应用卡尔曼滤波的障碍。并且,对线性系统而言,直到现在为止,卡尔曼滤波仍然是各种统计滤波中精度最高,计算较为简便的一种方法。

本章仅对线性最佳滤波理论做了概括性介绍,以便读者阅读专著和文献打下基础。

习 题 九

- 9.1 设 $s(t)$ 是均值为零的平稳随机过程,请用 $s(t)$ 及其导数 $\dot{s}(t)$ 对 $s(t+\alpha)$, $\alpha>0$ 进行预测。
- 9.2 考虑平滑问题,已知观测波形在两个端点的数据 $s(0)$ 和 $s(T)$,估计 $(0, T)$ 区间内任意时刻 t 的信号 $s(t)$ 。
- 9.3 考虑维纳滤波预测与平滑问题。设输入信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 都是均值为零的平稳随机过程,两者互不相关,自相关函数分别为

$$R_s(\tau) = \frac{7}{12} e^{-|\tau|/2}, \quad R_n(\tau) = \frac{5}{6} e^{-|\tau|}$$

- 9.4 设维纳滤波器的输入序列为

$$x(n) = \begin{cases} 1/2 & n=0 \\ -1/2 & n=1 \end{cases}$$

希望滤波器的输出为

$$s(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n=1, 2, \dots \end{cases}$$

求维纳滤波器的脉冲响应

$$h(n) = \begin{cases} a, & n=0 \\ b, & n=1 \end{cases}$$

试求估计 $\hat{s}(t+\alpha)$ 及估计的均方误差及相应的输出 $\hat{s}(n)$ 和均方误差 $E\{[s(n) - \hat{s}(n)]^2\}$ 。

- 9.5 设已知 $x(n) = s(n) + v(n)$, 以及

$$\Phi_s(z) = \frac{0.38}{(1 - 0.6z^{-1})(1 - 0.6z)}$$

$$\Phi_{vv}(z) = 1, (\text{白噪声})$$

$$\Phi_{sv}(z) = 0, (s(n) \text{ 与 } v(n) \text{ 不相关})$$

其中 $s(n)$ 为希望得到的信号, $v(n)$ 为加性白噪声, 试求物理可实现与物理不可实现的两种情况时的 $H_{\text{opt}}(z)$ 与相应的 $E[e^2(n)]_{\min}$ 。

9.6 设 x_k 与 v_k 为实离散时间随机过程, 具有功率谱密度

$$\Phi_{xx}(z) = \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}$$

$$\Phi_{vv}(z) = 1, \Phi_{vx}(z) = 0$$

并已知 $\hat{x}_{-1} = 0, P_0 = \text{Var}[x_0] = 1$, 在 $k=0$ 时开始观测信号 $y_k (y_k = x_k + v_k)$, 试用卡尔曼滤波公式求 \hat{x}_k 。

9.7 设有一维离散动态系统, 其动态过程描述为

$$s_k = \alpha s_{k-1} + w_{k-1}$$

其中, α 是未知的非随机参量; $w_{k-1} (k \geq 1)$ 和 $n_k (k \geq 1)$ 是互不相关的, 且与系统初始状态 s_0 也不相关的零均值白噪声随机序列, 其方差分别为 $\sigma_{w_{k-1}}^2$ 和 $\sigma_{n_k}^2$ 。试通过观测量 x_k , 在进行 s_k 滤波的同时, 估计参量 α 。

9.8 设目标以匀加速度 a 从原点开始作直线运动, 加速度 a 受到时变扰动; 现以等时间间隔 T 对目标的距离 r 进行直接测量。试建立该运动目标的离散状态方程和观测方程。

9.9 若飞机相对于雷达作径向匀加速直线运动, 现通过对飞机的距离的测量来估计飞机的距离、速度和加速度。如果

(1) 从 $t=2s$ 开始测量, 测量时间间隔为 $2s$;

(2) 设飞机到雷达的距离为 $r(t)$, 径向速度为 $v(t) (l = \dot{r}(t))$, 径向加速度为 $a(t) (l = \ddot{r}(t))$ 。现已知

$$E(r_0) = 0, \quad \text{Var}(r_0) = \sigma_{r_0}^2 = 8(\text{km}^2)$$

$$E(\dot{r}_0) = E(v_0) = 0, \quad \text{Var}(\dot{r}_0) = \sigma_{v_0}^2 = 10(\text{km/s})^2$$

$$E(\ddot{r}_0) = E(a_0) = 0.2(\text{km/s}^2), \quad \text{Var}(\ddot{r}_0) = \sigma_{a_0}^2 = 5(\text{km/s}^2)^2$$

(3) 忽略扰动噪声 w_{k-1} 对飞机的扰动;

(4) 观测噪声 n_k 是零均值的白噪声随机序列, 已知

$$\text{Cov}(n_i, n_k) = R_{n, n_k} = \sigma_n^2 \delta_{jk} = 0.15 \delta_k (\text{km}^2), j = k$$

(5) 观测噪声 n_k 与 r_0, v_0, a_0 均互不相关。

在获得距离观测值 $x_k (\text{km}) (k=1, 2, \dots, 10)$ 为 $0.36, 1.56, 3.64, 6.44, 10.5, 14.8, 20.0, 25.2, 32.2, 40.4$ 的情况下, 求 r_k, v_k 和 a_k 的估计值及其均方误差, 并求状态一步预测值。

9.10 设需要递推估计以下动态系统的状态:

$$x(k+1) = \varphi x(h) + gw(h), \quad y(k) = hx(k) = v(k)$$

已知: $\varphi=0.6, g=0.8, h=1$ 。随机变量的统计特性如下:

$$E[w(h)] = 0, E[w^2(k)] = r_1(h) = 5$$

$$E[v(k)] = 0, E[v^2(k)] = r_2(k) = 1$$

$$E[x(0)] = 0, E[x^2(0)] = p(0) = 5$$

试计算 $p(k)$ 和 $k(\beta)$ 的稳定值。

9.11 前面曾经指出, 离散卡尔曼滤波的增益矩值 K_k 有可能离线算出, 并与观测噪声矢量的协方差阵 R_{n_k} 有关系。下面通过本例来说明这些问题。设系统信号模型的状态方程和观测方程分别为

$$x_k = \Phi s_{k-1} + w_{k-1}, \quad y_k = H s_k + n_k$$

式中

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \quad 0]$$

$\{w_{k-1}\}$ 和 $\{n_k\}$ 都是均值为零的白噪声随机序列, 与系统的初始状态 s_0 无关, 且有

$$\text{Var}(w_k) = R_{w_{k-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k=1, 2, \dots$$

$$\text{Var}(n_k) = R_{n_k} = 2 + (-1)^k, \quad k=1, 2, \dots$$

而系统初始时刻 ($k=0$) 的状态矢量 s_0 的协方差矩阵为

$$\text{Var}\{x\} = R_{s_0} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

求状态滤波的增益矩阵 \mathbf{K}_k 。

9.12 现考虑边扫描边跟踪的雷达系统跟踪运动目标的问题。

由于雷达系统通过接收到的目标回波信号相对于发射探测脉冲信号的时间延时值来确定目标的径向距离,并根据雷达天线波束指向中心来确定目标的方位,这是二维雷达的情况。在边扫描边跟踪一个运动目标的状态下,无论雷达系统的天线波束是机械扫描还是电扫描,我们都可以认为,在被跟踪目标的天线波束指向方向,雷达周期地发射一串 N 个探测脉冲信号,重复周期为 T_i (毫秒量级),系统处于跟踪状态,信号处理机输出运动目标的点迹,提供给跟踪计算机。这些点迹数据实际上就是进行离散状态滤波的观测数据。然后,天线波束转向其他方向,雷达系统处于搜索状态。设时间间隔 T 后,雷达系统又回到跟踪该运动目标的状态,以次循环工作。我们称时间间隔 T 为扫描周期,一般为秒量级。这样,每隔时间间隔 T ,便获得一次被跟踪运动目标的观测数据。如果被跟踪运动目标的速度不是很高扫描周期 T 也不是较长的条件下,取一阶近似,可以认为在一个扫描周期内,被跟踪的运动目标在径向上和方位上均作匀速直线运动,但要考虑径向上和方位上的随机加速度影响。请在建立被跟踪运动目标信号模型的基础上,研究其径向距离跟踪偏差、径向速度、方位跟踪偏差和方位速度的递推估计问题。

附录 A 弗雷德霍姆积分方程的解

检测理论中经常遇到积分方程。第 2 章 2.3 节中,使信噪比达到最广大的广义匹配滤波器,其中冲击响应 $h(t)$ 由积分方程式(2-122)决定,即

$$\int_0^T h(\tau) R_n(t-\tau) d\tau = s(T-\tau) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (\text{A-1})$$

在第 3 章 3.1 节讨论高斯色噪声下信号检测问题时,遇到两个积分方程,分别是式(3-7)和式(3-58),重写如下

$$\int_0^T R_n(t-\tau) f_j(\tau) d\tau = \lambda_j f_j(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (\text{A-2})$$

式中,本征函数 $f_j(t)$ 和本征值 λ_j 是待定的。

$$\int_0^T R_n(t-\tau) q(\tau) d\tau = s(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (\text{A-3})$$

式中, $q(\tau)$ 是待定的。

在第 9 章 9.2 节讨论维纳滤波器时,非平稳问题的最佳加权函数 $g(\tau)$ 应满足式(9-26),重写如下

$$\int_0^T q(u) R_x(\tau-u) du = R_{xs}(\alpha+\tau) \quad (0 \leq \tau \leq T) \quad (\text{A-4})$$

这些方程具有类似的形式,由于仅仅定义在时间区间 $(0 \leq t \leq T)$ 上,所以不是简单的卷积运算。上述方程中均已假定是平稳过程,故核的宗量写成 $(t-\tau)$ 的形式。若是非平稳过程则不能如此。当自相关函数对应于白噪声过程和色噪声过程两部分之和时,即若

$$R_n(t-\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(t-\tau) + R_c(t-\tau)$$

把它代入式(A-3)得到积分方程

$$\int_0^T R_c(t-\tau) q(\tau) d\tau = -\frac{N_0}{2} q(t) + s(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (\text{A-5})$$

式(A-2)的自由项为零,称为齐次积分方程。式(A-1)、式(A-3)和式(A-4)的待求函数代在各积分号内,称为第一类弗雷德霍姆(Fredholm)积分方程。式(A-5)为更一般的形式,称为第二类弗雷德霍姆积分方程,这两类都是非齐次积分方程,式(A-2)则属于齐次积分方程。第一类弗雷德霍姆积分方程式(A-3),对于连续的 $s(t)$,一般不存在连续 $q(t)$ 的解。然而,某种形式的核(有理核),可以得到闭合解,但它包含着 δ 函数及其导数。第二类弗雷德霍姆积分方程通常有解。这些积分方程的求解十分繁琐,下面简要地加以讨论。

A.1 第一类弗雷德霍姆积分方程的形式解

第一类弗雷德霍姆积分方程式(A-3)为典型形式,其形式解可以用具有相同核的齐次积分方程的本征值和本征函数来表示,称为形式解。假定核是正定的,因而本征函数 $\{f_k(t)\}$ 构成一个完备正交集。如果 $q(t)$ 是平方可积的,则存在 K-L 展开式:

$$q(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} q_k f_k(t) \quad (\text{A-6})$$

它是均方收敛的,展开系数为

$$q_k = \int_0^T q(t) f_k^*(t) dt \quad (\text{A-7})$$

对于确知信号 $s(t)$,也可用同样的本征函数作展开,即

$$s(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} s_k f_k(t) \quad (\text{A-8})$$

式中

$$s_k = \int_0^T s(t) f_k^*(t) dt \quad (\text{A-9})$$

将式(A-6)和式(A-8)代入式(A-3),得

$$\sum_{k=1}^{+\infty} s_k f_k(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} q_k \int_0^T R_n(t-\tau) f_k(\tau) d\tau$$

上式右边积分部分等于 $\lambda_k f_k(t)$, 故

$$\sum_{k=1}^{+\infty} s_k f_k(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k q_k f_k(t)$$

将该式各系数一一对应,求得

$$q_k = \frac{s_k}{\lambda_k} \quad (\text{A-10})$$

把这些系数用于式(A-6),得到 $q(t)$ 的形式解

$$q(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{s_k}{\lambda_k} f_k(t) \quad (\text{A-11})$$

所以,如果已知本征值 $\{\lambda_k\}$ 与本征函数 $\{f_k(t)\}$, 并求得了系数 s_k , 就可以从形式上确定未知函数 $q(t)$ 。上

述 K-L 展开式存在的条件为 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{s_k}{\lambda_k} < \infty$ 。

A.2 有理核的第一类弗雷德霍姆的积分方程的解

如果白噪声加到线性时不变系统上,则其输出端的功率谱密度便是有理功率谱密度,即为含 ω^2 的多项式之比。这种情况下第一类弗雷德霍姆积分方程可以直接求解。图 A.1 所示白噪声加到低通滤波器便是一例,此时输出功率谱密度为

$$S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2(RC)^2} \frac{N_0}{2}$$

输出自相关函数为

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega\tau}}{1 + \omega^2(RC)^2} d\omega = \frac{N_0}{4RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$$

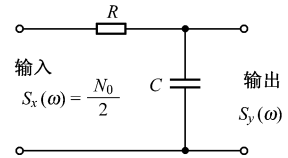


图 A.1 低通滤波器

可见,对于有理谱,自相关函数可以表示为指数形式。此时积分方程的核是有理核,在这种情况下,数学推导表明:可以把积分方程等价于微分方程,并且等价的微分方程将是常数系数线性方程,从而易于求解。

在一般情况下,随机过程的有理功率谱可表示为

$$S_n(\omega) = \frac{N(\omega^2)}{D(\omega^2)} \quad (\text{A-12})$$

式中, $N(\omega^2)$ 是 ω^2 的 n 次(阶)多项式, $D(\omega^2)$ 是 ω^2 的 d 次(阶)多项式,且有 $d \geq n$ 。

考虑 δ 函数的积分表示,即

$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega$$

对上式两边对 t 求二阶导数,得

$$-\frac{d^2}{dt^2} \delta(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 e^{j\omega(t-\tau)} d\omega$$

推广到一般情况有

$$N\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right) \delta(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N(\omega^2) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \quad (\text{A-13})$$

式中, $N\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)$ 是将 $N(\omega^2)$ 中的 ω^2 用 $-\frac{d^2}{dt^2}$ 代替而得。另一方面,色噪声自相关函数(积分方程的核)等于

$$R_n(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega$$

两边按 $D\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)$ 求导, 可得

$$D\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)R_n(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D(\omega^2) S_n(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \quad (\text{A-14})$$

比较式(A-13)和式(A-14)并利用式(A-12), 显然有

$$N\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)\delta(t-\tau) = D\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)R_n(t-\tau) \quad (\text{A-15})$$

现对积分方程式(A-3)两边按 $D\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)$ 求导, 再利用式(A-15), 最后得

$$D\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)s(t) = N\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)q(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (\text{A-16})$$

可见, 当随机过程具有有理功率谱时, 第一类弗雷德霍姆积分方程式(A-3)的解 $q(t)$ 应该满足微分方程式(A-16)。上式的解包括三个部分: 齐次方程的通解、特解及 δ 函数。齐次方程通解可由解下式得到

$$N\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)q(t) = 0 \quad (\text{A-17})$$

这个解由 $N(\omega^2)$ 的 $2n$ 个根决定, 并由指数项构成, 即 $q_c(t) = \sum_{i=1}^{2n} [a_i e^{-k_i t} + b_i e^{k_i t}]$ 。

特解可以不管边界 $(0, T)$ 的限制, 而直接解式(A-16)得到。例如, 不考虑式(A-3)中的积分界限, 而对其做傅氏变换, 可得

$$Q(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{S_n(\omega)}$$

式中, $Q(j\omega)$ 和 $S(j\omega)$ 分别是 $q(t)$ 和 $s(t)$ 的傅氏变换。因此, 特解是

$$q_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(j\omega)}{S_n(\omega)} e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (\text{A-18})$$

δ 函数为

$$\sum_{i=1}^{2d-2n-2} a_i \delta^{(i)}(t) + b_i \delta^{(i)}(t-T) \quad (\text{A-19})$$

这里 $\delta^{(i)}(t)$ 是 δ 函数的 i 阶导数, $2n$ 和 $2d$ 分别为 $N(\omega^2)$ 和 $D(\omega^2)$ 的阶数, 系数 a_i 和 b_i 可由方程的解代入积分方程后求得。

下面用一个例子来说明有理核情况下第一类弗雷德霍姆积分方程的具体解法。

【例 A.1】 考虑二元假设检验中色噪声中确知信号的相关接收机, 它所完成的运算是

$$\int_0^T x(t)h(t)dt$$

式中, $x(t)$ 是接收波形, $h(t)$ 是第一类弗雷德霍姆积分方程式(A-3)的解, 给定噪声功率谱密度及相应的自相关函数为

$$S_n(\omega) = \frac{2\alpha\beta}{\omega^2 + \beta^2}, \quad R_n(\tau) = \alpha e^{-\beta|\tau|} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

求函数 $h(t)$ 及相关器输出。

解: 对于这种情况, 有 $N(\omega^2) = 2\alpha\beta$, $D(\omega^2) = \omega^2 + \beta^2$

要解的微分方程式(A-16), 代入以上条件后得

$$2\alpha\beta h(t) = \beta^2 s(t) - \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = \beta^2 s(t) - s''(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

上式中两撇表示二阶导数。通解由 $2\alpha\beta h_c(t) = 0$ 确定, 结果为零。

特解可以直接看出, 是

$$h_p(t) = \frac{1}{2\alpha\beta} [\beta^2 s(t) - s''(t)]$$

因为 $2d-2n-2=0$, 所以方程的解含有 $t=0$ 和 $t=T$ 处的 δ 函数, 而不含 δ 函数的导数, 故解的完整形式为

$$h(t) = \frac{1}{2\alpha\beta} [\beta^2 s(t) - s''(t)] + a\delta(t) + b\delta(t-T) \quad (\text{A-20})$$

要确定系数 a 与 b , 必须把这个解代入积分方程式(A-3), 于是有

$$s(t) = \int_0^T d\tau \alpha e^{-\beta|t-\tau|} \left\{ \frac{1}{2\alpha\beta} [\beta^2 s(\tau) - s''(\tau)] + a\delta(\tau) + b\delta(\tau-T) \right\}$$

被积函数中的 δ 函数应包含在积分限内, 即各分限实际是 0_- 和 T_{+0} 去掉指数上的绝对值符号, 可改写为

$$s(t) = \int_0^t d\tau \alpha e^{-\beta(t-\tau)} \left\{ \frac{1}{2\alpha\beta} [\beta^2 s(\tau) - s''(\tau)] + a\delta(\tau) \right\} \\ + \int_t^T d\tau \alpha e^{-\beta(t-\tau)} \left\{ \frac{1}{2\alpha\beta} [\beta^2 s(\tau) - s''(\tau)] + b\delta(\tau-T) \right\}$$

对包含有 δ 函数的各项积分得

$$s(t) = a\alpha e^{-\beta t} + b\alpha e^{-\beta(t-T)} + \int_0^t d\tau \alpha e^{-\beta(t-\tau)} \frac{1}{2\alpha\beta} [\beta^2 s(\tau) - s''(\tau)] + \\ \int_t^T d\tau \alpha e^{-\beta(t-\tau)} \frac{1}{2\alpha\beta} [\beta^2 s(\tau) - s''(\tau)] \quad (\text{A-21})$$

考虑积分

$$\int_0^t e^{\beta\tau} s''(\tau) d\tau$$

用分部积分可证明它等于

$$e^{\beta t} s'(t) - s'(0) - \beta e^{\beta t} s(t) + \beta s(0) + \int_0^t \beta^2 e^{\beta\tau} s(\tau) d\tau$$

同样做法, 求得积分

$$\int_t^T e^{-\beta\tau} s''(\tau) d\tau$$

等于

$$e^{-\beta T} s'(T) - e^{-\beta t} s'(t) + \beta e^{-\beta T} s(T) - \beta e^{-\beta t} s(t) + \int_0^T \beta^2 e^{-\beta\tau} s(\tau) d\tau \quad (\text{A-22})$$

将它们代入式(A-21), 得

$$s(t) = s(t) + e^{-\beta t} \left[a\alpha + \frac{s'(0)}{2\beta} - \frac{s(0)}{2} \right] + e^{\beta t} e^{-\beta T} \left[\alpha b - \frac{s'(T)}{2\beta} - \frac{s(T)}{2} \right] \quad (\text{A-23})$$

由于上式必须对区间 $(0, T)$ 内的所有 t 都满足, 故 $e^{-\beta t}$ 和 $e^{\beta t}$ 的系数必须恒等于零, 因而 a 和 b 的值为

$$a = \frac{1}{2\alpha\beta} [\beta s(0) - s'(0)], \quad b = \frac{1}{2\alpha\beta} [\beta s(T) + s'(T)]$$

所以 $h(t)$ 的解是

$$h(t) = \frac{1}{2\alpha\beta} \{ [\beta s(0) - s'(0)] \delta(t) + [\beta s(T) + s'(T)] \delta(t-T) + \beta^2 s(t) - s''(t) \} \\ 0 \leq t \leq T \quad (\text{A-24})$$

令上式是 $s(t)=0$, 则可得到齐次积分方程式(A-2), 在有理谱时的解满足如下齐次微分方程

$$\left[N \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) - \lambda_j D \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) \right] f_j(t) = 0 \quad (\text{A-25})$$

A.3 有理核的第二类弗雷德霍姆积分方程的解

现在考虑积分方程式(A-5)的解。假定噪声的功率谱密度为

$$S_n(\omega) = \frac{N_0}{2} + S_c(\omega) = \frac{N(\omega^2)}{D(\omega^2)} \quad (\text{A-26})$$

现在的情形, $S_n(\omega)$ 中包含 $N_0/2$, 所以 $N(\omega^2)$ 和 $D(\omega^2)$ 是 ω^2 的同阶多项式, 设 ω^2 的最高阶数为 n 。仿照对第

一类弗雷德霍姆积分方程的解法,微分方程的完整解由特解 $h_p(t)$ 和齐次方程通解 $h_c(t)$ 两部分组成,即

$$h(t) = h_p(t) + \sum_{i=1} [a_i e^{-k_i t} + b_i e^{k_i t}] \quad (\text{A-27})$$

代回积分方程式(A-5),我们发现,适当选择权系数 a_i 和 b_i ,总能满足积分方程,而不必添加奇异函数的一项。现举一个简单例子加以说明。

【例 A.2】 假定

$$R_c(\tau) = \sigma^2 e^{-k|\tau|} \quad -\infty < \tau < \infty \quad (\text{A-28})$$

对应的谱密度为

$$S_c(\omega) = \frac{2k\sigma^2}{\omega^2 + k^2} \quad (\text{A-29})$$

于是噪声总的谱密度为

$$\begin{aligned} S_n(\omega) &= \frac{N_0}{2} + S_c(\omega) = \frac{N_0}{2} \frac{\left[\omega^2 + k^2 \left(1 + \frac{4\sigma^2}{kN_0} \right) \right]}{\omega^2 + k^2} \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{\omega^2 + \gamma^2}{\omega^2 + k^2} = \frac{N'(\omega^2)}{D'(\omega^2)} \end{aligned} \quad (\text{A-30})$$

式中

$$\gamma^2 = k^2 \left(1 + \frac{4\sigma^2}{kN_0} \right) \quad (\text{A-31})$$

积分方程式(A-5)成为

$$s(t) = \frac{N_0}{2} q(t) + \int_0^t \sigma^2 e^{-k|t-\tau|} q(\tau) d\tau \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{A-32})$$

相应的微分方程是

$$-s''(t) + k^2 s(t) = \frac{N_0}{2} [-q''(t) + \gamma^2 q(t)] \quad (\text{A-33})$$

特解由积分区间无限的积分方程求出:

$$H_p(\omega) = \frac{S(\omega)}{S_n(\omega)} = \frac{2}{N_0} \cdot \frac{\omega^2 + k^2}{\omega^2 + \gamma^2} S(\omega)$$

故

$$\begin{aligned} h_p(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 + k^2}{\omega^2 + \gamma^2} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad -\infty \leq t \leq +\infty \end{aligned} \quad (\text{A-34})$$

齐次方程的通解为

$$h_c(t) = a_1 e^{-\gamma t} + b_1 e^{\gamma t} \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{A-35})$$

于是,完整解为

$$h(t) = h_p(t) + h_c(t) \quad (\text{A-36})$$

将 $h(t)$ 代回积分方程式(A-32),将得到 a_1 和 b_1 必须满足的两个联立方程,求解 a_1 和 b_1 后即可得到完整解。

A.4 有理核的弗雷德霍姆齐次积分方程的解

上面讲到,非齐次积分方程的形式解可以写成用齐次积分方程的本征函数和本征值展开的形式。因此,研究有理核齐次积分方程的求解,也有助于上述两类有理核非齐次积分方程的求解。

求解有理核的齐次积分方程式(A-2)的方法,类似于求解有理核非齐次积分方程的方法。显然,齐次积分方程可化为下述微分方程

$$N \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) f_i(t) = \lambda_i D \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) f_i(t) \quad (\text{A-37})$$

或

$$\left[N \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) - \lambda_i D \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) \right] f_i(t) = 0 \quad (\text{A-38})$$

这是一个齐次微分方程,可以直接求解。

附件 B 习题解答^{[9],[10],[11],[17],[18],[20]}

习 题 一

1.1 在二元数字通信系统中,假设 H_1 时,信源输出为常值电压 A ,假设 H_0 时,信源输出为零;信号在通信信道传输过程中叠加了高斯噪声 $n(t)$;在接收端对接收信号 $x(t)$ 进行了 n 次独立采样,样本为 $x_k (k=1,2,\dots,n)$;如果噪声样本 $n(t)$ 是均值为零、方差为 σ_n^2 的高斯噪声,如图 1.19 所示。试建立信号检测系统的模型;确定似然比检验的判决规则。

解:依题意,可有两种假设

$$H_1: \mathbf{x}_k = A + n_k, \quad H_0: \mathbf{x}_k = n_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

因为噪声样本 $n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 所以其概率密度函数为

$$p(n_k) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{n_k^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

这样,在两个假设下,观测样本的概率密度函数,即似然函数分别为

$$p(\mathbf{x}_k | H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(\mathbf{x}_k - A)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

$$p(\mathbf{x}_k | H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{\mathbf{x}_k^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

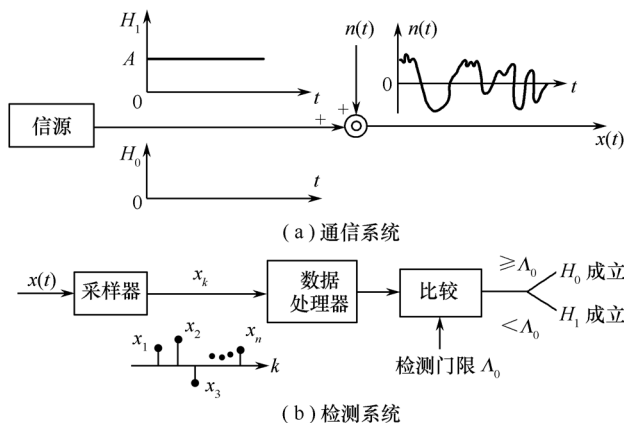


图 1.19 信号检测系统模型

考虑到 n 次采样是统计独立的,可得在两假设下观测矢量 \mathbf{x} 的概率密度函数分别为

$$p(\mathbf{x} | H_1) = \prod_{k=1}^n P(x_k | H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - A)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

$$p(\mathbf{x} | H_0) = \prod_{k=1}^n p(x_k | H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

这样,似然比 $\Lambda(\mathbf{x})$ 为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | H_1)}{p(\mathbf{x} | H_0)} = \exp \left[\frac{A}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k - \frac{nA^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

于是似然比检验为

$$\exp \left[\frac{A}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k - \frac{nA^2}{2\sigma_n^2} \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0$$

两边取自然对数得

$$\frac{A}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k - \frac{nA^2}{2\sigma_n^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \Lambda_0$$

为进一步简化,将不等式左边的常数项 $nA/2\sigma_n^2$ 移到不等式的右边,并整理如下的判决规则

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2}{nA} \ln \Lambda_0 + \frac{A}{2} \triangleq \gamma$$

经过上述简化后,数据处理器对 \mathbf{x} 的处理从计算似然比化简为对观测数据求和取平均。如果 $l(\mathbf{x})$ 表示这种计算,则

$$l(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

$l(\mathbf{x})$ 是检验统计量,它是观测量 \mathbf{x} 的函数。在进行判决时,由 n 维矢量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 和由 $l(\mathbf{x})$ 提供的关于假设 H_1 或假设 H_0 的信息是一样的,但 \mathbf{x} 是 n 维的,而 $l(\mathbf{x})$ 是一维的,因而压缩了观测空间的维数,为处理带来了方便。

1.2 设二元假设检验的观测信号模型为

$$H_0: x = -1 + n_x, \quad H_1: x = 1 + n_x$$

式中, n_x 是均值为零、方差为 $\sigma_n^2 = 1/2$ 的高斯观测噪声。若两种假设是等先验概率的,则代价因子为试求最佳(贝叶斯)判决表示式和平均代价 \bar{C}_0 。

解: 因为两种假设是等先验概率的,所以 $P(H_0) = P(H_1) = 1/2$ 。这样,贝叶斯准则的似然比函数 $\Lambda(x)$ 为

$$\Lambda(x) = \frac{p(x | H_1)}{p(x | H_0)} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi \times (1/2)}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{2 \times (1/2)}\right]}{\left(\frac{1}{2\pi \times (1/2)}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x+1)^2}{2 \times (1/2)}\right]} = \exp(4x)$$

而似然比检测门限 Λ_0 为

$$\Lambda_0 = \frac{P(H_0)(c_{10} - c_{00})}{P(H_1)(c_{01} - c_{11})} = \frac{(4-1)/2}{(8-2)/2} = \frac{1}{2}$$

于是,贝叶斯判决表示式为

$$\exp(4x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{1}{2}$$

两边取自然对数,并整理后得最简判决表示式为

$$l(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} -0.1733$$

现在计算判决概率 $P(D_0 | H_1)$ 和 $P(D_0 | H_0)$ 。

由于本例中检验统计量 $l(x) = x$,所以在两个假设下检验统计量的概率密度函数分别为

$$p(l | H_0) = \left(\frac{1}{2\pi \times (1/2)}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(l+1)^2}{2 \times (1/2)}\right]$$

$$p(l | H_1) = \left(\frac{1}{2\pi \times (1/2)}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(l-1)^2}{2 \times (1/2)}\right]$$

这样,

$$P(D_0 | H_1) = \int_{-\infty}^{-0.1733} p(l | H_1) dl$$

$$= \int_{-\infty}^{-0.1733} \left(\frac{1}{2\pi \times (1/2)}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(l-1)^2}{2 \times (1/2)}\right] dl$$

$$= \int_{-\infty}^{-1.6593} (1/2\pi)^{1/2} \exp(-u^2/2) du = 0.04846$$

$$P(D_0 | H_0) = \int_{-\infty}^{-0.1733} p(l | H_0) dl$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{-0.1733} \left(\frac{1}{2\pi \times (1/2)} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(l-1)^2}{2 \times (1/2)} \right] dl \\
&= \int_{-\infty}^{-1.6591} (1/2\pi)^{1/2} \exp(-u^2/2) du = 0.8790
\end{aligned}$$

利用贝叶斯平均代价表示式

$$\bar{C}_0 = P(H_0)c_{10} + P(H_1)c_{11} + P(H_1)(c_{01} - c_{11})P(D_0 | H_1) - P(H_0)(c_{10} - c_{00})P(D_0 | H_0)$$

代入 $P(H_j)$, c_{ij} 和 $P(D_i | H_j)$ 各数据, 计算得

$$\bar{C}_0 = 1.8269$$

1.3 在习题 1.2 中, 判决表示式为

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} -0.1733$$

已计算出的平均代价 $\bar{C} = 1.8269$ 。试将检测门限 $\Lambda_0 = -0.1733$ 稍作调整, 例如调整为 $\Lambda_1 = -0.17$, $\Lambda_2 = -0.18$, 然后分别计算相应的平均代价 \bar{C}_1 和 \bar{C}_2 , 并与原检测门限 $\Lambda_0 = -0.1733$ 所对应的平均代价 $\bar{C} = 1.8269$ 进行比较。请对比较结果做出解释。

解: 在上题 1.2 中, 两个假设下的观测信号模型为

$$H_0: x = -1 + n_x, \quad H_1: x = 1 + n_x$$

其中, 噪声 $n_x \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$; $P(H_0) = P(H_1) = 1/2$;

$$c_{00} = 1, c_{10} = 4, c_{11} = 2, c_{01} = 8$$

在习题 1.2 中已导出: 判决表示式为

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} -0.1733$$

平均代价为

$$\begin{aligned}
\bar{C} &= c_{10}P(H_0) + c_{11}P(H_1) + P(H_1)(c_{01} - c_{11})P(D_0 | H_1) - P(H_0)(c_{10} - c_{00})P(D_0 | H_0) \\
&= 1.8269
\end{aligned}$$

判决概率 $P(D_0 | H_1) = 0.04846$, 判决概率 $P(D_0 | H_0) = 0.8790$ 。

(1) 当 $\Lambda_1 = -0.17$ 时, 判决概率 $P(D_0 | H_1)$ 为

$$\begin{aligned}
P(D_0 | H_1) &= \int_{-\infty}^{-0.17} \left(\frac{1}{2\pi \times (1/2)} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(l-1)^2}{2 \times (1/2)} \right] dl \\
&= \int_{-\infty}^{-1.6546} (1/2\pi)^{1/2} \exp(-u^2/2) du = 0.04896
\end{aligned}$$

判决概率 $P(D_0 | H_0)$ 为

$$\begin{aligned}
P(D_0 | H_0) &= \int_{-\infty}^{-0.17} \left(\frac{1}{2\pi \times (1/2)} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(l+1)^2}{2 \times (1/2)} \right] dl \\
&= \int_{-\infty}^{1.1738} (1/2\pi)^{1/2} \exp(-u^2/2) du = 0.8798
\end{aligned}$$

将 $P(H_j)$, c_{ij} 和 $P(D_0 | H_1)$, $P(D_0 | H_0)$ 代入平均代价 \bar{C} 式, 计算得 $\bar{C} = 1.8272$ 。

(2) 当 $\Lambda_2 = -0.18$ 时, 判决概率 $P(D_0 | H_1)$ 为

$$\begin{aligned}
P(D_0 | H_1) &= \int_{-\infty}^{-0.18} \left(\frac{1}{2\pi \times (1/2)} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(l-1)^2}{2 \times (1/2)} \right] dl \\
&= \int_{-\infty}^{-1.6688} (1/2\pi)^{1/2} \exp(-u^2/2) du = 0.04758
\end{aligned}$$

判决概率 $P(D_0 | H_0)$ 为

$$\begin{aligned}
P(D_0 | H_0) &= \int_{-\infty}^{-0.18} \left(\frac{1}{2\pi \times (1/2)} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(l+1)^2}{2 \times (1/2)} \right] dl \\
&= \int_{-\infty}^{1.1597} (1/2\pi)^{1/2} \exp(-u^2/2) du = 0.8769
\end{aligned}$$

将 $P(H_j)$, c_{ij} 和 $P(D_0 | H_1)$, $P(D_0 | H_0)$ 代入平均代价 \bar{C} 式, 计算得 $\bar{C} = 1.8274$ 。

现将结果进行比较,得:

$$\Lambda_0 = -0.1733 \text{ 时}, \bar{C} = 1.8269$$

$$\Lambda_1 = -0.17 \text{ 时}, \bar{C}_1 = 1.8272$$

$$\Lambda_2 = -0.18 \text{ 时}, \bar{C}_2 = 1.8274$$

可见,按贝叶斯准则确定的检测门限是最佳的,它能使平均代价 \bar{C} 最小。

1.4 假定在两种假设下,源输出是零均值高斯信号。在假设 H_1 下,信号的方差是 σ_1^2 ;在假设 H_0 下,信号的方差是 σ_0^2 。求错误判断的平均概率和平均风险 \bar{R} 的表示式。

解:已知观测矢量 \mathbf{x} 的概率密度函数

$$p(\mathbf{x} | H_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma_i^2}\right), i = 0, 1$$

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \exp\left[\frac{\mathbf{x}^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\right]$$

因此,判决公式是

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \exp\left[\frac{\mathbf{x}^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \Lambda_0$$

利用对数似然比可写为

$$\frac{\mathbf{x}^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) + \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \Lambda_0$$

令 $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$, 可利用 $l(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$ 作为检验统计量,以 $l(\mathbf{x})$ 表示的检验为

$$l(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{2\sigma_0^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \ln \frac{\Lambda_0\sigma_1}{\sigma_0} \triangleq \gamma$$

计算判决引起的错误可以来确定检测器的性能。两类错误的概率是人们关心的量。第一类错误(虚警)对应于 H_0 为真而判决 H_1 , 有

$$P_I = P_{fa} = \int_{D_1} p(\mathbf{x} | H_0) d\mathbf{x}$$

第二类错误(漏报)对应于 H_1 为真而判决 H_0 , 因此

$$P_{II} = P_m = \int_{D_0} p(\mathbf{x} | H_1) d\mathbf{x}$$

类似地,检测概率 P_d 为

$$P_d = \int_{D_1} p(\mathbf{x} | H_1) d\mathbf{x} = 1 - P_m$$

于是错误判决的平均概率是

$$P_e = P_{fa}P(H_0) + P_mP(H_1)$$

区域 D_0 和 D_1 中分别包括了使似然比 $\Lambda(\mathbf{x})$ 小于、大于门限 Λ_0 的 \mathbf{x} 值。因此可利用 $\Lambda(\mathbf{x})$ 计算各种错误概率。

$$P_{fa} = \int_{\Lambda_0}^{+\infty} p[\Lambda(\mathbf{x}) | H_0] d\Lambda$$

$$P_m = \int_{-\infty}^{\Lambda_0} p[\Lambda(\mathbf{x}) | H_1] d\Lambda$$

$$P_d = \int_{\Lambda_0}^{+\infty} p[\Lambda(\mathbf{x}) | H_1] d\Lambda$$

最后,利用 P_{fa} 和 P_m 可把平均风险 \bar{R} 表示为

$$\bar{R} = c_{00}(1 - P_{fa}) + c_{10}P_{fa} + P(H_1)[(c_{11} - c_{00}) + (c_{01} - c_{11})P_{fa} - (c_{10} - c_{00})P_{fa}]$$

1.5 考虑二元随机参量信号的检测问题。若两个假设下观测信号分别为

$$H_0: x = n_x, \quad H_1: x = s + n_x$$

式中,信号 s 和噪声 n_x 是相互统计独立的随机变量,其概率密度函数分别为:

$$p(s) = \begin{cases} a \exp(-as), & s \geq 0, a > 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$$

和

$$p(n) = \begin{cases} b \exp(-bn), & n \geq 0, b > 0, \text{且 } b > a \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

(1) 证明:信号检测的似然比检验(似然比检测门限为 Λ_0)可简化为

$$\chi_{H_0}^{H_1} \geq \gamma$$

(2) 求贝叶斯准则下检测门限 γ 与先验概率 $P(H_j)$ 和代价因子 c_{ij} 的函数关系。

(3) 如果采用奈曼-皮尔逊准则,求检测门限 γ 与错误判决概率 $P(D_1 | H_0)$ 的函数关系。

证明:(1) 假设 H_0 下,观测信号 x 的概率密度函数为

$$p(x | H_0) = \begin{cases} b \exp(-bx), & x \geq 0, b > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

假设 H_1 下,利用一维雅可比变换,得

$$p(x | s; H_1) = \begin{cases} b \exp[-b(x-s)], & x \geq s, b > 0 \\ 0, & x < s \end{cases}$$

且已知

$$p(s) = \begin{cases} a \exp(-as), & s \geq 0, a > 0, \text{且 } b > 0 \\ 0, & s \leq 0 \end{cases}$$

所以,利用统计平均的方法,得

$$\begin{aligned} p(x | H_1) &= \int_0^x p(x | s; H_1) p(s) ds \\ &= \int_0^x a b \exp(-bx) \exp[-(a-b)s] ds \\ &= a b \exp(-bx) \frac{1}{-(a-b)} \exp[-(a-b)s] \Big|_0^x \\ &= \frac{ab}{a-b} \exp(-bx) \{1 - \exp[-(a-b)x]\}, x \geq s \end{aligned}$$

当 $x < s$ 时, $p(x | H_1) = 0$ 。

这样,似然比函数为

$$\Lambda(x) = \frac{p(x | H_1)}{p(x | H_0)} = \begin{cases} \frac{a}{a-b} \{1 - \exp[-(a-b)x]\}, & x \geq s \\ 0, & x < s \end{cases}$$

设似然比检测门限为 Λ_0 ($\Lambda_0 \geq 0$),则有

当 $x < s$ 时,判决假设 H_0 成立。

当 $s \leq x$ 时,判决式为

$$\frac{a}{a-b} \{1 - \exp[-(a-b)x]\} \geq_{H_0}^{H_1} \Lambda_0$$

考虑到 $b > a$,判决式化简为

$$\frac{a}{a-b} \exp[(b-a)x] \geq_{H_0}^{H_1} \Lambda_0 + \frac{a}{b-a}$$

两边取自然对数,化简整理为

$$l(x) \triangleq x \geq_{H_0}^{H_1} \frac{1}{b-a} \ln \left(\frac{b-a}{a} \Lambda_0 + 1 \right) \triangleq \gamma$$

所以,判决式为

$$x \geq_{H_0}^{H_1} \gamma$$

(2) 如果采用贝叶斯准则,则

$$\Lambda_0 = \frac{P(H_0) (c_{10} - c_{00})}{P(H_1) (c_{01} - c_{11})}$$

这样,检测门限 γ 为

$$\gamma = \frac{1}{b-a} \ln \left[\frac{b-a P(H_0) (c_{10} - c_{00})}{a P(H_1) (c_{01} - c_{11})} + 1 \right]$$

(3) 如果采用奈曼-皮尔逊准则,则判决概率为

$$P(D_1 | H_0) = \int_{\gamma}^{+\infty} p(l | H_0) dl = \int_{\gamma}^{+\infty} b \exp(-bl) dl = \exp(-b\gamma)$$

所以,检测门限

$$\gamma = -\frac{1}{b} \ln P(D_1 | H_0)$$

1.6 已知被估计参量 θ 的后验概率密度函数为

$$p(\theta | x) = (x + \lambda)^2 \theta \exp[-(x + \gamma)\theta], \quad \theta \geq 0$$

(1) 求的最小均方差估计量 $\hat{\theta}_{\text{MSE}}$ 。

(2) 求 θ 的最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 。

解:(1) 参量 θ 的最小均方差估计量 $\hat{\theta}_{\text{MSE}}$ 是 θ 的条件均值,即

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\text{MSE}} &= \int_0^{+\infty} \theta p(\theta | x) d\theta = \int_0^{+\infty} (x + \lambda)^2 \theta^2 \exp[-(x + \lambda)\theta] d\theta \\ &= (x + \lambda)^2 \frac{1}{(x + \lambda)^{2+1}} = \frac{2}{x + \lambda}, \quad x \geq -\lambda \end{aligned}$$

$$\hat{\theta}_{\text{MSE}} = 0, \quad x < -\lambda$$

(2) 由最大后验方程

$$\left. \frac{\partial \ln p(\theta | x)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}_{\text{MAP}}} = 0$$

$$\text{得} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} [\ln(x + \lambda)^2 + \ln \theta - (x + \lambda)\theta] = \frac{1}{\theta} - (x + \lambda) \Big|_{\theta = \hat{\theta}_{\text{MAP}}} = 0$$

$$\text{解得} \quad \begin{cases} \hat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{1}{x + \lambda}, & x \geq -\lambda \\ \hat{\theta}_{\text{MAP}} = 0, & x < -\lambda \end{cases}$$

1.7 如果通过一次观测量 x 来估计信号的随机参量 θ 。已知 $p(x, \theta) = p(x | \theta) p(\theta)$ 中的 $p(x | \theta)$ 和 $p(\theta)$ 分别为

$$p(x | \theta) = \theta \exp(-\theta x), \theta \geq 0, x \geq 0$$

$$p(\theta) = 2 \exp(-2\theta), \theta \geq 0$$

求 θ 的最小均方差估计量 $\hat{\theta}_{\text{MSE}}$ 和最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 。

如果进行了 n 次独立观测。观测量为 $x_k (k = 1, 2, \dots, n)$, 求 θ 的最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$; 研究当 n 足够大,

$\sum_{k=1}^n x_k \gg 2$ 时, $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 的近似估计公式。

解:(1) 由最小均方差估计量的构造公式,得

$$\hat{\theta}_{\text{MSE}} = \frac{\int_0^{+\infty} \theta p(x | \theta) p(\theta) d\theta}{\int_0^{+\infty} p(x | \theta) p(\theta) d\theta} = \frac{\int_0^{+\infty} 2\theta^2 \exp[-(x + 2)\theta] d\theta}{\int_0^{+\infty} 2\theta \exp[-(x + 2)\theta] d\theta} = \frac{\frac{2!}{(x + 2)^{2+1}}}{\frac{1!}{(x + 2)^{1+1}}} = \frac{2}{x + 2}$$

由最大后验估计量的构造公式,得

$$\left. \frac{\partial \ln p(x | \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}_{\text{MAP}}} = \frac{1}{\theta} - (x + 2) \Big|_{\theta = \hat{\theta}_{\text{MAP}}} = 0$$

解得 $\hat{\theta}_{\text{MAP}} = 1/x + 2$

如果进行了 n 次独立观测, 观测量为 $x_k (k=1, 2, \dots, n)$, 则

$$p(x | \theta) = \prod_{k=1}^n p(x_k | \theta) = \theta^n \exp\left(-\sum_{k=1}^n \theta x_k\right), \theta \geq 0, x_k \geq 0$$
$$p(\theta) = 2\exp(-2\theta), \theta \geq 0$$

于是, 由最大后验方程, 得

$$\frac{\partial \ln p(x | \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{k=1}^n x_k - 2 \Big|_{\theta=\hat{\theta}_{\text{MAP}}} = 0$$

解得

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n x_k + 2}$$

(2) 当 n 足够大, 使 $\sum_{k=1}^n x_k \gg 2$ 时, θ 的最大后验估计量近似为

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} \approx 1 / \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)$$

即近似等于观测量的 $x_k (k=1, 2, \dots, n)$ 的平均值的倒数。

1.8 若线性观测方程为

$$x_k = (\theta/2) + n_k, k=1, 2, \dots, n$$

式中, n_k 是方差为 σ_n^2 的零均值高斯白噪声, 且 $E(\theta n_k) = 0$ 。

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_{\text{ML}}$, 考查其主要性质。

(2) 若已知 θ 的先验概率密度函数为

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\theta}{4}\right), & \theta \geq 0 \\ 0, & \theta < 0 \end{cases}$$

求 θ 的最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$, 考查其无偏性, 并求其均方误差。

(3) 画出 $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ 和 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 与观测量的关系曲线, 并加以比较。

解: (1) 因为 $n_k (k=1, 2, \dots, n)$ 是高斯白噪声, 所以 n 次观测是互不相关的, 也是统计独立的。这样 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的概率密度函数为

$$p(x | \theta) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \theta/2)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

由最大似然方程, 得

$$\frac{\partial \ln p(x | \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n \left(x_k - \frac{\theta}{2}\right) \Big|_{\theta=\hat{\theta}_{\text{ML}}} = 0$$

解得

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

下面考查 $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ 的主要性质。因为

$$E(\hat{\theta}_{\text{ML}}) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{\theta}{2} + n_k\right) = \theta$$

所以, $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ 是无偏估计量。

又因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(x | \theta)}{\partial \theta} &= \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n \left(x_k - \frac{\theta}{2}\right) = \left(\theta - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \left(-\frac{n}{4\sigma_n^2}\right) \\ &= (\theta - \hat{\theta}_{\text{ML}})k \end{aligned}$$

所以, $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ 是优效估计量。

这样, $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ 是无偏、有效估计量, 其均方误差取克拉默-拉奥界限, 为

$$E[(\theta - \hat{\theta}_{\text{ML}})^2] = 1 / -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(x|\theta)}{\partial \theta^2}\right] = \frac{4}{n} \sigma_n^2$$

(2) 由最大后验方程, 得

$$\frac{\partial \ln p(x|\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n \left(x_k - \frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k - \frac{n\theta}{4\sigma_n^2} - \frac{1}{4} \bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{\text{MAP}}} = 0$$

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k - \frac{1}{n} \sigma_n^2, \quad \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq \frac{1}{n} \sigma_n^2$$

解得

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = 0, \quad \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k < \frac{1}{n} \sigma_n^2$$

因为

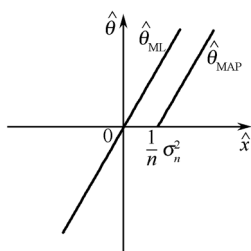
$$E(\hat{\theta}_{\text{MAP}}) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{\theta}{2} + n_k\right) - \frac{1}{n} \sigma_n^2 = E(\theta) - \frac{1}{n} \sigma_n^2$$

所以, $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 是有偏估计量, 但是渐近无偏的。

估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 的均方误差为

$$\begin{aligned} E[(\theta - \hat{\theta}_{\text{MAP}})^2] &= E\left[\left(\theta - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\theta}{2} + n_k\right) + \frac{\sigma_n^2}{n}\right)^2\right] = E\left[\left(-\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n n_k + \frac{\sigma_n^2}{n}\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n n_k\right)^2 - \frac{4\sigma_n^2}{n^2} \sum_{k=1}^n n_k + \frac{\sigma_n^4}{n^2}\right] = \frac{4}{n^2} E\left[\left(\sum_{k=1}^n n_k\right)^2\right] - \frac{4\sigma_n^2}{n^2} \sum_{k=1}^n E(n_k) + \frac{\sigma_n^4}{n^2} \\ &= \frac{4}{n} \sigma_n^2 + \frac{1}{n^2} \sigma_n^4 = \frac{4}{n} \sigma_n^2 \left(1 + \frac{1}{4n} \sigma_n^2\right) \end{aligned}$$

(3) 令



则

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \hat{\theta}_{\text{ML}} = 2\hat{x} \\ \hat{\theta}_{\text{MAP}} &= \begin{cases} 2\hat{x} - \sigma_n^2/n, & 2\hat{x} \geq \sigma_n^2/n \\ 0, & 2\hat{x} < \sigma_n^2/n \end{cases} \end{aligned}$$

它们与观测量 \hat{x} 的关系如题 1.20 图所示。

图 1.20 估计量与观测量关系图

从估计量的均方误差看, 虽然求最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 时, 给出了被估计量 θ 的概率密度函数 $p(\theta)$, 但限定它大于等于零, 所构造的估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 是有偏的。而 $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ 是无偏优效估计量。所以 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 的均方误差大于 $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ 的均方误差。但随着观测次数 n 的增加, 二者的均方误差之差随之减小。

1.9 一观测过程由 $x(b) = A + w(n)$ 定义, 其中 A 是一未知的常量参数, 而 $w(n)$ 是高斯白噪声, 均值为零, 方差为 σ_w^2 。若 \hat{A} 是根据 $x(1), x(2), \dots, x(n)$ 得到的参数估计量。求其估计方差的 Cramer-Rao 下界。

解: 由于 $w(n)$ 为零均值的高斯分布, 而 A 为常数, 所以 $x(n) = A + w(n)$ 也为高斯分布, 其均值为 A 。于是, 高斯随机变量 $x(n)$ 的概率密度分布为

$$\begin{aligned} p(x; A) &= \prod_{n=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \left[-\frac{1}{2\sigma_w^2} (x(n) - A)^2 \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{n=1}^n (x(n) - A)^2 \right] \end{aligned}$$

似然函数 $\ln p(x; A)$ 关于未知参数 A 的一阶导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln p(x; A)}{\partial A} &= \frac{\partial}{\partial A} \left\{ -\ln[(2\pi\sigma_w^2)^{n/2}] - \frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{n=1}^n [x(n) - A]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{n=1}^n [x(n) - A] = \frac{n}{\sigma_w^2} (\bar{x} - A)\end{aligned}$$

式中, \bar{x} 代表 $x(n)$ 的样本平均。上式再对 A 求导数, 得到

$$\frac{\partial^2 \ln p(x; A)}{\partial A^2} = -\frac{n}{\sigma_w^2}$$

由 Cramer-Rao 下界的定义

$$\text{Var}(\hat{A}) \geq \frac{1}{-E\left\{\frac{\partial^2 \ln p(x; A)}{\partial A^2}\right\}}$$

最后得 \hat{A} 的估计方差的 Cramer-Rao 下界为

$$\text{Var}(\hat{A}) \geq n/\sigma_w^2$$

1.10 观测样本由下式给出:

$$x_i = s + w_i, i = 1, 2, \dots, n$$

式中, w_i 是零均值的高斯白噪声, 具有单位方差。已知信号 s 的概率密度函数为

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}$$

求最小均方误差 (MMSE) 估计 \hat{s}_{MMSE} 和最大后验概率估计 \hat{s}_{MAP} 。

解: 由于参数 s 的 MMSE 估计等于已知样本情况下 s 的条件均值, 故有

$$\hat{s}_{\text{MMSE}} = E\{s \mid x_1, \dots, x_n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s p(s \mid x_1, \dots, x_n) ds \quad (1)$$

由于 w_i 服从高斯分布 $\mathcal{N}(0, 1)$, 故 $x_i = s + w_i$ 服从高斯分布 $\mathcal{N}(s, 1)$ 。

由高斯白噪声 w_i 的不相关性和独立性的等价关系知, 观测样本 x_i 相互独立, 故观测样本的条件概率密度为

$$p(x_1, \dots, x_n \mid s) = p(x_1) \cdots p(x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left[-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - s)^2}{2}\right] \quad (2)$$

若令

$$\bar{x} = (x_1 + \cdots + x_n)/n$$

代表 n 个观测数据的样本均值, 则由式(1)可求得参数 s 的条件概率密度为

$$\begin{aligned}p(s \mid x_1, \dots, x_n) &= \frac{p(x_1, \dots, x_n \mid s) p(s)}{p(x_1, \dots, x_n)} = \frac{p(x_1, \dots, x_n) p(s)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, \dots, x_n \mid s) p(s) ds} \\ &= \frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left[-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - s)^2}{2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - s)^2 + s^2\right] ds} \\ &= \frac{(n+1)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (n+1) \left(s - \frac{n\bar{x}}{n+1}\right)^2\right]\end{aligned} \quad (3)$$

式中, 使用了公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(s \mid x_1, \dots, x_n) ds = 1 \quad (4)$$

将式(3)代入式(1)得 MMSE 估计

$$\hat{s}_{\text{MMSE}} = \int_{-\infty}^{+\infty} s \frac{(n+1)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (n+1) \left(s - \frac{n\bar{x}}{n+1}\right)^2\right] ds = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(n+1)} \quad (5)$$

取式(3)的对数, 得到似然函数

$$\ln p(s | x_1, \dots, x_n) = \ln \sqrt{\frac{n+1}{2\pi}} - \frac{1}{2}(n+1) \left(s - \frac{n\bar{x}}{n+1} \right)^2 \quad (6)$$

求相对于 s 的偏导数,并令结果等于零,得

$$\frac{\partial}{\partial s} \ln p(s | x_1, \dots, x_n) = -\frac{n+1}{2} \cdot 2 \left(s - \frac{n\bar{x}}{n+1} \right) = 0$$

因此,最大后验概率估计为

$$\hat{s}_{\text{MAP}} = \frac{n\bar{x}}{n+1} = \sum_{i=1}^n x_i / (n+1) \quad (7)$$

比较式(5)和式(7)知,在本题的情况下 $\hat{s}_{\text{MSSE}} = \hat{s}_{\text{MAP}}$ 。

因此本题中,信号的最大似然估计和最大后验概率估计相等,为

$$\hat{s}_{\text{MMSE}} = \hat{s}_{\text{MAP}} = \sum_{i=1}^n x_i / (n+1)$$

1.11 设 m 维被估计矢量 θ 的均值矢量和协方差矩阵分别为 \mathbf{M}_θ 和 \mathbf{R}_θ 。观测方程为

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\theta + n_x$$

且已知

$$E(n_x) = 0, E(n_x n_x^T) = \mathbf{R}_n, E(\theta n_x^T) = 0$$

求 θ 的线性最小均方误差估计矢量 $\hat{\theta}_{\text{LMSE}}$ 和估计矢量的均方误差阵 $\mathbf{M}_{\hat{\theta}_{\text{LMSE}}}$ 。

解:由已知的观测方程可得,观测矢量 \mathbf{x} 的均值矢量 \mathbf{M}_x 和协方差矩阵 \mathbf{R}_x 分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_x &= E(\mathbf{x}) = E(\mathbf{H}\theta + n_x) = \mathbf{H}\mathbf{M}_\theta \\ \mathbf{R}_x &= E[(\mathbf{x} - \mathbf{M}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{M}_x)^T] \\ &= E[(\mathbf{H}\theta + n_x - \mathbf{H}\mathbf{M}_\theta)(\mathbf{H}\theta + n_x - \mathbf{H}\mathbf{M}_\theta)^T] \\ &= \mathbf{H}\mathbf{R}_\theta\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_n \end{aligned}$$

而被估计随机矢量 θ 与观测矢量 \mathbf{x} 的互协方差矩阵 $\mathbf{R}_{\theta x}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\theta x} &= E[(\theta - \mathbf{M}_\theta)(\mathbf{x} - \mathbf{M}_x)^T] \\ &= E[(\theta - \mathbf{M}_\theta)(\mathbf{H}\theta + n - \mathbf{H}\mathbf{M}_n)^T] \\ &= \mathbf{R}_\theta\mathbf{H}^T \end{aligned}$$

于是,得

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\text{LMSE}} &= \mathbf{M}_\theta + \mathbf{R}_\theta\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{R}_\theta\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_\theta)^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{M}_\theta) \\ \mathbf{P}_{\hat{\theta}_{\text{LMSE}}} &= E[(\theta - \hat{\theta}_{\text{LMSE}})(\theta - \hat{\theta}_{\text{LMSE}})^T] \\ &= \mathbf{R}_\theta - \mathbf{R}_\theta\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{R}_\theta\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_\theta)^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R}_\theta \end{aligned}$$

1.12 如果参量 θ 的观测方程为

$$x_k = \theta + n_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

式中, θ 是未知非随机参量;观测噪声 n_k 是均值为零、方差为 σ_n^2 的独立同分布高斯噪声。求函数 $\alpha = \exp(\theta)$ 的最大似然估计量 $\hat{\alpha}_{\text{ML}}$ 。

解:根据观测方程和假设条件,似然函数为

$$p(\mathbf{x} | \theta) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \theta)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

该似然函数中含有参量 θ 。因为在 $\alpha = \exp(\theta)$ 函数中, α 是 θ 的一对一的变换,将似然函数 $p(\mathbf{x} | \theta)$ 等效的变换为

$$p(\mathbf{x} | \alpha) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \ln \alpha)^2}{2\sigma_n^2} \right], \alpha > 0$$

显然, $p(\mathbf{x} | \alpha)$ 相当于是下列观测矢量 \mathbf{x} 的似然函数:

$$x_k = \ln \alpha + n_k, k=1, 2, \dots, n$$

利用最大似然方程,有

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} | \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n (x_k - \ln \alpha) \frac{1}{\alpha} \bigg|_{\alpha = \hat{\alpha}_{\text{ML}}} = 0$$

解得

$$\hat{\alpha}_{\text{ML}} = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right)$$

本例的参量 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \sum_{k=1}^n x_k / n$$

于是有

$$\hat{\alpha}_{\text{ML}} = \exp(\hat{\theta}_{\text{ML}})$$

这说明,在 α 是 θ 的一对一变换的条件下,用原始参量的最大似然估计量 $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ 替换变换关系中的参量 θ ,可以求出变换后的参量 α 的最大似然估计量 $\hat{\alpha}_{\text{ML}}$,最大似然估计的这个性质称为不变性。

1.13 类似 1.12 题,设线性观测方程为

$$x_k = \theta + n_k, k=1, 2, \dots, n$$

式中, θ 是非随机参量; n_k 是均值为零、方差为 σ_n^2 的独立高斯噪声。现在求 θ 的函数 $\alpha = b\theta$ 的最大似然估计量 $\hat{\alpha}_{\text{ML}}$, 其中 $b \neq 0$, 且为常数; 考查 $\hat{\alpha}_{\text{ML}}$ 的无偏性和有效性, 并求估计的均方误差。

解: 由题意可知, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的似然函数为

$$p(x | \theta) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \theta)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

非随机参数 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

且估计量 $\hat{\theta}_{\text{ML}}$ 是无偏的和优效的, 估计的均方误差为

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{\text{ML}}) = E[(\theta - \hat{\theta}_{\text{ML}})^2] = \frac{\sigma_n^2}{n}$$

根据最大似然估计的不变性, $\alpha = b\theta$ 的最大似然估计量为

$$\hat{\alpha}_{\text{ML}} = b\hat{\theta}_{\text{ML}} = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

现在考查 $\hat{\alpha}_{\text{ML}}$ 的无偏性和优效性。因为

$$E(\hat{\alpha}_{\text{ML}}) = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n E(\theta + n_k) = b\theta = \alpha$$

所以, $\hat{\alpha}_{\text{ML}}$ 是无偏估计量。

因为

$$\frac{\partial \ln p(x | \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n (x_k - \theta) = \left(b\theta - \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \left(-\frac{n}{b\sigma_n^2}\right) = (\alpha - \hat{\alpha}_{\text{ML}})k$$

式中, $k = n/b\sigma_n^2$ 。所以, $\hat{\alpha}_{\text{ML}}$ 是优效估计量。这样, 可以通过求克拉默-拉奥界限来求得估计的均方误差, 结果为

$$\text{Var}(\hat{\alpha}_{\text{ML}}) = E[(\alpha - \hat{\alpha}_{\text{ML}})^2] = \frac{[\partial(b\theta)/\partial\theta]^2}{-E[\partial^2 \ln p(x|\theta)/\partial\theta^2]} = (b^2/n)/\sigma_n^2 = (b^2\sigma_n^2)/n$$

1.14 比对 1.12 题, 现考虑高斯噪声中, 高斯随机量 θ 的最大后验估计问题。

设观测方程为

$$x_k = \theta + n_k, k=1, 2, \dots, n$$

式中, 被估计随机参量 θ 是均值为 m_θ 、方差为 σ_θ^2 的高斯随机参量观测噪声 n_k 是均值为零、方差为 σ_n^2 的高斯噪声; 若 n 次观测间相互统计独立, 求 θ 的最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 和估计量的均方误差 $\epsilon^2 \hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 。

解: 观测矢量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的概率密度函数为

$$p(x | \theta) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \theta)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

而 θ 的概率密度函数为

$$p(\theta) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\theta^2} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{(\theta - m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2} \right]$$

由最大后验方程,得

$$\frac{\partial \ln p(x | \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k - \frac{n\theta}{\sigma_n^2} - \frac{\theta}{\sigma_\theta^2} + \frac{m_\theta}{\sigma_\theta^2} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_{\text{MAP}}} = 0$$

解得

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{\sigma_\theta^2}{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^n x_k + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\theta^2} m_\theta \right]$$

$\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 也可以表示为

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2/n} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k + \frac{\sigma_n^2}{n\sigma_\theta^2} m_\theta \right]$$

下面考查 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 的无偏性和优效性,并求其均方误差。

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}_{\text{MAP}}) &= \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2/n} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(\theta + n_k) + \frac{\sigma_n^2}{n\sigma_\theta^2} m_\theta \right] \\ &= \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2/n} \left[M_\theta + \frac{\sigma_n^2}{n\sigma_\theta^2} m_\theta \right] = m_\theta \end{aligned}$$

所以, $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 是无偏估计量。

又因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(x | \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta} &= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k - \frac{n\theta}{\sigma_n^2} - \frac{\theta}{\sigma_\theta^2} + \frac{m_\theta}{\sigma_\theta^2} \\ &= \left[\theta - \frac{\sigma_\theta^2}{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\theta^2} m_\theta \right) \right] \left(- \frac{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2}{\sigma_\theta^2 \sigma_n^2} \right) \\ &= (\theta - \hat{\theta}_{\text{MAP}}) k \end{aligned}$$

式中

$$k = \frac{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2}{\sigma_\theta^2 \sigma_n^2}$$

所以, $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 也是优效估计量。

这样, $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 是无偏、优效估计量,其均方误差取克拉默-拉奥界限,为

$$\epsilon_{\hat{\theta}_{\text{MAP}}}^2 = \frac{1}{-E \left[\frac{\partial^2 \ln p(x | \theta)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \ln p(\theta)}{\partial \theta^2} \right]} = \frac{1}{n + \sigma_n^2/\sigma_\theta^2}$$

1.15 根据二维矢量 θ 的两次观测

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \theta + n_{x_1}, \quad x_2 = 4 = [1 \quad 2] \theta + n_{x_2}$$

求 θ 的最小二乘估计量 $\hat{\theta}_{\text{LS}}(x)$

解: 矢量形式的观测方程为

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\theta + \mathbf{n}_x$$

式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

利用最小二乘估计量 $\hat{\theta}_{\text{LS}}(\mathbf{x})$ 的计算公式,得

$$\hat{\theta}_{\text{LS}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

1.16 用电表对电压进行了两次测量,测量结果一次为 216V,另一次为 220V,观测方程为

$$216 = \theta + n_{x_1}, 220 = \theta + n_{x_2}$$

式中,观测噪声的均值和方差阵分别为

$$E(n_{x_1}) = E(n_{x_2}) = 0$$

$$E \left\{ \begin{bmatrix} n_{x_1} \\ n_{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x_1} & n_{x_2} \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} 4^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

求电压 θ 的最小二乘估计量和最佳加权最小二乘估计量,并对结果进行比较和讨论。

解:由题意知

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 216 \\ 220 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_{x_1} \\ n_{x_2} \end{bmatrix}$$

在非加权情况下,电压 θ 的最小二乘估计量 $\hat{\theta}_{\text{LS}}(\mathbf{x})$ 和估计误差的方差 $E\{[\theta - \hat{\theta}_{\text{LS}}(\mathbf{x})]^2\}$ 分别为

$$\hat{\theta}_{\text{LS}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{x} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 216 \\ 220 \end{bmatrix} = 218\text{V}$$

$$\begin{aligned} E\{[\theta - \hat{\theta}_{\text{LS}}(\mathbf{x})]^2\} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = 5\text{V}^2 \end{aligned}$$

如果采用最佳加权,加权矩阵为

$$\mathbf{W}_{\text{OPT}} = \mathbf{R}_n^{-1} = \begin{bmatrix} 4^{-2} & 0 \\ 0 & 2^{-2} \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\text{LSOW}}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{x} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^{-2} & 0 \\ 0 & 2^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^{-2} & 0 \\ 0 & 2^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 216 \\ 220 \end{bmatrix} \\ &= 219.2\text{V} \end{aligned}$$

$$E\{[\theta - \hat{\theta}_{\text{LSOW}}(\mathbf{x})]^2\} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^{-2} & 0 \\ 0 & 2^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = 3.2\text{V}^2$$

习 题 二

2.1 在二元数字通信系统中,两假设下的观测模型分别为

$$H_1: x = m + n_x, \quad H_0: x = n_x$$

式中,观测噪声 $n_x \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ 。若两假设是等可能的,且代价因子 $c_{00} = c_{11} = 0, c_{10} = c_{01} = 1$ 时,采用最小总错误概率准则,试确定判决规则,并求总错误概率。

解:在两假设下,观测量 x 的概率密度函数分别为

$$p(x | H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

$$p(x | H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

由于两个假设是等概率的,且 $c_{00} = c_{11} = 0, c_{10} = c_{01} = 1$,所以似然比检验为

$$\Lambda(x) = \frac{p(x | H_1)}{p(x | H_0)} = \exp \left[\frac{2mx}{2\sigma_n^2} - \frac{m^2}{2\sigma_n^2} \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 1$$

整理得

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} m/2$$

由于检验统计量 $l(x)=x$, 所以

$$p(l | H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(l-m)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

$$p(l | H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{l^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

检测门限 $\gamma=m/2$ 。于是两种错误判决的概率密度分别为

$$\begin{aligned} P(D_1 | H_0) &= \int_{\gamma}^{+\infty} p(l | H_0) dl = \int_{\frac{m}{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{l^2}{2\sigma_n^2} \right] dl \\ &= \int_{\frac{m}{2\sigma_n}}^{+\infty} (1/2\pi)^{1/2} \exp[-v^2/2] dv = \operatorname{erfc}^* [d/2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D_0 | H_1) &= \int_{-\infty}^{\gamma} p(l | H_1) dl = \int_{-\infty}^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(l-m)^2}{2\sigma_n^2} \right] dl \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{m}{2\sigma_n}} (1/2\pi)^{1/2} \exp[-v^2/2] dv = \operatorname{erfc}^* [d/2] \end{aligned}$$

总错误概率 P_e 为

$$P_e = P(H_0)P(D_1 | H_0) + P(H_1)P(D_0 | H_1) = \operatorname{erfc}^* (d/2)$$

式中, $d=m/\sigma_n$ 是信噪比。显然, 信噪比越大, 总错误概率越小。

2.2 考虑与题 2.1 相同的问题, 但假定假设的先验概率 $P(H_1)$ 和 $P(H_0)$ 未知。在这种情况下, 将采用极大极小化准则。试确定检测门限和总错误概率。

解: 如同题 2.1, 似然比为

$$\Lambda(x) = \frac{p(x | H_1)}{p(x | H_0)} = \exp \left[\frac{2mx}{2\sigma_n^2} - \frac{m^2}{\sigma_n^2} \right]$$

设似然比检测门限为 λ_0 , 则似然比检验为

$$\exp \left[\frac{mx}{\sigma_n^2} - \frac{m^2}{2\sigma_n^2} \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0 \quad \text{整理得} \quad x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2}{m} \ln \Lambda_0 + \frac{m}{2} \triangleq \Lambda'_0$$

由于检验统计量 $l(x)=x$, 所以

$$P_{fa} = \int_{\Lambda'_0}^{+\infty} p(l | H_0) dl = \int_{\Lambda'_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{l^2}{2\sigma_n^2} \right] dl = \operatorname{erfc}^* \left[\frac{\Lambda'_0}{\sigma_n} \right]$$

$$P_m = \int_{-\infty}^{\Lambda'_0} p(l | H_1) dl = \int_{-\infty}^{\Lambda'_0} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(l-m)^2}{2\sigma_n^2} \right] dl = 1 - \operatorname{erfc}^* \left[\frac{\Lambda'_0 - m}{\sigma_n} \right]$$

因为代价因子 $c_{00}=c_{11}=0, c_{10}=c_{01}=1$, 根据极大极小化方程式, 有

$$1 - \operatorname{erfc}^* \left[\frac{\Lambda'^*_0 - m}{\sigma_n} \right] = \operatorname{erfc}^* \left[\frac{\Lambda'^*_0}{\sigma_n} \right]$$

从而

$$\Lambda'^*_0 = m/2$$

总错误概率

$$P_e = P_{fa}(\Lambda'^*_0) = \operatorname{erfc}^* [\Lambda'^*_0 / \sigma_n] = \operatorname{erfc}^* [m/2\sigma_n] = \operatorname{erfc}^* [d/2]$$

式中

$$d = m/\sigma_n$$

可见, 我们获得了与题 2.1 相同的结果。

2.3 在一般二元信号检测中, 两个假设下的观测信号分别为

$$H_0: x_k = s_0 + n_k, k = 1, 2, \dots, n$$

$$H_1: x_k = s_1 + n_k, k = 1, 2, \dots, n$$

式中, s_0 和 s_1 为确知信号, 且满足 $s_1 > s_0$; 观测噪声 $n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 且 n 次观测相互统计独立; 似然比检测门限

为 Λ_0 。

- (1) 求贝叶斯判决表示式。
- (2) 研究其检测性能。
- (3) 如果约定 $s_1 > 0$, 且满足 $s_1 \geq |s_0|$, 如何设计信号 s_0 才能获得最好的检测性能。

解: (1) 两个假设下, 观测信号的概率密度函数分别为

$$p(\mathbf{x} | H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - s_0)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

和

$$p(\mathbf{x} | H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - s_1)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

于是, 似然检验为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | H_1)}{p(\mathbf{x} | H_0)} = \exp \left[\sum_{k=1}^n \frac{2(s_1 - s_0)x_k - s_0^2 + s_1^2}{2\sigma_n^2} \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0$$

考虑到 $s_1 \geq |s_0|$, 化简得判决表示式

$$l(\mathbf{x}) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2}{s_1 - s_0} \ln \Lambda_0 + \frac{1}{2} (s_1^2 - s_0^2) \triangleq \gamma$$

- (2) 现在进行检测性能分析。

检验统计量 $l(\mathbf{x})$ 在两个假设下都是高斯随机变量。在假设 H_0 下, $l(\mathbf{x})$ 的均值和方差分别为

$$E(l | H_0) = E \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k | H_0) \right] = E \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (s_0 + n_k) \right] = s_0$$

$$\text{Var}(l | H_0) = E \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k | H_0) - E(l | H_0) \right)^2 \right] = E \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n n_k \right)^2 \right] = \sigma_n^2 / n$$

在假设 H_1 下, $l(\mathbf{x})$ 的均值和方差分别为

$$E(l | H_1) = E \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k | H_1) \right] = E \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (s_1 + n_k) \right] = s_1$$

$$\text{Var}(l | H_1) = E \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k | H_1) - E(l | H_1) \right)^2 \right] = E \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n n_k \right)^2 \right] = \sigma_n^2 / n$$

于是, 偏移系数 d^2 为

$$d^2 = \frac{[E(l | H_1) - E(l | H_0)]^2}{\text{Var}(l | H_0)} = \frac{n(s_1 - s_0)^2}{\sigma_n^2}$$

所以, 判决概率为

$$P(D_1 | H_0) = Q[\ln(\Lambda_0/d) + d/2]$$

$$P(D_1 | H_1) = Q[\ln(\Lambda_0/d) - d/2] = Q[Q^{-1}(P(D_1 | H_0)) - d]$$

- (3) 由偏移系数 $d^2 = [n(s_1 - s_0)^2] / \sigma_n^2$ 知, 当 $s_1 > 0$, 且 $s_1 \geq |s_0|$ 时, 取 s_0 为负值, 且 $|s_0| + \epsilon = s_1$, 式中 ϵ 是任意小的正数, 检测性能最好。

2.4 在数字通信系统中, 两个假设下的接收信号分别为

$$H_0: x_k = n_k, k = 1, 2, \dots, n$$

$$H_1: x_k = A + n_k, k = 1, 2, \dots, n$$

式中, $A > 0$ (常数); 噪声 $n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 且 n 次接收信号之间统计独立; 先验概率 $P(H_0) = P(H_1) = 1/2$, 代价因子 $c_{00} = c_{11} = 0, c_{10} = c_{01} = 1$ 。

- (1) 求最小平均错误概率准则判决表示式。
- (2) 求最小平均错误概率 P_e 。
- (3) 研究观测次数 n 对检验性能的影响。
- (4) 如果信号 $A < 0$, 但绝对值不变, 试问对检测性能有无影响? 说明原因。

解: (1) 两个假设下接收信号的概率密度函数分别为

$$p(\mathbf{x} | H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

和

$$p(\mathbf{x} | H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - A)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

这样,似然比检验为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | H_1)}{p(\mathbf{x} | H_0)} = \exp \left[\frac{A}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k - \frac{nA^2}{2\sigma_n^2} \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = 1$$

化简得判决表示式

$$l(\mathbf{x}) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{A}{2} \triangleq \gamma$$

(2) 在两个假设下,检验统计量 $l(x)$ 都是高斯随机变量。在假设 H_0 下, $l(x)$ 的均值和方差分别为

$$E(l | H_0) = 0, \quad \text{Var}(l | H_0) = \sigma_n^2/n$$

在假设 H_1 下, $l(x)$ 的均值和方差分别为

$$E(l | H_1) = A, \quad \text{Var}(l | H_1) = \sigma_n^2/n$$

于是,偏移系数 d^2 为

$$d^2 = nA^2/\sigma_n^2$$

这样,判决概率为

$$P(D_1 | H_0) = Q[\ln(\Lambda_0/d) + d/2] = Q[d/2]$$

$$P(D_0 | H_1) = 1 - Q[\ln(\Lambda_0/d) - d/2] = 1 - Q[-d/2] = Q[d/2]$$

最小平均错误概率为

$$P_e = P(H_0)P(D_1 | H_0) + P(H_1)P(D_0 | H_1) = Q[d/2]$$

(3) 随观测次数 n 的增加,偏移系数 d^2 随着增大,最小平均错误概率 P_e 随之减小。

(4) 如果信号 $A < 0$,但绝对值不变,则假设 H_1 下接收信号的概率密度函数为

$$p(\mathbf{x} | H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(x_k + |A|)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

似然比检验为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \exp \left[- \frac{|A|}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k - \frac{n|A|^2}{2\sigma_n^2} \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 1$$

化简得判决表示式

$$l(\mathbf{x}) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{|A|}{2} \triangleq \gamma$$

在两个假设下,检验统计量 $l(x)$ 都是高斯随机变量,其均值和方差分别为

$$E(l | H_0) = 0, \quad \text{Var}(l | H_0) = \sigma_n^2/n$$

和

$$E(l | H_1) = -|A|, \quad \text{Var}(l | H_1) = \sigma_n^2/n$$

于是,偏移系数 d^2 为

$$d^2 = n|A|^2/\sigma_n^2 = nA^2/\sigma_n^2$$

它与 $A > 0$ 的结果一样。所以, $A < 0$,但绝对值不变时,虽然最佳判决式发生了变化(这是为了实现最佳判决所必需的),但不影响信号检测性能。

2.5 在雷达信号检验中,通常采用奈曼-皮尔逊准则。若两个与 2.4 题相似的假设下的接收信号分别为

$$H_0: x_k = n_k, k = 1, 2, \dots, n$$

$$H_1: x_k = A + n_k, k = 1, 2, \dots, n$$

式中, $a > 0$ (常数); 噪声 $n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 且 $n_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 之间的相互统计独立。试设计一个 $P(D_1 | H_0) = 0.1$ 的奈曼-皮尔逊接收机,并研究其检测性能。

解:两个假设下接收信号的概率密度函数分别为

$$p(\mathbf{x} | H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

和

$$p(\mathbf{x} | H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - A)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

于是,似然比检验为

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | H_1)}{p(\mathbf{x} | H_0)} = \exp \left[\frac{A}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k - \frac{nA^2}{2\sigma_n^2} \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0$$

式中,似然比检测门限 Λ_0 待求。化简得判决表示式

$$l(\mathbf{x}) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2}{nA} \ln \Lambda_0 + \frac{A}{2} \triangleq \gamma$$

式中,检测门限 γ 待求。

在两个假设下,检验统计量 $l(\mathbf{x})$ 都是高斯随机变量。在假设 H_0 下, $l(\mathbf{x})$ 的均值和方差分别为

$$E(l | H_0) = 0, \quad \text{Var}(l | H_0) = \sigma_n^2 / n$$

在假设 H_1 下, $l(\mathbf{x})$ 的均值和方差分别为

$$E(l | H_1) = A, \quad \text{Var}(l | H_1) = \sigma_n^2 / n$$

这样,在两个假设下, $l(\mathbf{x})$ 的概率密度函数分别为

$$p(l | H_0) = \left(\frac{n}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{nl^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

和

$$p(l | H_1) = \left(\frac{n}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{n(l-A)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

根据判决表示式,判决概率 $P(D_1 | H_0)$ 为

$$\begin{aligned} P(D_1 | H_0) &= \int_{\gamma}^{+\infty} p(l | H_0) dl = \int_{\gamma}^{+\infty} \left(\frac{n}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{nl^2}{2\sigma_n^2} \right] dl \\ &= \int_{\frac{\sqrt{n}\gamma}{\sigma_n}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{u^2}{2} \right) du = 0.1 \end{aligned}$$

于是,可查出 $\sqrt{n}\gamma/\sigma_n \approx 1.2817$ 。所以,判决概率 $P(D_1 | H_1)$ 为

$$\begin{aligned} P(D_1 | H_1) &= \int_{\gamma}^{+\infty} p(l | H_1) dl = \int_{\gamma}^{+\infty} \left(\frac{n}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{n(l-A)^2}{2\sigma_n^2} \right] dl \\ &= \int_{\frac{\sqrt{n}\gamma}{\sigma_n} - \frac{\sqrt{n}A}{\sigma_n}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{u^2}{2} \right) du \end{aligned}$$

式中, $\sqrt{n}\gamma/\sigma_n \approx 1.2817$, $d^2 = nA^2/\sigma_n^2$ 是功率信噪比。显然,在错误判决概率 $P(D_1 | H_0) = \alpha = 0.1$ 的约束下,随着功率信噪比 d^2 的增加,正确判决概率 $P(D_1 | H_1)$ 增大,检测性能提高。

2.6 考虑四元信号通信信息,其信号为

$$s_j(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin \left(\omega_0 t + j \frac{\pi}{2} \right), 0 \leq t \leq T, j = 0, 1, 2, 3$$

已知 $\omega_0 = 2n\pi/T$, n 为整数,所以为四相信号通信系统。假设信号传输中叠加了功率谱密度 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声 $n(t)$;各信号出现的先验概率 $P(H_j)$ 相等。请设计采用最小总错误概率准则的检测系统,并研究其性能。

解:信号 $s_j(t)$ 的能量 E_j 为

$$E_j = \int_0^T \frac{2E_s}{T} \sin^2 \left(\omega_0 t + j \frac{\pi}{2} \right) dt = E_s$$

信号 $s_i(t)$ 与 $s_j(t)$ 的波形相关系数为

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{E_i E_j}} \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = \frac{1}{E_s} \frac{2E_s}{T} \int_0^T \sin \left(\omega_0 t + i \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\omega_0 t + j \frac{\pi}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos \frac{i-j}{2} \pi dt = \cos \left(\frac{i-j}{2} \right) \pi \end{aligned}$$

所以,波形相关系数的结果为

$$\rho_{00}=1, \rho_{01}=0, \rho_{02}=-1, \rho_{03}=0$$

在各假设下的接收信号 $x(t)$ 为

$$H_0: x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin \omega_0 t + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$H_1: x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) + n(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos \omega_0 t + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$H_2: x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin(\omega_0 t + \pi) + n(t) = -\sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin \omega_0 t + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$H_3: x(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin\left(\omega_0 t + \frac{3\pi}{2}\right) + n(t) = -\sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos \omega_0 t + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

根据格拉姆—施密特正交化的方法,选归一化函数 $f_k(t)$ 如下:

$$f_1(t) = s_0(t) / \sqrt{E_s} = \sqrt{2/T} \sin \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$f_2(t) = s_1(t) / \sqrt{E_s} = \sqrt{2/T} \cos \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$f_3(t) = -s_0(t) / \sqrt{E_s} = -\sqrt{2/T} \sin \omega_0 t = -f_1(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$f_4(t) = -s_1(t) / \sqrt{E_s} = -\sqrt{2/T} \cos \omega_0 t = -f_2(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

因为函数 $f_3(t)$ 和 $f_4(t)$ 分别为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的线性函数,所以,对于这样的四元信号($M=4$)检测问题,函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是两个归一化($n=2$)正交函数。由于噪声 $n(t)$ 是功率谱密度 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声过程,因此,以 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 这两个正交函数为坐标函数,可得两个相互统计独立的高斯随机变量 x_1, x_2 ,它们构成一组充分统计量。

如果采用最小总错误概率准则,并假设各假设 H_j 先验概率 $P(H_j)$ 相等。考虑到信号 $s_j(t)$ 能量 E_j 相等, $f_k(t)$ 与 $s_j(t)$ 的关系如前,所以四元信号的检测判决区域可以这样来确定:任意两个信号之间的判决分界线,是连接这两个信号连线的垂直平分线,且该垂直平分线通过原点;每个信号(比如 s_j)的判决区域,需要通过该信号与其余 $M-1$ 个信号组成 $M-1$ 个信号对,确定每一对信号中关于 s_j 的判决域,这 $M-1$ 个关于 s_j 的判决区域的公共部分,就是 H_j 成立的判决区域。结果如图 2.42 所示。例如假设 H_0 成立的判决区域 R_0 在图 2.42 的右半平面,由 $+45^\circ$ 线的下侧和 -45° 线的上侧区域所组成。

由于各假设 H_j 为真的先验概率相等,所以采用最大似然准则。判决规则为选择满足式:

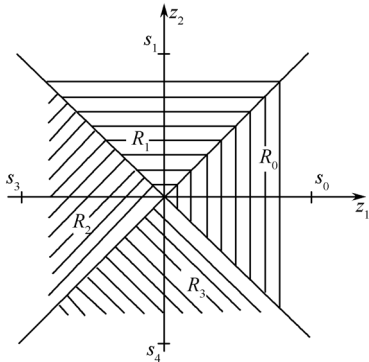


图 2.42 判决空间划分

$$\min \left\{ \sum_{k=1}^n (x_k - m_{jk})^2 \right\}, \quad 0 \leq j \leq M-1$$

则对应的假设 H_j 成立。因为

$$\sum_{k=1}^2 (x_k - m_{jk})^2 = | \mathbf{x} - \mathbf{m}_j |^2$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T, \quad \mathbf{m}_j = E[s_j + \mathbf{n}] = s_j,$$

$$s_j = [s_{j1}, s_{j2}]$$

所以

$$\sum_{k=1}^2 (x_k - m_{jk})^2 = | \mathbf{x} - s_j |^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T s_j + s_j^T s_j$$

于是

$$\min_{0 \leq j \leq 3} \left\{ \sum_{k=1}^2 (x_k - m_{jk})^2 \right\} = \min_{0 \leq j \leq 3} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T s_j + s_j^T s_j \}$$

判假设 H_j 成立,等价于(等信号能量条件下)

$$\max_{0 \leq j \leq 3} \{ \mathbf{x}^T s_j \}$$

判假设 H_j 成立

回到信号波形的形式,则

$$\max_{0 \leq j \leq 3} \left\{ \int_0^T \mathbf{x}(t) s_j(t) dt \right\} = \max_{0 \leq j \leq 3} \{ l_j [\mathbf{x}(t)] \}$$

判假设 H_j 成立。

考虑到 $s_2(t) = -s_0(t)$, $s_3(t) = -s_1(t)$, 所以检测系统的结构如图 2.43 所示。

下面来分析四无信号检测系统的性能。因为各信号出现的先验概率 $P(H_j)$ 相等, 采用最小总错误概率准则, 则

$$P_e = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m-1} P(H_j) P(D_i | H_j) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^3 \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 P(D_i | H_j)$$

检验统计量

$$l_j [\mathbf{x}(t)] = \int_0^T \mathbf{x}(t) s_j(t) dt$$

是高斯分布的, 它是一种对称分布。注意到各假设成立的判决区域也是对称的, 且各假设为真的先验概率相等, 所以在各假设信号能量相等的情况下, 各假设的错误判决概率

$$P_{e_j} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^3 P(D_i | H_j), j = 0, 1, 2, 3$$

相等。这样, 总错误概率

$$P_e = P_{e_j} = 1 - P(D_j | H_j)$$

下面先讨论假设 H_0 为真时, 正确判决概率 $P(D_0 | H_0)$ 的计算问题。根据判决规则表示式

$$\max_{0 \leq j \leq 3} \left\{ \int_0^T \mathbf{x}(t) s_j(t) dt \right\} = \max_{0 \leq j \leq 3} \{ l_j [\mathbf{x}(t)] \}$$

在假设 H_0 为真时, 正确判决假设 H_0 成立, 必须满足

$$\begin{cases} \int_0^T \mathbf{x}(t) s_0(t) dt > \int_0^T \mathbf{x}(t) s_1(t) dt \\ \int_0^T \mathbf{x}(t) s_0(t) dt > \int_0^T \mathbf{x}(t) s_2(t) dt \\ \int_0^T \mathbf{x}(t) s_0(t) dt > \int_0^T \mathbf{x}(t) s_3(t) dt \end{cases}$$

即判决规则为, 当 $\begin{cases} l_0 > l_1 \\ l_0 > l_2 \\ l_0 > l_3 \end{cases}$ 时, 判决 H_0 成立。

因为

$$s_2(t) = -s_0(t), s_3(t) = -s_1(t)$$

所以, 判决规则简化为, 当 $\begin{cases} l_0 > 0 \\ -l_0 < l_1 < l_0 \end{cases}$ 时, 判决假设 H_0 成立。

在获得简化的判决规则表示式后, 为了计算判决概率, 应求得检验统计量 l_0, l_1 的联合分布 $p(l_0, l_1 | H_0)$ 。为此, 先求出当假设 H_0 为真时, 服从高斯分布的检验统计量 l_0 和 l_1 的均值、方差, 以及它们之间的协方差。结果为

$$\begin{aligned} E(l_0 | H_0) &= E \left[\int_0^T x(t) s_0(t) dt \mid H_0 \right] = E \left\{ \int_0^T [s_0(t) + n(t)] s_0(t) dt \right\} \\ &= E \left\{ \int_0^T \left[\sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin \omega_0 t + n(t) \right] \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin \omega_0 t dt \right\} = E_s \\ E(l_1 | H_0) &= E \left[\int_0^T x(t) s_1(t) dt \mid H_0 \right] = E \left\{ \int_0^T [s_0(t) + n(t)] s_1(t) dt \right\} \end{aligned}$$

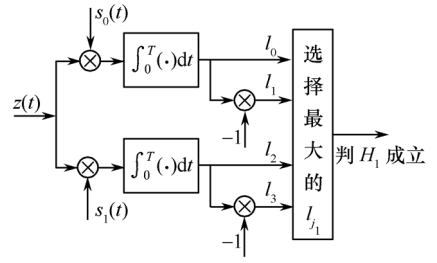


图 2.43 四元信号检测系统

$$\begin{aligned}
&= E \left\{ \int_0^T \left[\sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin \omega_0(t) + n(t) \right] \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin \omega_0 t dt \right\} = 0 \\
\text{Var}(l_1 + H_0) &= E \{ [l_0 - E(l_0 | H_0)]^2 | H_0 \} = E \left[\int_0^T \int_0^T n(t) n(u) s_0(t) s_0(u) dt du \right] = \frac{N_0}{2} E_s \\
\text{Var}(l_1 | H_0) &= E \{ [l_1 - E(l_1 | H_0)]^2 | H_0 \} = \frac{N_0}{2} E_s \\
\text{Cov}(l_0, l_1 | H_0) &= E \{ [l_0 - E(l_0 | H_0)] [l_1 - E(l_1 | H_0)] | H_0 \} \\
&= E \left[\int_0^T n(t) s_0(t) dt \int_0^T n(u) s_1(u) du \right] \\
&= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \delta(t-u) \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \sin \omega_0 t \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos \omega_0 u dt du = 0
\end{aligned}$$

所以, 检验统计量 l_0 和 l_1 是不相关的, 因而也是统计独立的两个高斯随机变量。因此, 它们的联合概率密度函数为

$$p(l_0, l_1 | H_0) = p(l_0 | H_0) p(l_1 | H_0) = \frac{1}{\pi N_0 E_s} \exp \left[-\frac{(l_0 - E_s)^2 + l_1^2}{N_0 E_s} \right]$$

这样, 判决概率 $p(D_0 | H_0)$ 为

$$p(D_0 | H_0) = \int_0^{+\infty} \left[\int_{-l_0}^{l_0} p(l_0, l_1 | H_0) dl_1 \right] dl_0 = \int_0^{+\infty} \left[\int_{-l_0}^{l_0} \frac{1}{\pi N_0 E_s} \exp \left[-\frac{(l_0 - E_s)^2 + l_1^2}{N_0 E_s} \right] dl_1 \right] dl_0$$

为了计算上述积分, 进行坐标变换, 令

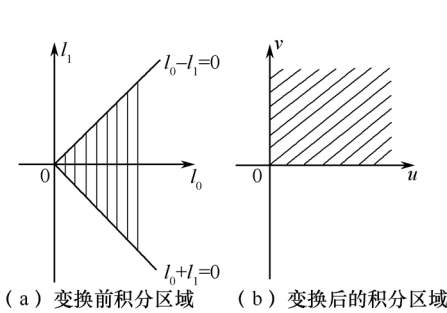


图 2.44 坐标变换与积分区域

则

$$\begin{cases} u = l_0 + l_1 \\ v = l_0 - l_1 \end{cases}
\begin{cases} l_0 = (u+v)/2 \\ l_1 = (u-v)/2 \end{cases}$$

于是, 计算 $p(D_0 | H_0)$ 的被积概率密度函数经二维雅可比变换 (雅可比行列式的绝对值 $|J| = 1/2$) 后为

$$p(u, v | H_0) = \frac{1}{2\pi N_0 E_s} \exp \left[-\frac{[(u+v)/2 - E_s]^2 + [(u-v)/2]^2}{N_0 E_s} \right]$$

而它们的积分区域如图 2.44 所示。其中, 图 2.44(a) 是坐标变换前的积分区域, 图 2.44(b) 是坐标变换后的积分区域。

这样, 假设 H_0 为真时的正确判决概率 $p(D_0 | H_0)$ 为

$$\begin{aligned}
p(D_0 | H_0) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi N_0 E_s} \exp \left[-\frac{[(u+v)/2 - E_s]^2 + [(u-v)/2]^2}{N_0 E_s} \right] du dv \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi N_0 E_s} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(u - E_s)^2}{2N_0 E_s} \right] du \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi N_0 E_s} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(u - E_s)^2}{2N_0 E_s} \right] dv \\
&= \left[\int_{-(E_s/N_0)^{1/2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \right) \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right] dx \right]^2 = \left[\text{erfc}^* \left(-\sqrt{E_s/N_0} \right) \right]^2
\end{aligned}$$

用同样的方法可得 $p(D_1 | H_1)$, $p(D_2 | H_2)$, $p(D_3 | H_3)$, 它们都是相等的, 即

$$p(D_j | H_j) = [\text{erfc}^* (-\sqrt{E_s/N_0})]^2, j=0, 1, 2, 3$$

于是, 最小总错误概率 P_e 为

$$P_e = 1 - P(D_j | H_j) = 1 - [\text{erfc}^* (-\sqrt{E_s/N_0})]^2$$

上述结果就是在功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声背景中, 等信号能量和等先验概率时, 四相信号通信系统的性能。回想一般二元信号波形的检测, 在 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声背景中, 等信号能量和等先验概率时的二元相干信号 ($\rho=1$) 通信系统, 其最小总错误概率为

$$P_e = \text{erfc}^* [d/2] = \text{erfc}^* [\sqrt{2E_s/N_0}]$$

$$p(D_j | H_j) = 1 - P_e = 1 - \text{erfc}^* [\sqrt{2E_s/N_0}]$$

可见,四相信号通信系统的性能不如二元相干信号通信系统的性能好。

习 题 三

3.1 考虑启闭式二元数字通信系统,信源以等概率产生 0 和 1 码,通信系统采用调幅(ASK)方式。在假设 H_0 下和假设 H_1 下的接收信号模型为

$$H_0: x(t) = n(t), 0 \leq t \leq T$$

$$H_1: x(t) = as(t) + n(t), 0 \leq t \leq T$$

式中,信号 $as(t)$ 的振幅为 a , $s(t)$ 是归一化的确知信号,即

$$\int_0^T s^2(t) dt = 1$$

$n(t)$ 是均值为零、功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声。试分别用正交级数展开法和充分统计量的方法导出最小平均错误概率准则的信号检测判决表示式和最佳检验系统,并研究其检测性能。

解:首先导出信号检测的判决表示式。如果采用正交级数展开法,则有

$$\begin{aligned} H_0: x_k &= n_k, \\ H_1: x_k &= as_k + n_k \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

式中, $n_k \sim \mathcal{N}(0, N_0/2)$ ($k = 1, 2, \dots$), 相互统计独立; $(x_k | H_0) \sim \mathcal{N}(0, N_0/2)$, $(x_k | H_1) \sim \mathcal{N}(as_k, N_0/2)$, ($k = 1, 2, \dots$), 相互统计独立。

取前有限 n 项构成似然比检验, 则得

$$\Lambda(\mathbf{x}_N) = \frac{\left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - as_k)^2}{N_0}\right]}{\left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{N_0}\right]} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = 1$$

化简得

$$x_1 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (a/2)$$

因为

$$x_1 = \int_0^T x(t) f_1(t) dt = \int_0^T x(t) s(t) dt$$

所以,信号检测的判决表示式为

$$l[x(t)] \triangleq \int_0^T x(t) s(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} a/2 \triangleq \gamma$$

这与采用正交级数展开法所得判决表示式是一样的。

根据判决表示式,最佳检测系统的结构如题 3.3 图(a)、(b)所示。

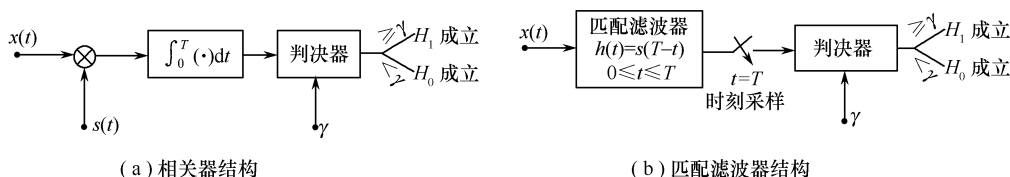


图 3.3 检测系统结构

最后研究检测性能。

在假设 H_0 下和假设 H_1 下,检验统计量 $l[x(t)]$ 都是高斯随机变量。在假设 H_0 下, $l[x(t)]$ 的均值和方差分别为

$$\begin{aligned} E(l | H_0) &= E\left[\int_0^T n(t) s(t) dt\right] = 0 \\ \text{Var}(l | H_0) &= E\left\{\left[\int_0^T n(t) s(t) dt\right]^2\right\} = E\left[\int_0^T n(t) s(t) dt \int_0^T n(u) s(u) du\right] \\ &= \int_0^T s(t) \left[\int_0^T E[n(t)n(u)] s(u) du\right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T s(t) \left[\int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t-u) s(u) du \right] dt \\
&= \frac{N_0}{2} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{N_0}{2}
\end{aligned}$$

类似地,在假设 H_1 下, $l[x(t)]$ 的均值和方差分别为

$$\begin{aligned}
E(l | H_1) &= E \left\{ \int_0^T [as(t) + n(t)] s(t) dt \right\} = a \\
\text{Var}(l | H_1) &= E \left\{ \left[\int_0^T n(t) s(t) dt \right]^2 \right\} = \frac{N_0}{2}
\end{aligned}$$

这样,偏移系数 d^2 为

$$d^2 = \frac{[E(l | H_1) - (l | H_0)]^2}{\text{Var}(l | H_0)} = \frac{2a^2}{N_0}$$

于是,判决概率为

$$\begin{aligned}
P(D_1 | H_0) &= Q[d/2] \\
P(D_0 | H_1) &= 1 - P(D_1 | H_1) = 1 - Q[-d/2] = Q[d/2]
\end{aligned}$$

平均错误概率为

$$P_e = P(H_0)P(D_1 | H_0) + P(H_1)P(D_0 | H_1) = Q[d/2]$$

3.2 在 Gaussian 白噪声中,一般二元确知信号波形检测的信号模型为

$$H_j: x(t) = s_j(t) + n(t), 0 \leq t \leq T, j=0,1$$

式中, $s_j(t)$ 是确知信号,能量为 E_{s_j} ($j=0,1$); $n(t)$ 是均值为零,功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声。现采用充分统计量的分析方法,已知在假设 H_0 下,接收信号 $x(t)$ 的前两个展开系数为

$$x_1 = \rho \sqrt{E_{s_0}} + n_1, \quad x_2 = \sqrt{(1-\rho^2)E_{s_0}} + n_2$$

在假设 H_1 下,接收信号 $x(t)$ 的前两个展开系数为

$$x_1 = \sqrt{E_{s_1}} + n_1, \quad x_2 = n_2$$

式中, ρ 是信号 $s_0(t)$ 与 $s_1(t)$ 的波形相关系数,定义为

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_{s_0} E_{s_1}}} \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt, \quad |\rho| \leq 1$$

设 $x = (x_1, x_2)^T$ 是充分统计量,请利用概率密度函数 $p(x_1, x_2 | H_1)$ 和 $p(x_1, x_2 | H_0)$ 构成似然比检验,导出信号检测的判决表示式。

解: 构造的正交函数集 $\{f_k(t)\}$ 的前两个坐标函数为

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_{s_1}}} s_1(t), \quad (0 \leq t \leq T)$$

和

$$f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2)E_{s_0}}} \left[s_0(t) - \rho \sqrt{\frac{E_{s_0}}{E_{s_1}}} s_1(t) \right] \quad (0 \leq t \leq T)$$

因为 $s_1(t)$ 是确知信号, $n(t)$ 是高斯白噪声,所以假设 H_j ($j=0,1$) 下的展开系数 x_k ($k=1,2$) 是互不相关的高斯随机变量。

在假设 H_0 下, x_k ($k=1,2$) 的均值和方差分别为

$$\begin{cases} E(x_1 | H_0) = E(\rho \sqrt{E_{s_0}} + n_1) = \rho \sqrt{E_{s_0}} \\ \text{Var}(x_1 | H_0) = E(n_1^2) = E \left\{ \left[\int_0^T n(t) \frac{1}{\sqrt{E_{s_1}}} s_1(t) dt \right]^2 \right\} = N_0/2 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} E(x_2 | H_0) = E(\sqrt{(1-\rho^2)E_{s_0}} + n_2) = \sqrt{(1-\rho^2)E_{s_0}} \\ E(x_2 | H_0) = E(n_2^2) = E \left\{ \left[\int_0^T n(t) \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2)E_{s_0}}} \left[s_0(t) - \rho \sqrt{\frac{E_{s_0}}{E_{s_1}}} s_1(t) \right] dt \right]^2 \right\} = N_0/2 \end{cases}$$

于是

$$p(x|H_0) = p(x_1, x_2|H_0) = \left(\frac{1}{\pi N_0}\right) \exp\left[-\frac{(x_1 - \rho\sqrt{E_{s_0}})^2 + (x_2 - \sqrt{(1-\rho^2)E_{s_0}})^2}{N_0}\right]$$

在假设 H_1 下, x_k ($k=1, 2$) 的均值和方差分别为

$$E(x_1|H_1) = E(\sqrt{E_{s_1}} + n_1) = \sqrt{E_{s_1}}, \quad \text{Var}(x_1|H_1) = E(n_1^2) = N_0/2$$

和

$$E(x_2|H_1) = E(n_2) = 0, \quad \text{Var}(x_2|H_1) = E(n_2^2) = N_0/2$$

于是

$$p(x|H_1) = p(x_1, x_2|H_1) = \left(\frac{1}{\pi N_0}\right) \exp\left[-\frac{(x_1 - \sqrt{E_{s_1}})^2 + x_2^2}{N_0}\right]$$

设似然比检测门限为 Λ_0 , 则似然比检验为

$$\Lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \frac{\left(\frac{1}{\pi N_0}\right) \exp\left[-\frac{(x_1 - \sqrt{E_{s_1}})^2 + x_2^2}{N_0}\right]}{\frac{1}{\pi N_0} \exp\left[-\frac{(x_1 - \rho\sqrt{E_{s_0}})^2 + (x_2 - \sqrt{(1-\rho^2)E_{s_0}})^2}{N_0}\right]} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \Lambda_0$$

化简整理得

$$l(x) \triangleq (\sqrt{E_{s_1}} - \rho\sqrt{E_{s_0}})x_1 - \sqrt{(1-\rho^2)E_{s_0}}x_2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{N_0}{2} \ln \eta + \frac{1}{2}(E_{s_1} - E_{s_0}) \triangleq \gamma$$

因为展开系数 x_1, x_2 分别为

$$x_1 = \int_0^T x(t) f_1(t) dt = \int_0^T x(t) \frac{1}{\sqrt{E_{s_1}}} s_1(t) dt$$

$$x_2 = \int_0^T x(t) f_2(t) dt = \int_0^T x(t) \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2)E_{s_0}}} \left[s_0(t) - \rho\sqrt{\frac{E_{s_0}}{E_{s_1}}} s_1(t) \right] dt$$

所以, 检验统计量为 $l[x(t)]$ 的判决表示式为

$$l[x(t)] = (\sqrt{E_{s_1}} - \rho\sqrt{E_{s_0}}) \int_0^T x(t) \frac{1}{\sqrt{E_{s_1}}} s_1(t) dt - \sqrt{(1-\rho^2)E_{s_0}} \int_0^T x(t) \frac{1}{\sqrt{(1-\rho^2)E_{s_0}}} \left[s_0(t) - \rho\sqrt{\frac{E_{s_0}}{E_{s_1}}} s_1(t) \right] dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

整理得判决表示式

$$l[x(t)] = \int_0^T x(t) s_1(t) dt - \int_0^T x(t) s_0(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{N_0}{2} \ln \eta + \frac{1}{2}(E_{s_1} - E_{s_0}) \triangleq \gamma$$

3.3 考虑发送信号周期为 $T=2\pi/\omega_0$ 的二元移频键控(FSK)通信系统。在假设 H_0 下和假设 H_1 下发送的信号分别为

$$\begin{aligned} s_0(t) &= a \sin \omega_0 t \\ s_1(t) &= a \sin 2\omega_0 t \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq T)$$

式中, 信号的振幅 a 和频率 ω_0 已知, 并假定各假设是等元验概率的。信号在信道传输中叠加了均值为零、功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声 $n(t)$ 。现采用最小平均错误概率准则, 试用充分统计量的分析方法设计信号检测系统, 并计算平均错误统计 P_e 。

解: 因为

$$E_{s_0} = \int_0^T a^2 \sin^2 \omega_0 t dt = a^2 T/2, \quad E_{s_1} = \int_0^T a^2 \sin^2 2\omega_0 t dt = a^2 T/2$$

而信号 $s_0(t)$ 与 $s_1(t)$ 的波形相关系数 ρ 为

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_{s_0} E_{s_1}}} \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt = \frac{2}{a^2 T} \int_0^T a^2 \sin \omega_0 t \sin 2\omega_0 t dt = 0$$

所以, 信号 $s_0(t)$ 与 $s_1(t)$ 是等信号能量的正交信号。这样, 采用充分统计量的分析方法时, 正交函数集 $\{f_k(t)\}$ 前两个坐标函数分别构造为

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_{s_0}}} s_0(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_0 t, 0 \leq t \leq T$$

$$f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{E_{s_1}}} s_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\omega_0 t, 0 \leq t \leq T$$

而 $f_k(t), (k \geq 3)$ 不必具体构造。

在假设 H_0 下, 接收信号 $x(t)$ 的展开系数为

$$x_1 = \int_0^T [s_0(t) + n(t)] f_1(t) dt = \int_0^T [a \sin \omega_0 t + n(t)] \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_0 t dt = \sqrt{\frac{a^2 T}{2}} + n_1$$

$$x_2 = \int_0^T [s_0(t) + n(t)] f_2(t) dt = \int_0^T [a \sin \omega_0 t + n(t)] \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\omega_0 t dt = n_2$$

$$x_k = \int_0^T [s_0(t) + n(t)] f_k(t) dt = n_k, k \geq 3$$

在假设 H_1 下, 接收信号 $x(t)$ 的展开系数为

$$x_1 = \int_0^T [s_1(t) + n(t)] f_1(t) dt = \int_0^T [a \sin 2\omega_0 t + n(t)] \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_0 t dt = n_1$$

$$x_2 = \int_0^T [s_1(t) + n(t)] f_2(t) dt = \int_0^T [a \sin 2\omega_0 t + n(t)] \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\omega_0 t dt = \sqrt{\frac{a^2 T}{2}} + n_2$$

$$x_k = \int_0^T [s_1(t) + n(t)] f_k(t) dt = n_k, k \geq 3$$

二维矢量 $x = (x_1, x_2)^T$ 是充分统计量。由于 $s_j(t)$ 是确知信号, $n(t)$ 是高斯白噪声, 所以展开系数 $x_k, (k=1, 2)$ 是互不相关的高斯随机变量。容易得到假设 H_j 下展开系数的均值和方差分别为

$$\begin{cases} E(x_1 | H_0) = \sqrt{a^2 T/2}, & \text{Var}(x_1 | H_0) = N_0/2 \\ E(x_2 | H_0) = 0, & \text{Var}(x_2 | H_0) = N_0/2 \\ E(x_1 | H_1) = 0, & \text{Var}(x_1 | H_1) = N_0/2 \\ E(x_2 | H_1) = \sqrt{a^2 T/2}, & \text{Var}(x_2 | H_1) = N_0/2 \end{cases}$$

和

于是, 有

$$p(x | H_0) = \left(\frac{1}{\pi N_0} \right) \exp \{ -[(x_1 - \sqrt{a^2 T/2})^2 + x_2^2] / N_0 \}$$

和

$$p(x | H_1) = \left(\frac{1}{\pi N_0} \right) \exp \{ -[x_1^2 + (x_2 - \sqrt{a^2 T/2})^2] / N_0 \}$$

在 $P(H_0) = P(H_1)$ 条件下, 采用最小平均错误概率准则的似然比检测门限 $z = P(H_0)P(H_1) = 1$ 。于是, 似然比检验为

$$\Lambda(x) = \frac{p(x | H_1)}{p(x | H_0)} = \frac{\left(\frac{1}{\pi N_0} \right) \exp \{ -[x_1^2 + (x_2 - \sqrt{a^2 T/2})^2] / N_0 \}}{-[(x_1 - \sqrt{a^2 T/2})^2 + x_2^2] / N_0} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0 = 1$$

化简整理得

$$l(x) = -\frac{2\sqrt{a^2 T/2}}{N_0} x_1 + \frac{2\sqrt{a^2 T/2}}{N_0} x_2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 0$$

因为

$$x_1 = \int_0^T x(t) f_1(t) dt = \int_0^T x(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_0 t dt$$

$$x_2 = \int_0^T x(t) f_2(t) dt = \int_0^T x(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\omega_0 t dt$$

所以, 检验统计量为 $l[x(t)]$ 的判决表示式为

$$l[x(t)] \triangleq \int_0^T x(t) a \sin 2\omega_0 t dt - \int_0^T x(t) a \sin \omega_0 t dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 0$$

下面求平均错误概率 P_e 。

无论在假设 H_0 下还是在假设 H_1 下, 检验统计量 $l[x(t)]$ 都是高斯随机变量。在假设 H_0 下, $l[x(t)]$ 的均值和方差分别为

$$\begin{aligned} E[l | H_0] &= E\left\{\int_0^T [a\sin\omega_0 t + n(t)]a\sin 2\omega_0 t dt - \int_0^T [a\sin\omega_0 t + n(t)]a\sin\omega_0 t dt\right\} \\ &= -a^2 T/2 = -E_s \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \text{Var}(l | H_0) &= E\left\{\left[\int_0^T n(t)a\sin 2\omega_0 t dt - \int_0^T n(t)a\sin\omega_0 t dt\right]^2\right\} \\ &= N_0/2 \cdot a^2 T/2 + N_0/2 \cdot a^2 T/2 = N_0 E_s \end{aligned}$$

在假设 H_1 下, $l[x(t)]$ 的均值和方差分别为

$$\begin{aligned} E(l | H_1) &= E\left\{\int_0^T [a\sin 2\omega_0 t + n(t)]a\sin 2\omega_0 t dt - \int_0^T [a\sin 2\omega_0 t + n(t)]a\sin\omega_0 t dt\right\} \\ &= a^2 T/2 = E_s \\ \text{Var}(l | H_1) &= E\left\{\left[\int_0^T n(t)a\sin 2\omega_0 t dt - \int_0^T n(t)a\sin\omega_0 t dt\right]^2\right\} \\ &= N_0/2 \cdot a^2 T/2 + N_0/2 \cdot a^2 T/2 = N_0 E_s \end{aligned}$$

这样, 偏移系数 d^2 为

$$d^2 = \frac{[E(l | H_1) - E(l | H_0)]^2}{\text{Var}(l | H_0)} = 4E_s/N_0$$

错误判决概率为

$$P(D_1 | H_0) = Q[d/2] = Q[\sqrt{E_s/N_0}]$$

$$P(D_0 | H_1) = 1 - P(D_1 | H_1) = 1 - Q[-d/2] = Q[d/2] = Q[\sqrt{E_s/N_0}]$$

于是, 平均错误概率 P_e 为

$$P_e = P(H_0)P(D_1 | H_0) + P(H_1)P(D_0 | H_1) = Q[\sqrt{E_s/N_0}]$$

习 题 四

4.1 在二元数字通信系统中, 两个假设下的观测信号分别为

$$H_1: x_k = 1 + n_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$H_0: x_k = n_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

式中, 观测噪声 n_k 是均值为零、方差 $\sigma_n^2 = 1$ 的高斯噪声, 各次观测统计独立, 且观测是顺序进行的。试确定在 $P_{fa} = P(D_1 | H_0) = \alpha = 0.1$ 和 $P_m = P(D_0 | H_1) = \beta = 0.1$ 时的判决规则, 并计算在每个假设下, 观测次数 n 的期望值。

解: 若进行到第 n 次观测, 则似然函数为

$$\Lambda(x_n) = \frac{p(x_n | H_1)}{p(x_n | H_0)} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - 1)^2}{2}\right]}{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2}\right]} = \exp\left[\sum_{k=1}^n x_k - \frac{n}{2}\right]$$

对数似然比函数为

$$\ln \Lambda(x_n) = \sum_{k=1}^n x_k - \frac{n}{2}$$

两个检测门限分别为

$$\ln \Lambda_1 = \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) = \ln 9 = 2.197$$

$$\ln \Lambda_0 = \ln\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) = \ln \frac{1}{9} = -2.197$$

因此, 似然比判决规则为:

若 $\sum_{k=1}^n x_k - \frac{n}{2} \geq 2.197$, 则判 H_1 成立;

若 $\sum_{k=1}^n x_k - \frac{n}{2} \leq -2.197$, 则判 H_0 成立;

若 $-2.197 < \sum_{k=1}^n x_k - \frac{n}{2} < 2.197$, 则增加一次观测再进行检验。

在假设 H_1 下和假设 H_0 下, 观测次数 n 的平均值分别为

$$E(n | H_1) = \frac{(1-\beta)\ln\Lambda_1 + \beta\ln\Lambda_0}{E[\ln\Lambda(x | H_1)]}$$

$$E(n | H_0) = \frac{\alpha\ln\Lambda_1 + (1-\alpha)\ln\Lambda_0}{E[\ln\Lambda(x | H_0)]}$$

式中

$$E[\ln\Lambda(x) | H_1] = E\left[\left(x - \frac{1}{2}\right) \middle| H_1\right] = E\left[\left(1 + n\right) - \frac{1}{2}\right] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E[\ln\Lambda(x) | H_0] = E\left[\left(x - \frac{1}{2}\right) \middle| H_0\right] = E\left[n - \frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{2}$$

式中, n 是任一次的观测噪声。这样, 有

$$E(n | H_1) = 3.515, \quad E(n | H_0) = 3.515$$

即要达到 $P(D_1 | H_0) = \alpha = 0.1$ 和 $P(D_0 | H_1) = \beta = 0.1$ 的性能指标, 平均需要 4 次观测。

如果计算得到的 $E(n | H_1)$ 与 $E(n | H_0)$ 不相等, 则平均需要的观测次数以二者中的大者。

4.2 在信号的序列检测中, 若两个假设下的观测信号分别为

$$H_0: x_k = s_{0k}, \quad H_1: x_k = s_{1k} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

式中, s_{0k} 和 s_{1k} 是均值为值、方差分别为 σ_0^2 和 σ_1^2 相互统计独立的高斯随机信号, 且 $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ 。设 $P_{\text{fa}} = P(D_1 | H_0) = 0.2$, $P_{\text{m}} = P(D_0 | H_1) = 0.1$, 若已知 $\sigma_0^2 = 1$, $\sigma_1^2 = 4$, $P(H_0) = 1/2$, 试求结束试验所需的平均观测次数。

解: 如果进行了 n 次观测, 则似然比函数为

$$\Lambda(x) = \frac{p(x | H_1)}{p(x | H_0)} = \frac{\left(\frac{1}{8\pi}\right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{8}\right]}{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2}\right]} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n/2} \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{3}{8} x_k^2\right)$$

对数似然函数为

$$\ln\Lambda(x) = \frac{n}{2} \ln \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \sum_{k=1}^n x_k^2$$

现设 $\alpha = P(D_1 | H_0) = 0.2$, $\beta = P(D_0 | H_1) = 0.1$, 则两个检测门限的自然对数分别为

$$\ln\Lambda_1 = \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) = \ln\left(\frac{1-0.1}{0.2}\right) = 1.5041$$

$$\ln\Lambda_0 = \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) = \ln\left(\frac{0.1}{1-0.2}\right) = -2.0794$$

于是, 判决规则为:

当 $\frac{n}{2} \ln \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 1.5041$ 时, 判决假设 H_1 成立;

当 $\frac{n}{2} \ln \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \sum_{k=1}^n x_k^2 \leq -2.0794$ 时, 判决假设 H_0 成立;

当 $-2.0794 < \frac{n}{2} \ln \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \sum_{k=1}^n x_k^2 < 1.5041$ 时, 需要进行下一次观测后再进行检验。

在假设 H_1 下和假设 H_0 下, 观测次数 N 的平均值分别为

$$E(n | H_1) = \frac{(1-\beta)\ln\Lambda_1 + \beta\ln\Lambda_0}{E[\ln\Lambda(x_k) | H_1]}$$

和

$$E(n|H_0) = \frac{\alpha \ln \Lambda_1 + (1-\alpha) \ln \Lambda_0}{E[\ln \Lambda(x_k)|H_0]}$$

其中

$$E[\ln \Lambda(x_k)|H_1] = E\left[\frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} + \frac{3}{8}(x_k^2|H_1)\right] = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\sigma_1^2 = 0.8069$$

$$E[\ln \Lambda(x_k)|H_0] = E\left[\frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} + \frac{3}{8}(x_k^2|H_0)\right] = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\sigma_0^2 = -0.3182$$

这样

$$E(n|H_1) = \frac{(1-0.1)\ln \Lambda_1 + 0.1\ln \Lambda_0}{0.8069} = 1.4199$$

$$E(n|H_0) = \frac{0.2\ln \Lambda_1 + (1-0.2)\ln \Lambda_0}{-0.3182} = 4.2825$$

因为 $P(H_0)=1/2$, 所以 $P(H_1)=1/2$ 。于是, 结束检验的平均观测次数为

$$E(n) = P(H_0)E(n|H_0) + P(H_1)E(n|H_1) = 2.8512$$

取整数为 $E(n)=3$ 。

习 题 五

5.1 非参量型广义符号检测中, 秩值 R_j 为

$$R_j = \sum_{i=1}^n u(x_j - x_{ij})$$

式中

$$u(x_j - x_{ij}) = \begin{cases} 1, & x_j > x_{ij} \text{ 或 } x_j = x_{ij} (i-j \text{ 为奇数}) \\ 0, & x_j < x_{ij} \text{ 或 } x_j = x_{ij} (i-j \text{ 为偶数}) \end{cases}$$

它是一个检验统计量。当参考单元样本数 n 很大时, 根据中心极限定理, 该检验统计量将趋于高斯分布。证明在假设 H_0 下, 当 n 很大时, 此检验统计量的均值方差分别为

$$E(R_j) = n/2 \quad \text{和} \quad \text{Var}(R_j) = n/4$$

证明: 首先求 $u(x_j - x_{ij})=1$ 的平均概率 $P(u=1)$ 。统计量 $u(x_j - x_{ij})$ 是属于 $(0,1)$ 分布的离散随机变量。所以

$$\begin{aligned} P(u=1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p(x_j | H_0) dx_j \right] p(x_{ij} | H_0) dx_{ij} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \int_{-\infty}^{x_{ij}} p(x_j | H_0) dx_j \right] p(x_{ij} | H_0) dx_{ij} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F(x_{ij} | H_0)] p(x_{ij} | H_0) dx_{ij} \end{aligned}$$

因为

$$p(x_{ij} | H_0) dx_{ij} = dF(x_{ij} | H_0)$$

当 $x_{ij} = -\infty$ 时, $F(x_{ij} | H_0) = 0$, 当 $x_{ij} = +\infty$ 时, $F(x_{ij} | H_0) = 1$ 。所以

$$\begin{aligned} P(u=1) &= \int_0^1 [1 - F(x_{ij} | H_0)] dF(x_{ij} | H_0) \\ &= \left[F(x_{ij} | H_0) - \frac{1}{2} F^2(x_{ij} | H_0) \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \triangleq p \end{aligned}$$

而

$$P(u=0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \triangleq q$$

然后利用离散型随机变量求均值的公式, 得统计量 $u(x_j - x_{ij})$ 的均值为

$$E(u) = 1 \times p + 0 \times q = 1/2$$

进而得检验统计量 R_j 的均值为

$$E(R_j) = \sum_{i=1}^n E(u) = n/2$$

最后利用离散型随机变量求方差的公式, 得

$$\text{Var}(u) = pq = 1/4$$

设各单元的统计量 $u(x_j - x_{ij})$ 是相互统计独立的, 则检验统计量 R_j 的方差为

$$\text{Var}(R_j) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(u) = n/4$$

5.2 在非参量型马恩-怀特奈检测中, 秩值 R_j 为

$$u(x_j - x_{ij}) = \begin{cases} 1, & x_j > x_{ij} \text{ 或 } x_j = x_{jk} (i-k \text{ 为奇数}) \\ 0, & x_j < x_{ik} \text{ 或 } x_j = x_{ik} (i-j \text{ 为奇数}) \end{cases}$$

在检测单元和所有参考单元仅出现干扰信号(假设 H_0 情况), 且所有采样单元具有独立和相同的分布, 求概率

$$P(R=l | H_0) \quad \text{和} \quad P(R \geq l | H_0)$$

式中, R 即 R_j , $0 \leq l \leq mn$ 。

解: 非参量型马恩-怀特奈检测中, 检验统计量即秩值 R_j 是检测单元样本 x_j 与相邻 m 个周期、每个周期相邻 n 个单元, 共 mn 个参考单元样本 x_{ik} 比较大小的获得的。

在检测单元和所有 mn 个参考单元仅出现干扰信号, 且各单元样本具有独立和相同分布时, 秩值 R_j 取值恰好为 l_j ($j=0, 1, \dots, mn$) 的概率服从二项式分布, 即

$$P(R_j = l_j | H_0) = c_{mn}^l p^{l_j} q^{mn-l_j}$$

式中, p 表示 $u(x_j - x_{ik}) = 1$ 的概率, $q = 1 - p$ 表示 $u(x_j - x_{ik}) = 0$ 的概率, 这样

$$\begin{aligned} P(R_j = l_j | H_0) &= c_{mn}^l \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_j | H_0) \left[1 - \int_{x_j}^{+\infty} p(x_{ik} | H_0) dx_{ik} \right]^{l_j} \times \left[\int_{x_j}^{+\infty} p(x_{ik} | H_0) dx_{ik} \right]^{mn-l_j} dx_j \end{aligned}$$

由于二项式分布中的概率 p 和 q 是门限 x_j 的函数, 而门限 x_j 是随机变量, 所以式中还须对 x_j 的函数进行了统计平均。

省去 R_j 和 l_j 的下标, 则有

$$\begin{aligned} P(R = l | H_0) &= c_{mn}^l \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_j | H_0) \left[1 - \int_{x_j}^{+\infty} p(x_{ik} | H_0) dx_{ik} \right]^l \times \left[\int_{x_j}^{+\infty} p(x_{ik} | H_0) dx_{ik} \right]^{mn-l} \\ &= c_{mn}^l \int_{-\infty}^{+\infty} (1-q)^l q^{mn-l} p(x_j | H_0) dx_j \end{aligned}$$

式中

$$q = \int_{x_j}^{+\infty} p(x_{ik} | H_0) dx_{ik}$$

将 $(1-q)^l$ 按二项式公式展开, 得

$$(1-q)^l = \sum_{g=0}^l (-1)^g c_l^g q^g$$

代入 $P(R=l | H_0)$ 式, 得

$$P(R = l | H_0) = c_{mn}^l \sum_{g=0}^l (-1)^g c_l^g \int_{-\infty}^{+\infty} q^{mn-l+g} p(x_j | H_0) dx_j$$

因为

$$\begin{aligned} q &= \int_{x_j}^{+\infty} p(x_{ik} | H_0) dx_{ik} = 1 - \int_{-\infty}^{x_j} p(x_{ik} | H_0) dx_{ik} = 1 - F(x_j | H_0) \\ p(x_j | H_0) dx_j &= dF(x_j | H_0) \end{aligned}$$

式中, $F(x_j | H_0)$ 是检测单元样本 x_j 的分布函数, 当 $x_j = -\infty$ 时, $F(x_j | H_0) = 0$; 当 $x_j = +\infty$ 时, $F(x_j | H_0) = 1$ 。这样, $P(R=l | H_0)$ 式可以写成

$$\begin{aligned} P(R = l | H_0) &= c_{mn}^l \sum_{g=0}^l (-1)^g c_l^g \int_0^1 [1 - F(x_j | H_0)]^{mn-l+g} dF(x_j | H_0) \\ &= c_{mn}^l \sum_{g=0}^l (-1)^g c_l^g \frac{1}{mn-l+g+1} [1 - F(x_j | H_0)]^{mn-l+g+1} \Big|_1^0 \\ &= c_{mn}^l \sum_{g=0}^l (-1)^g c_l^g \frac{1}{mn-l+g+1} \end{aligned}$$

利用组合公式

$$\sum_{g=0}^l (-1)^g c_l^g \frac{1}{a+g} = \frac{l!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+l)}$$

并令

$$a = mn - l + 1$$

则得检验统计量 R 恰好等于 l 的概率为

$$\begin{aligned} P(R = l | H_0) &= \frac{mn!}{l!(mn-l)!} \frac{l!}{(mn-l+1)(mn-l+2)\cdots(mn)(mn+1)} \\ &= \frac{1}{mn+1}, l = 0, 1, \cdots, mn \end{aligned}$$

检验统计量 $R \geq 1$ 的概率为

$$P(R \geq l | H_0) = 1 - \sum_{h=0}^{l-1} P(R=h | H_0) = 1 - \frac{l}{mn+1} \quad (l=0, 1, \cdots, mn)$$

5.3 假定二元假设检验为

$$\begin{aligned} H_1: x_j &= m + n_i \\ H_0: x_i &= n_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (1)$$

$n_i, i=1, 2, \cdots, n$ 是均值为零, 均方差为 σ^2 的统计高斯噪声; m 是大于零的常数, 则可写成

$$\begin{aligned} H_0: p(x | H_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}\right] \\ H_1: p(x | H_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (2)$$

采用两种不同检测器 $D_2(x)$ 与 $D_1(x)$, 其中 $D_2(x)$ 是符号检测器, $D_1(x)$ 则是奈曼-皮尔逊检测器。两个检测器具有相同的 α 及 β , 即 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \beta_1 = \beta_2 = \beta$ 。求 $D_2(x)$ 对于 $D_1(x)$ 的渐近相对效率。

解: 若采用奈曼-皮尔逊检测器(用 $D_1(x)$ 表示), 其检验统计量为

$$l_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i \quad (3)$$

判决规则为 $l_1(x) \geq \Delta_1$, 判为 H_1 , 反之, 判为 H_0 。

Δ_1 由下式算出

$$P_{fa} = \alpha = \int_{\Delta_1}^{+\infty} p(l_1 | H_0) dl_1 \quad (4)$$

若采用符号检测器(用 $D_2(x)$ 表示), 其检测统计量为

$$l_2(x) = \sum_{i=1}^n u(x_i) \quad (5)$$

判决规则为 $D_2(X) \geq \Delta_2$, 判为 H_1 , 反之, 判为 H_0 。

Δ_2 由下式算出

$$P_{fa} = \alpha = \int_{\Delta_2}^{+\infty} p(l_2 | H_0) dl_2 \quad (6)$$

发现概率

$$P_d = 1 - \beta = \int_{\Delta_2}^{+\infty} p(l_2 | H_1) dl_2 \quad (7)$$

当 $D_1(x)$ 的观测样本为 n_1 时, 对于 $D_1(x)$ 可以得到以下关系。当 $D_1(x)$ 的观测样本为 n_1 时, 两个假设下 l_1 的概率密度函数可按以下分析得出:

$$\begin{aligned} H_0: l_1 &= \sum_{i=1}^{n_1} n_i, \text{ 因此, } l_1 \text{ 是均值为零, 均方差为 } n_1 \sigma^2 \text{ 的高斯随机变量, 而} \\ H_0: p(l_1 | H_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n_1 \sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{l_1}{\sqrt{n_1 \sigma^2}}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (8)$$

$H_1: l_1 = \sum_{i=1}^{n_1} (m + n_i)$, 因此, l_2 是均值为 $n_1 m$, 均方差为 $n_1 \sigma^2$ 的高斯随机变量, 而

$$H_1: p(l_1 | H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n_1 \sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{l_1 - n_1 m}{\sqrt{n_1 \sigma^2}}\right)^2\right] \quad (9)$$

$$\alpha_1 = \int_{\Lambda_1}^{+\infty} p(l_1 | H_0) dl_1 = \int_{\Lambda_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n_1 \sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{l_1}{\sqrt{n_1 \sigma^2}}\right)^2\right] dl_1 = 1 - \Phi\left(\frac{\Lambda_1}{\sqrt{n_1} \sigma}\right) \quad (10)$$

式中, $\Phi(\cdot)$ 为概率积分函数。

$$\begin{aligned} P_{d_1} &= \int_{\Lambda_1}^{+\infty} p(l_1 | H_1) dl_1 = \int_{\Lambda_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n_1 \sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{l_1 - n_1 m}{\sqrt{n_1 \sigma^2}}\right)^2\right] dl_1 \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\Lambda_1 - n_1 m}{\sqrt{n_1} \sigma}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\beta_1 = 1 - P_{d_1} = \Phi\left(\frac{\Lambda_1 - n_1 m}{\sqrt{n_1} \sigma}\right) \quad (12)$$

由式(10), 可以解出 Λ_1 为

$$\Lambda_1 = \sqrt{n_1} \sigma \Phi^{-1}(1 - \alpha_1) \quad (13)$$

将式(13)代入式(12), 可得

$$\beta_1 = \Phi\left[\frac{\sqrt{n_1} \sigma \Phi^{-1}(1 - \alpha_1) - n_1 m}{\sqrt{n_1} \sigma}\right] = \Phi\left[\Phi^{-1}(1 - \alpha_1) - \frac{\sqrt{n_1} m}{\sigma}\right] \quad (14)$$

类似地, 可得到检测器 $D_2(x)$ 的以下关系。

若检测器 $D_2(x)$ 的观测样本数为 n_2 , 则

$$l_2(x) = \sum_{i=1}^{n_2} u(x_i) \quad (15)$$

在 H_0 假设下

$$H_0: p(l_2 = k | H_0) = \binom{n_2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n_2) \quad (16)$$

根据中心极限定理, 当 n_2 很大时, $p(l_2 = k | H_0)$ 趋近于均值为 $n_2/2$, 均方差为 $n_2/4$ 的高斯分布, 因此

$$\alpha_2 \approx \int_{\Lambda_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n_2/4}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{l_2 - n_2/2}{\sqrt{n_2/4}}\right)^2\right] dl_2 = 1 - \Phi\left(\frac{2\Lambda_2 - n_2}{\sqrt{n_2}}\right) \quad (17)$$

在 H_1 假设下

$$H_1: p(l_2 = k | H_1) = \binom{n_2}{k} p_H^k (1 - p_H)^{n_2 - k} \quad (18)$$

根据中心极限定理, 当 n_2 较大时, $p(l_2 = k | H_1)$ 趋近于均值为 $n_2 p_H$, 均方差为 $n_2 p_H (1 - p_H)$ 的高斯分布, 因此

$$\begin{aligned} P_{d_2} &= 1 - \beta_2 = \int_{\Lambda_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n_2 p_H (1 - p_H)}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{l_2 - n_2 p_H}{\sqrt{n_2 p_H (1 - p_H)}}\right)^2\right] dl_2 \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\Lambda_2 - n_2 p_H}{\sqrt{n_2 p_H (1 - p_H)}}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

因此

$$\beta_2 = \Phi\left(\frac{\Lambda_2 - n_2 p_H}{\sqrt{n_2 p_H (1 - p_H)}}\right) \quad (20)$$

由式(17)可解得门限 Λ_2 为

$$\Lambda_2 \approx \frac{\sqrt{n_2}}{2} [\Phi^{-1}(1 - \alpha_2) + \sqrt{n_2}] \quad (21)$$

将式(21)代入式(20)可得

$$\beta_2 = \Phi \left[\frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha_2) - \sqrt{n_2}(2p_H - 1)}{2\sqrt{p_H(1 - p_H)}} \right] \quad (22)$$

由给出的参数 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \beta_1 = \beta_2 = \beta$, 则由式(14)和式(22), 得

$$\Phi \left[\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \frac{\sqrt{n_1}m}{\sigma} \right] = \Phi \left[\frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \sqrt{n_2}(2p_H - 1)}{2\sqrt{p_H(1 - p_H)}} \right] \quad (23)$$

由式(23)可推得

$$\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \frac{\sqrt{n_1}m}{\sigma} = \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \sqrt{n_2}(2p_H - 1)}{2\sqrt{p_H(1 - p_H)}} \quad (24)$$

整理后, 得

$$\begin{aligned} & \Phi^{-1}(1 - \alpha) \cdot 2\sqrt{p_H(1 - p_H)} - \frac{\sqrt{n_1}m}{\sigma} \cdot 2\sqrt{p_H(1 - p_H)} \\ &= \Phi^{-1}(1 - \alpha) - \sqrt{n_2}(2p_H - 1) \end{aligned} \quad (25)$$

由上式, 可得

$$\frac{n_1}{n_2} = \left[\frac{\sigma}{m} \frac{1}{\sqrt{n_2}} \Phi^{-1}(1 - \alpha) - \frac{\sigma}{m} \frac{1}{\sqrt{n_2}} \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha)}{2\sqrt{p_H(1 - p_H)}} + \frac{\sigma}{m} \frac{2p_H - 1}{2\sqrt{p_H(1 - p_H)}} \right] \quad (26)$$

$D_2(x)$ 对于 $D_1(x)$ 的渐近相对效率为

$$\begin{aligned} A_{21} &= \lim_{\substack{H_1 \rightarrow H_0 \\ n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} = \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \left[\frac{\sigma}{m} \frac{1}{\sqrt{n_2}} \Phi^{-1}(1 - \alpha) - \frac{\sigma}{m} \frac{1}{\sqrt{n_2}} \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha)}{2\sqrt{p_H(1 - p_H)}} + \frac{\sigma}{m} \frac{2p_H - 1}{2\sqrt{p_H(1 - p_H)}} \right]^2 \\ &= \frac{\sigma^2(2p_H - 1)^2}{4m^2 p_H(1 - p_H)} \end{aligned} \quad (27)$$

对式(27)可做进一步的近似。

$$p_H = P(x > 0 | H_1) = 1 - \int_{-\infty}^0 p(x | H_1) dx = 1 - \int_{-\infty}^0 p(x - m | H_0) dx$$

令 $\alpha = x - m$, 则由假定

$$p_H = 1 - \int_{-\infty}^{-m} f(u | H_0) du$$

利用 $p(\alpha | H_0)$ 的对称性, (以下用 $p(\alpha)$ 代表 $p(\alpha | H_0)$)

$$\begin{aligned} p_H &= 1 - \int_m^{+\infty} p(\alpha) d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^m p(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^0 p(\alpha) d\alpha + \int_0^m p(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} + \int_0^m p(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

因为 $H_1 \rightarrow H_0$, 所以 m 值很小, 于是

$$p_H = 1/2 + mp(0) \quad (28)$$

将式(28)代入式(27), 可得

$$\begin{aligned} A_{2,1} &\approx \frac{\left\{ 2 \left[\frac{1}{2} + mp(0) \right] - 1 \right\}^2}{\left[\frac{1}{2} + mp(0) \right] \left[\frac{1}{2} - mp(0) \right]} \cdot \frac{\sigma^2}{4m^2} = \frac{\sigma^2}{m^2} \frac{\left[\frac{1}{2} + mp(0) - \frac{1}{2} \right]^2}{-\frac{1}{4} - m^2 p^2(0)} \\ &= \frac{4\sigma^2 p^2(0)}{1 - 4m^2 p^2(0)} \approx 4\sigma^2 p^2(0) \end{aligned} \quad (29)$$

基于上述推导, 对于式(2)的两种假设, 可利用式(29), 可得

$$A_{2,1} \approx 4\sigma^2 p^2(0) \quad \text{现在, } p(0) = 1/\sqrt{2\pi}\sigma, \quad A_{2,1} \approx 2/\pi = 0.6366$$

以上结果表明, 当观测样本为高斯分布时, 奈曼-皮尔逊检测器的性能优于符号检测器。此结果应在情理之中, 它与参量检测器 D_1 的假设前提完全一致, 另一方面, 由于当虚警概率给定时, 对于固定的观测样本来说, 奈曼-皮尔逊检测器的发现概率是最大的。因此, 对于固定的观测样本来说, 符号检测器的发现概率不可

能大于奈曼-皮尔逊检测器的发现概率。倒过来,若要求两种检测器具有相同的虚警概率与发现概率,奈曼-皮尔逊检测器所需观测样本数将小于符号检测器所需的观测样本数。

5.4 二元假设

$$\begin{aligned} H_1: x_i &= \theta + n_i \\ H_0: x_i &= n_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

式中, n_i 是均值为 0, 均方差为 σ_n^2 的高斯白噪声, 且 $p(x_i) = p(-x_i)$ 。

解: (1) 首先, 计算奈曼-皮尔逊检测器的效验。

已知, 对于奈曼-皮尔逊检测器的检验统计量 $l_{1n_1} = \sum_{i=1}^{n_1} x_i$, 对于奈曼-皮尔逊检测器, 令 $n = n_1$ 。在 H_1, H_0 两种假设下都是高斯随机变量的情况下:

$$\begin{aligned} H_1: E[l_{1n_1} | H_1, \theta] &= n_1 \theta \\ \sigma^2[l_{1n_1} | H_1, \theta] |_{\theta=0} &= n_1 \sigma_n^2 = \sigma^2[l_{1n_1} | H_0] \end{aligned}$$

显见, 以上分析对 $\theta \in [0, a]$ 都可成立。而

$$\sigma^2[l_{1n_1} | H_1, \theta] |_{\theta=0} = n_1 \sigma_n^2 = \sigma^2[l_{1n_1} | H_0]$$

计算

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{n_1} \frac{\left[\frac{d}{d\theta} E[l_{1n_1}(x) | H_1, \theta] |_{\theta=0} \right]^2}{\sigma_n^2 [l_{1n_1}(x) | H_0]} = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{n_1} \frac{\left[\frac{d}{d\theta} (n_1 \theta) \Big|_{\theta=0} \right]^2}{n_1 \sigma_n^2} = 1 / \sigma_n^2$$

可见, 奈曼-皮尔逊检测器的效验为

$$\epsilon_1 = 1 / \sigma_n^2 \quad (2)$$

(2) 现在计算秩检测器的效验。已知秩检测器的检验统计量 $l_{2n_2} = \sum_{i=1}^{n_2} R_i u(x_i)$, 式中, 已令假设中的 $n = n_2$ 。

根据中心极限定理可推知, 在两种假设下 l_{2n_2} 都是高斯随机变量。因此 $(l_{2n_2} | H_1, \theta), \theta \in [0, a]$ 是高斯随机变量, 而 $(l_{2n_2} | H_0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} (l_{2n_2} | H_1, \theta)$, 经计算可得 $E[l_{2n_2} | H_0] = n_2(n_2 + 1)/4$, $\sigma^2(l_{2n_2} | H_0) = n_2(n_2 + 1)(2n_2 + 1)/24$ 。以上计算请读者自己完成。

为了计算秩检测器的效验, 需要计算 $E(l_{2n_2} | H_1, \theta)$

首先, 定义

$$V_{ij} = \begin{cases} 1 & x_i > 0, x_i > |x_j| \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

对于某个 $i, i \in [1, n_2]$, 若 $x_i > 0$, 则 $\sum_{j=1}^{n_2} V_{ij}$ = 第 i 个观测样本在 $|x_i|, i = 1, \dots, n_2$ 中的排序序号, (以上认为, $P(|x_i| = |x_j|) = 0 \quad i \neq j$)

若 $x_i < 0$, 则 $\sum_{j=1}^{n_2} V_{ij} = 0$, 因此 $\sum_{j=1}^{n_2} V_{ij} = R_i u(x_i)$ 。

$$\text{于是, } l_{2n_2} = \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} V_{ij} = \sum_{i=1}^{n_2} R_i u(x_i), \quad E(l_{2n_2} | H_1, \theta) = \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} E[V_{ij} | H_1, \theta] \quad (4)$$

$$\text{式中} \quad E(V_{ij} | H_1, \theta) = 1 \cdot P[(x_i > |x_j|) | H_1, \theta] + 0 \cdot P[(x_i < |x_j|) | H_1, \theta] \quad (5)$$

$P[(x_i > |x_j|) | H_1, \theta]$ 相当于 $P[(x_i > x_j) > 0 | H_1, \theta]$, 这一点可做如下说明:

x_j 的取值范围是 $x_j \in (-\infty, +\infty)$, 当 $x_j \in (0, +\infty)$ 时, 为了实现 $V_{ij} = 1$, 显见 $x_i - x_j > 0$, 这时 $x_i > x_j$; 当 $x_j \in (-\infty, 0]$, 由于 $V_{ij} = 1, x_i > |x_j|$, 因此 $x_i - x_j = x_i - (-A) = x_i + A > 0$, 而 $0 \leq A \leq x_i$ 。综合以上分析, $[(x_i > |x_j|) | H_1, \theta]$ 的概率被认为相当于 $[(x_i - x_j > 0) | H_1, \theta]$ 的概率。

因此

$$P[(x_i - x_j > 0) | H_1, \theta] = P(x > 0 | H_1, \theta) = 1 - P(x \leq 0 | H_1, \theta) \quad (6)$$

式中, $u = x_i - x_j$; 因此

$$f(u | H_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\overline{u+x_j} | H_1) p(x_j | H_1) dx_j \quad (7)$$

为了后续表述的简洁起见, 令

$$p_1(u) = p(u | H_1), p(\overline{u+x_j} | H_1) = p_1(u+x_j), \quad p(x_j | H_1) = p_1(x_j)$$

因此

$$\begin{aligned} P[(x_i - x_j > 0) | H_1, \theta] &= 1 - \int_{-\infty}^0 p_1(u) du = 1 - \int_{(u)} \int_{(x_j)} p_1(u+x_j) p_1(x_j) dx_j du \\ &= 1 - \int_{(x_j)} F_1(x_j) p_1(x_j) dx_j \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $F_1(\cdot) = \int_{-\infty}^{\cdot} p_1(u') du'$; 根据假设, $p_1(x_j) = p_0(x_j - \theta) = p(x_j - \theta | H_0)$, 因此

$$E[V_{ij} | H_1, \theta] = P[(x_i - x_j \geq 0) | H_1, \theta] = 1 - \int_{(x_j)} F_1(x_j) p_1(x_j) dx_j$$

令 $x_j - \theta = x'_j$, 则

$$E(V_{ij} | H_1, \theta) = 1 - \int_{(x'_j)} F_1(x'_j + \theta) p_0(x'_j) dx'_j \quad (9)$$

对于 $i, j \left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right) = 1, 2, \dots, n$ 有相同的 $E(V_{ij} | H_1, \theta) = 1 - \int_{(x)} F_1(x + \theta) p_0(x) dx$ 。因此, 由式(5) 可得

$$E(l_{2n_2} | H_1, \theta) = \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \left[1 - \int_{(x)} F_1(x + \theta) p_0(x) dx \right] = (n_2)^2 \left[1 - \int_{(x)} F_1(x + \theta) p_0(x) dx \right] \quad (10)$$

为了计算秩检测器的效验, 需计算

$$\frac{d}{d\theta} E(l_{2n_2} | H_1, \theta) = (n_2)^2 \left[- \int_{(x)} p_1(x + \theta) p_0(x) dx \right]$$

由上式, 可得

$$\left. \frac{d}{d\theta} E(l_{2n_2} | H_1, \theta) \right|_{\theta=0} = (n_2)^2 \left[- \int p_0(x) p_0(x) dx \right] = (n_2)^2 \left[- \int p_0^2(x) dx \right] \quad (11)$$

相应地, 秩检测器的效验

$$\begin{aligned} \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{n_2} \frac{\left[\left. \frac{d}{d\theta} E(l_{2n_2} | H_1, \theta) \right|_{\theta=0} \right]^2}{\sigma^2(l_{2n_2} | H_0)} \\ = \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{n_2} \frac{n_2^4 \left[\int p_0^2(x) dx \right]^2}{n_2(n_2+1)(2n_2+1)/24} = 12 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p_0^2(x) dx \right]^2 \end{aligned} \quad (12)$$

秩检测器对于奈曼-皮尔逊检测器的渐近相对效率为

$$A_{2,1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{12 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p_0^2(x) dx \right]^2}{1/\sigma_n^2} = 12\sigma_n^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p_0^2(x) dx \right]^2 \quad (13)$$

基于上述推导, 对于式(1)所列的假设, 由于

$$\begin{aligned} p_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} p_0^2(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_n^2}\right) dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_n} \end{aligned}$$

由式(13)可得

$$A_{21} = 12\sigma_n^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_n} \right)^2 = \frac{3}{\pi} = 0.955$$

将上述结果与 5.3 的结果做比较, 显见, 秩检测器的性能优于符号检测器。

习 题 六

6.1 研究均值为零、方差为 σ_n^2 的加性高斯噪声背景中接收标量常值信号的二元信号检测问题,但要考虑污染密度函数 $h_j(x)$ ($j=0,1$)。于是设假设 H_0 和假设 H_1 下,信号的 ϵ 混合模型分别为式(6.3a)和式(6.3b),其中,标称的概率密度函数是已知的,且为

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

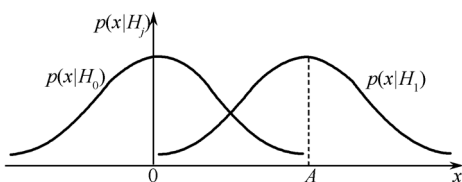
和

$$p(x|H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

这里约定 $A>0$ (常数)。试设计该二元信号的稳健性检测器。

解:据题意,最小有利分布对 q_j^* ($j=0,1$) 对应的概率密度函数为

$$q^*(x|H_0) = \begin{cases} (1-\epsilon_0)p(x|H_0), & \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} < c'' \\ c_0^{-1}(1-\epsilon_0)p(x|H_1), & \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \geq c'' \end{cases}$$



$$\text{和 } q^*(x|H_1) = \begin{cases} (1-\epsilon_1)p(x|H_1), & \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} > c'' \\ c_1(1-\epsilon_1)p(x|H_0), & \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \leq c'' \end{cases}$$

其中, $0 \leq c' < c'' < \infty$ 。 $q^*(x|H_j)$ ($j=0,1$) 的大致形状如图 6.7 所示。

令 $b = (1-\epsilon_1)/(1-\epsilon_0)$, 则似然比函数为

$$\Lambda^*(x) = \frac{q^*(x|H_1)}{q^*(x|H_0)} = \begin{cases} bc', & \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \leq c' \\ b \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}, & c' < \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} < c'' \\ bc'', & \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \geq c'' \end{cases}$$

图 6.7 最小有利密度函数图形

因为

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \exp\left(\frac{A}{\sigma_n^2}x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

取自然对数,得

$$\ln \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \frac{A}{\sigma_n^2}x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2}$$

于是,对数似然比函数为

$$\ln \Lambda^*(x) = \ln \frac{q^*(x|H_1)}{q^*(x|H_0)} = \begin{cases} \ln b + \ln c', & x \leq \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c' + \frac{A}{2} \\ \ln b + \frac{A}{\sigma_n^2}x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2}, & \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c' + \frac{A}{2} < x < \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c'' + \frac{A}{2} \\ \ln b + \ln c'', & x \geq \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c'' + \frac{A}{2} \end{cases}$$

这样,由对数似然比函数表示的检验统计量,可以化简为如下的等效检验统计量 $\gamma(x)$ (见图 6-8)为

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c' + \frac{A}{2}, & x \leq x_1 \\ x, & x_1 < x < x_0 \\ \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c'' + \frac{A}{2}, & x \geq x_0 \end{cases}$$

式中,

$$x_1 = \frac{\sigma_n^4}{A^2} \ln c' - \frac{\sigma_n^2}{A} \ln b + \frac{A + \sigma_n^2}{2}$$

$$x_0 = \frac{\sigma_n^4}{A^2} \ln c'' - \frac{\sigma_n^2}{A} \ln b + \frac{A + \sigma_n^2}{2}$$

6.2 在 6.1 题中, ϵ 混合模型二元信号检测中, 对数似然比检验为

$$\ln \Lambda^*(x) = \begin{cases} \ln b + \ln c', & x \leq \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c' + \frac{A}{2} \\ \ln b + \frac{A}{\sigma_n^2} x - \frac{A^2}{2\sigma_n^2}, & \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c' + \frac{A}{2} < x < \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c'' + \frac{A}{2} \\ \ln b + \ln c'', & x \geq \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c'' + \frac{A}{2} \end{cases}$$

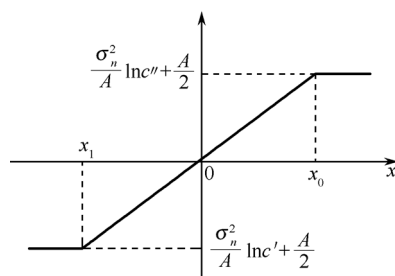


图 6.8 等效似然比检测器

证明其等效检验统计量 $\gamma(x)$ 为

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c' + \frac{A}{2}, & x \leq x_0 \\ x, & x_0 < x < x_1 \\ \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c'' + \frac{A}{2}, & x \geq x_1 \end{cases}$$

式中

$$x_0 = \frac{\sigma_n^4}{A^2} \ln c' - \frac{\sigma_n^2}{A} \ln b + \frac{A + \sigma_n^2}{2}, \quad x_1 = \frac{\sigma_n^4}{A^2} \ln c'' - \frac{\sigma_n^2}{A} \ln b + \frac{A + \sigma_n^2}{2}$$

而

$$b = \frac{1 - \epsilon_1}{1 - \epsilon_0}$$

证明: 先把对数似然比检验中的中间一项化简为 x , 即把 $\ln b - \frac{A^2}{2\sigma_n^2}$ 移到该条件的条件式中, 再乘以 σ_n^2/A ; 再

把上、下两项做同样变换, 得

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c' + \frac{A}{2}, & x \leq \left(\frac{\sigma_n^2}{A} \ln c' + \frac{A}{2} + \frac{A^2}{2\sigma_n^2} - \ln b \right) \frac{\sigma_n^2}{A} \\ x, & \left(\frac{\sigma_n^2}{A} \ln c' + \frac{A}{2} + \frac{A^2}{2\sigma_n^2} - \ln b \right) \frac{\sigma_n^2}{A} < x < \left(\frac{\sigma_n^2}{A} \ln c'' + \frac{A}{2} + \frac{A^2}{2\sigma_n^2} - \ln b \right) \frac{\sigma_n^2}{A} \\ \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c'' + \frac{A}{2}, & x \geq \left(\frac{\sigma_n^2}{A} \ln c'' + \frac{A}{2} + \frac{A^2}{2\sigma_n^2} - \ln b \right) \frac{\sigma_n^2}{A} \end{cases}$$

将上式进行整理, 得

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c' + \frac{A}{2}, & x \leq x_0 \\ x, & x_0 < x < x_1 \\ \frac{\sigma_n^2}{A} \ln c'' + \frac{A}{2}, & x \geq x_1 \end{cases}$$

式中

$$x_0 = \frac{\sigma_n^4}{A^2} \ln c' - \frac{\sigma_n^2}{A} \ln b + \frac{A + \sigma_n^2}{2}, \quad x_1 = \frac{\sigma_n^4}{A^2} \ln c'' - \frac{\sigma_n^2}{A} \ln b + \frac{A + \sigma_n^2}{2}$$

而

$$b = 1 - \epsilon_1 / 1 - \epsilon_0$$

习 题 七

7.1 平稳瑞利杂波环境中, 采用对数单元平均恒虚警率处理, 归一化输出 u 的概率密度函数为

$$p(u | H_0) = \frac{2}{a} \exp\left(\frac{2}{a}u - \gamma\right) \exp\left[-\exp\left(\frac{2}{a}u - \gamma\right)\right]$$

其中, γ 为欧拉常数; a 是对数接收机的常参数。若检测门限为 u_T , 求虚警概率 P_{fa} 的表示式。

解: 虚警概率 P_{fa} 为

$$\begin{aligned}
 P_{fa} &= \int_{u_T}^{+\infty} p(u | H_0) du = \int_{u_T}^{+\infty} \frac{2}{a} \exp\left(\frac{2}{a}u - \gamma\right) \exp\left[-\exp\left(\frac{2}{a}u - \gamma\right)\right] du \\
 &= \int_{u_T}^{+\infty} \exp\left[-\exp\left(\frac{2}{a}u - \gamma\right)\right] d\left[\exp\left(\frac{2}{a}u - \gamma\right)\right] \\
 &= \exp\left[-\exp\left(\frac{2}{a}u_T - \gamma\right)\right]
 \end{aligned}$$

式中, γ 是欧拉常数, 近似值为 $\gamma \approx 0.577216$ 。可见, 检测门限 u_T 确定后, 它具有恒虚警率性能。

7.2 对瑞利杂波干扰, 现采用选大值对数单元平均恒虚警率处理, 设检测单元前后参考单元数各为 $N/2=4$ 。如果对数接收机输出的雷达目标信号是如题 7.36 图(a)所示的理想波形, 目标信号宽度所占距离单元数为 13。请分别画出检测单元两侧不加保护单元、各加一个、两个或四个保护单元时, 恒虚警率处理后的输出信号波形。

解: 当采用选大值对数单元平均恒虚警率处理, 前后参考单元数各为 $n/2=4$ 时, 检测单元两侧不加保护单元, 各加一个、两个或四个保护单元时, 恒虚警率处理后的输出信号波形分别如图 7.41 图(b)、(c)、(d)和(e)所示。

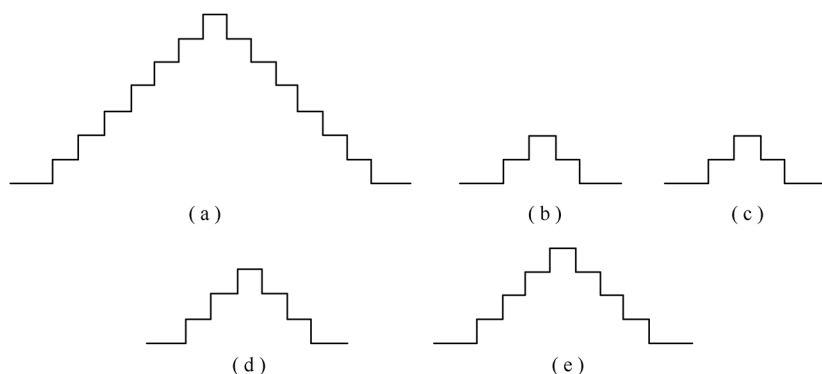


图 7.41 雷达目标信号的理想波形及恒虚警率处理后的波形

7.3 韦布尔分布杂波的概率密度函数为

$$p(x | H_0) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{v_x^n} \exp\left[-\left(\frac{x}{v_x}\right)^n\right], & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(1) 证明其恒虚警率处理原理框图如题 7.42 图所示。

(2) 若恒虚警率处理后的检测门限为 u_T , 求虚警概率 P_{fa} 的表示式。

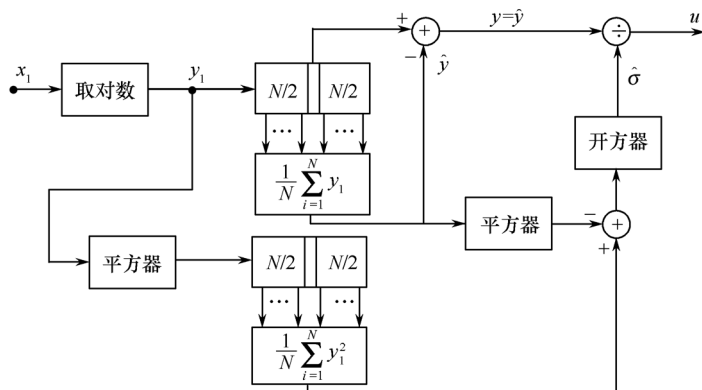


图 7.42 韦布尔分布杂波和对数-正态分布杂波恒虚警率处理原理框图

解:因为

$$y = \ln x, \quad -\infty < y < +\infty$$

反对数为

$$x = \exp(y), x \geq 0$$

$$|dx/dy| = \exp(y)$$

所以,由一维雅可比变换,得

$$p(y|H_0) = \frac{n}{v_x''} \exp(ny) \exp\left[-\frac{\exp(ny)}{v_x''}\right]$$

y 的均值为 $E(y|H_0)$, 则

$$E(y|H_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ny}{v_x''} \exp(ny) \exp\left[-\frac{\exp(ny)}{v_x''}\right] dy$$

令

$$v = \frac{\exp(ny)}{v_x''}$$

则

$$y = \frac{1}{n}(\ln v + \ln v_x''), \quad \frac{dy}{dv} = \frac{1}{nv}$$

当 $y = +\infty$ 时, $v = +\infty$; 当 $y = -\infty$ 时, $v = 0$ 。这样

$$\begin{aligned} E(y|H_0) &= \int_0^{+\infty} n \frac{1}{n} (\ln v + \ln v_x'') v \exp(-v) \frac{1}{nv} dv \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n} (\ln v + \ln v_x'') \exp(-v) dv \end{aligned}$$

利用定积分公式

$$\int_0^{+\infty} \ln v \exp(-cv) dv = -\frac{1}{c}(\gamma + \ln c)$$

得 y 的均值为

$$E(y|H_0) = -\frac{1}{n}(\gamma - \ln v_x'')$$

式中, γ 为欧拉常数, 近似值为 $\gamma \approx 0.577216$ 。

y 的均值为 $E(y^2|H_0)$, 即

$$E(y^2|H_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ny^2}{v_x''} \exp(ny) \exp\left[-\frac{\exp(ny)}{v_x''}\right] dy$$

也令

$$v = \frac{\exp(ny)}{v_x''}$$

则得

$$\begin{aligned} E(y^2|H_0) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^2} [\ln v + \ln v_x'']^2 \exp(-v) dv \\ &= \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} [\ln^2 v + 2 \ln v_x'' \ln v + \ln^2 v_x''] \exp(-v) dv \end{aligned}$$

利用定积分公式

$$\int_0^{+\infty} \ln v \exp(-cv) dv = -\frac{1}{c}(\gamma + \ln c)$$

和

$$\int_0^{+\infty} \ln^2 v \exp(-v) dv = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

得 y 的均方值为

$$\begin{aligned} E(y^2|H_0) &= \frac{1}{n^2} \left[\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} + 2 \ln v_x'' (-\gamma) + \ln^2 v_x'' \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \left[\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} - 2 \ln v_x'' \gamma + \ln^2 v_x'' \right] \end{aligned}$$

这样, y 的方差为

$$\text{Var}(y|H_0) = E(y^2|H_0) - [E(y|H_0)]^2 = \frac{1}{n^2} \frac{\pi^2}{6}$$

利用 y 的均值 $E(y|H_0)$ 和方差 $\text{Var}(y|H_0)$ 对 y 进行归一化处理, 即令

$$u = \frac{y - E(y|H_0)}{\sqrt{\text{Var}(y|H_0)}} = \frac{y + \frac{1}{n}(\gamma - \ln v_x^n)}{\frac{1}{n} \frac{\pi}{\sqrt{6}}}$$

则

$$y = \frac{1}{n} \frac{\pi}{\sqrt{6}} u - \frac{1}{n} (\gamma - \ln v_x^n), \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{n} \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

于是,得

$$\begin{aligned} p(u | H_0) &= \frac{n}{v_x^n} \exp \left[n \frac{1}{n} \frac{\pi}{\sqrt{6}} u - n \frac{1}{n} (\gamma - \ln v_x^n) \right] \cdot \\ &\quad \exp \left[- \frac{\exp \left[n \frac{1}{n} \frac{\pi}{\sqrt{6}} u - n \frac{1}{n} (\gamma - \ln v_x^n) \right]}{v_x^n} \right] \frac{1}{n} \frac{\pi}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{6} v_x^n} \exp \left[\frac{\pi}{\sqrt{6}} u - \gamma \right] \exp(\ln v_x^n) \cdot \exp \left[- \frac{\exp \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}} u - \gamma \right) \exp(\ln v_x^n)}{v_x^n} \right] \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{6} v_x^n} \exp \left[\frac{\pi}{\sqrt{6}} u - \gamma \right] \exp \left[- \exp \left[\frac{\pi}{\sqrt{6}} u - \gamma \right] \right] \end{aligned}$$

将归一化得到的变量 u , 加到门限为 u_T 的检测器上, 其虚警概率为

$$\begin{aligned} P_{fa} &= \int_{u_T}^{+\infty} p(u | H_0) du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{\sqrt{6}} \exp \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}} u - \gamma \right) \exp \left[- \exp \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}} u - \gamma \right) \right] du \\ &= \exp \left[- \exp \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}} u_T - \gamma \right) \right] \end{aligned}$$

式中, γ 为欧拉常数, 近似值为 $\gamma \approx 0.577216$ 。

上述分析表明, 对韦布尔分布杂波, 经对数变换, 归一化处理后, 其虚警概率 P_{fa} 与其参数 n 和 v_x 无关, 具有恒虚警率性能。题 7.37 图恰能实现这种对数变换和 $u = [y - E(y|H_0)] / \sqrt{\text{Var}(y|H_0)}$ 的归一化处理, 所以它是韦布尔分布杂波恒虚警率处理的原理框图。

7.4 韦布尔分布的概率密度函数为

$$p(x | H_0) = \begin{cases} \frac{n x^{n'-1}}{v_x^{n'}} \exp \left[- \left(\frac{x}{v_x} \right)^{n'} \right], & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

若将其输入到对平稳瑞利杂波具有恒虚警率性能的单元平均处理电路中, 证明其虚警概率 p_{fa} 的理论值(参考单元 $N \rightarrow \infty$) 为

$$P_{fa} = \exp \left\{ - \left[u_T \Gamma \left(1 + \frac{1}{n'} \right) \right]^n \right\}$$

式中, u_T 为检测门限, n' 为形状参数。

提示: 首先利用定积分公式

$$\int_0^{+\infty} x^p \exp(-x^q) dx = \frac{1}{q} \Gamma \left(\frac{1+p}{q} \right)$$

求出韦布尔分布杂波的均值 $E(x|H_0)$, 然后进行归一化处理, 即令 $u = x/E(x|H_0)$, 结果再与检测门限 u_T 比较。

解: 首先求韦布尔分布杂波的均值 $E(x|H_0)$, 为

$$\begin{aligned} E(x | H_0) &= \int_0^{+\infty} n' x^{n'} / v_x^{n'} \exp[-(x/v_x)^{n'}] dx \\ &= n' v_x \int_0^{+\infty} (x/v_x)^{n'} \exp[-(x/v_x)^{n'}] d(x/v_x) = v_x \Gamma[1 + (1/n')] \end{aligned}$$

对平稳瑞利杂波实现恒虚警率处理的单元平均处理电路,采用平均值归一化处理的方法,而理论上的统计平均值 $E(x|H_0)$ 就是参考单元 $n \rightarrow \infty$ 时的平均值估计。

用 $E(x|H_0)$ 对 x 进行归一化处理,令

$$u = \frac{x}{E(x|H_0)} = \frac{x}{v_x \Gamma[1+(1/n)]}$$

则

$$x = v_x \Gamma[1+(1/n)]u, \quad \frac{dx}{du} = v_x \Gamma[1+(1/n)]$$

这样,单元平均恒虚警率处理($n \rightarrow \infty$)中的输出信号 u 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} P(u|H_0) &= \frac{nv_x^{n-1}[\Gamma(1+(1/n))^{n-1}]}{v_x^n} u^{n-1} \exp\left\{-\left[\frac{v_x \Gamma[1+(1/n)]}{v_x} u\right]^n\right\} v_x \Gamma[1+(1/n)] \\ &= n\{\Gamma[1+(1/n)]\}^n u^{n-1} \exp\{-[\Gamma(1+(1/n))]^n u^n\} \end{aligned}$$

设单元平均恒虚警率处理后的信号检测门限为 u_{T0} , 则虚警概率 f_a 为

$$\begin{aligned} P_{fa} &= \int_0^{+\infty} p(u|H_0) du = \int_0^{+\infty} n[\Gamma(1+(1/n))]^n u^{n-1} \exp\{-[\Gamma(1+(1/n))]^n u^n\} du \\ &= [\Gamma(1+(1/n))]^n \int_{u_{T0}}^{+\infty} \exp\{-[\Gamma(1+(1/n))]^n u^n\} u^n = \exp\{-[u_{T0} \Gamma(1+(1/n))]^n\} \end{aligned}$$

可见,具有尺度参数 v_x 和形状参数 n 的韦布尔分布杂波,输入对平稳瑞利分布杂波具有恒虚警率性能的单元平均处理电路,其输出不具有恒虚警率性能,而与形状参数 n 有关。

习 题 八

8.1 考虑二元参量信号的广义似然比检验问题。若两个假设下观测信号分别为

$$\begin{aligned} H_0: x_k &= n_k \\ H_1: x_k &= m + n_k \end{aligned} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

式中,参量 m 是未知参量;噪声 $n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, 且 $n_k (k=1, 2, \dots, n)$ 之间相互统计独立。

若似然比检测门限 Λ_0 已知,求采用广义似然比检验的判决表示式(提示:未知参量 m 的最大似然估计量

$$\hat{m}_{ML}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k)。$$

解:两个假设下观测信号的概率密度函数分别为

$$p(x|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

和

$$p(x|m; H_1) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - m)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

式中,参量 m 是未知参量,其最大似然估计量为 $\hat{m}_{ML}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ 。

若采用广义似然比检验,则有

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \frac{p(x|m; H_1)}{p(x|H_0)} \bigg|_{m=\hat{m}_{ML}(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{\left(x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)^2}{2\sigma_n^2}\right]}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2\sigma_n^2}\right]} \\ &= \exp\left[\sum_{k=1}^n \frac{\frac{2}{n}x_k \sum_{k=1}^n x_k - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2}{2\sigma_n^2}\right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \Lambda_0 \end{aligned}$$

两边取自然对数,并化简得

$$\sum_{k=1}^n \frac{\frac{2}{n}x_k \sum_{k=1}^n x_k - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2}{2\sigma_n^2} = \frac{\frac{2}{n}\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2}{2\sigma_n^2} = \frac{2}{2\sigma_n^2 n} \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \Lambda_0$$

进而得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 2\sigma_n^2 \ln \Lambda_0 \triangleq \gamma^2 \quad \text{即} \quad \left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n x_k\right| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma$$

该判决式是双边检验。

8.2 设观测信号

$$x(t) = a \cos(\omega_2 t + \theta) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

式中, $n(t)$ 是均值为零、功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声; a 是已知的信号振幅; 随机相位 θ 在 $(-\pi, \pi)$ 上均匀分布; 频率 ω_2 是待估计量。如果对随机相位 θ 统计平均之后利用最大似然估计原理来估计频率 ω_2 ; 请问估计频率 ω_2 的接收机的结构是怎样的?

解: 根据题意可知, $x(t)$ 的似然函数为

$$\begin{aligned} p[x(t) | \omega_2, \theta] &= \text{Fexp} \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - a \cos(\omega_2 t + \theta)]^2 dt \right\} \\ &= \text{Fexp} \left\{ -\frac{a^2 T}{2N_0} - \frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt + \frac{2a}{N_0} \int_0^T x(t) \cos(\omega_2 t + \theta) dt \right\} \end{aligned}$$

上式推导中利用了 $\int_0^T \cos^2(\omega_2 t + \theta) dt = T/2$ 的积分结果。

将 $p[x(t) | \omega_2, \theta]$ 对随机相位 θ 求统计平均, 得

$$\begin{aligned} p[x(t) | \omega_2, \theta] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p[x(t) | \omega_2, \theta] d\theta \\ &= \text{Fexp} \left(-\frac{a^2 T}{2N_0} \right) \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right] \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[\frac{2a}{N_0} \int_0^T x(t) \cos(\omega_2 t + \theta) dt \right] d\theta \\ &= \text{Fexp} \left(-\frac{a^2 T}{2N_0} \right) \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right] I_0 \left(\frac{2a}{N_0} l \right), \quad l \geq 0 \end{aligned}$$

式中, 信号 $x(t)$ 包络的平方

$$l^2 = \left[\int_0^T x(t) \cos \omega_2 t dt \right]^2 + \left[\int_0^T x(t) \sin \omega_2 t dt \right]^2, \quad l \geq 0$$

由最大似然估计方程, 得

$$\frac{\partial \ln p[x(t) | \omega_2]}{\partial \omega_2} = \frac{\partial}{\partial \omega_2} \ln I_0 \left(\frac{2a}{N_0} l \right) \bigg|_{\omega_2 = \hat{\omega}_{2ML}} = 0, \quad l \geq 0$$

因为第一类零阶修正贝塞尔函数 $I_0 \left(\frac{2b}{N_0} l \right)$ 是 l 的单调增函数, 所以 $I_0 \left(\frac{2b}{N_0} l \right)$ 的极大化与 l 的极大化是一致的。

我们知道, 将信号 $x(t)$ 输入除相位外与 $\cos \omega_2 t$ 相匹配的滤波器, 后接包络检波器的非相干匹配滤波器, 其输出为包络 l 。为了确定使 l 最大的频率 ω_2 , 可以利用由 $(k+1)$ 个滤波器组成的并联滤波器组, 它们的中心频率分别为

$$\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega, \dots, \omega_0 + k\Delta\omega$$

该频率范围覆盖了接收信号可能的预期频率 ω_2 的范围。设相邻滤波器中心频率相距很近, 则具有最大输出那个滤波器的中心频率近似为频率 ω_2 的最大似然估计量。这样, 接收机的框图如图 8.11 所示。

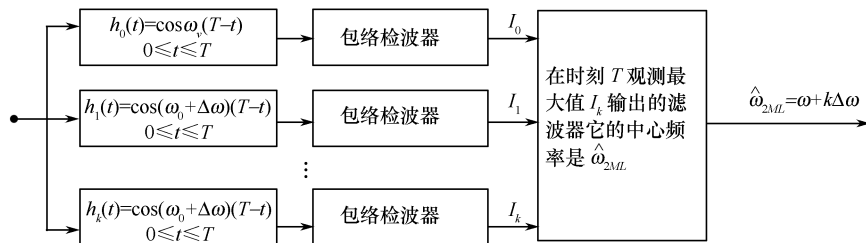


图 8.11 信号频率最大似然估计的接收机框图

8.3 若信号为

$$s(t; a) = as(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

式中, $s(t)$ 是完全已知的, 且满足 $\int_0^T s^2 dt = 1$; 振幅 a 是待估计的信号参数。设观测方程为

$$x(t) = s(t; a) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

式中, $n(t)$ 是均值为零、功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声。现在假定知道振幅 a 的先验概率密度函数服从均值为零、方差为 σ_a^2 的高斯分布, 即

$$p(a) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_a^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{a^2}{2\sigma_a^2} \right]$$

- (1) 求振幅 a 的最大后验估计量 \hat{a}_{MAP} 及估计器的结构。
- (2) 求振幅 a 的最大后验估计量 \hat{a}_{MAP} 的均方误差 $E[(a - \hat{a}_{\text{MAP}})^2]$ 。
- (3) 如果信号振幅 a 的先验概率密度函数服从瑞利分布, 即

$$p(a) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma_a^2} \exp \left(-\frac{a^2}{2\sigma_a^2} \right), & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

求振幅 a 的最大后验估计量 \hat{a}_{MAP} , 并考查其无偏性和优效性。

解: 若

$$x(t) = s(t; \theta) + n(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

其中, $n(t)$ 是均值为零、功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声, 则 $x(t)$ 的似然函数为

$$p[x(t) | \theta] = F \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t; \theta)]^2 dt \right\}$$

式中

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi N_0} \right)^{n/2}$$

- (1) 根据题意, 有

$$p[x(t) | a] = F \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - as(t)]^2 dt \right\}$$

$$p(a) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_a^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{a^2}{2\sigma_a^2} \right)$$

由最大后验方程, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p[x(t) | a]}{\partial a} + \frac{\partial \ln p(a)}{\partial a} &= \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - as(t)] s(t) dt - \frac{a}{\sigma_a^2} \\ &= \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(t) dt - \frac{2a}{N_0} - \frac{a}{\sigma_a^2} \Big|_{a=\hat{a}_{\text{MAP}}} = 0 \end{aligned}$$

解得

$$\hat{a}_{\text{MAP}} = \frac{2\sigma_a^2}{N_0 + 2\sigma_a^2} \int_0^T x(t) s(t) dt$$

这样, 信号振幅 a 的最大后验估计器的结构如图 8.12 所示。

- (2) 首先考查 \hat{a}_{MAP} 的无偏性和有优效性, 然后求其均方差。

因为

$$\begin{aligned} E(\hat{a}_{\text{MAP}}) &= \frac{2\sigma_a^2}{N_0 + 2\sigma_a^2} E \left[\int_0^T x(t) s(t) dt \right] = \frac{2\sigma_a^2}{N_0 + 2\sigma_a^2} E \left\{ \int_0^T [as(t) + n(t)] s(t) dt \right\} \\ &= \frac{2\sigma_a^2}{N_0 + 2\sigma_a^2} E(a) = 0 \end{aligned}$$

所以, \hat{a}_{MAP} 是无偏估计量。

又因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p[x(t) | a]}{\partial a} + \frac{\partial \ln p(a)}{\partial a} &= \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) s(t)] dt - \frac{2a}{N_0} - \frac{a}{\sigma_a^2} \\ &= \left[a - \frac{2\sigma_a^2}{N_0 + 2\sigma_a^2} \int_0^T x(t) s(t) dt \right] \left(-\frac{N_0 + 2\sigma_a^2}{N_0 \sigma_a^2} \right) = (a - \hat{a}_{\text{MAP}}) k \end{aligned}$$

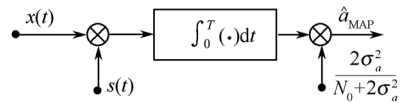


图 8.12 振幅 a 的最大后验估计器

式中

$$k = -\frac{N_0 + 2\sigma_a^2}{N_0 \sigma_a^2}$$

所以, \hat{a}_{MAP} 也是优效估计量。

这样, 信号振幅 a 的最大后验估计量 \hat{a}_{MAP} 是无偏、优效估计量, 其均方误差取克拉默-拉奥界限, 得

$$\epsilon_{a_{\text{MAP}}}^2 = E[(a - \hat{a}_{\text{MAP}})^2] = \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln p[x(t) | a]}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \ln p(a)}{\partial a^2}\right]} = \frac{N_0 \sigma_a^2}{N_0 + 2\sigma_a^2}$$

(3) 当信号振幅 a 服从瑞利分布时, 则有

$$p[x(t) | a] = F \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - as(t)]^2 dt\right\}$$

和

$$p(a) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma_a^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}\right), & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

由最大后验方程, 得

$$\frac{\partial \ln p[x(t) | a]}{\partial a} + \frac{\partial \ln p(a)}{\partial a} = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t) dt - \frac{2a}{N_0} + \frac{1}{a} - \frac{a}{\sigma_a^2} \Big|_{a=\hat{a}_{\text{MAP}}} = 0$$

整理得

$$\frac{N_0 + 2\sigma_a^2}{N_0 \sigma_a^2} a^2 - \left(\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t) dt\right)a - 1 \Big|_{a=\hat{a}_{\text{MAP}}} = 0$$

解得

$$\hat{a}_{\text{MAP}} = \frac{\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t) dt \pm \sqrt{\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t) dt\right]^2 + \frac{4N_0 + 8\sigma_a^2}{N_0 \sigma_a^2}}}{\frac{2N_0 + 4\sigma_a^2}{N_0 \sigma_a^2}}$$

因为

$$\sqrt{\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t) dt\right]^2 + \frac{4N_0 + 8\sigma_a^2}{N_0 \sigma_a^2}} \geq \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t) dt$$

而

$$\frac{2N_0 + 4\sigma_a^2}{N_0 \sigma_a^2} > 0, \quad (a \geq 0)$$

所以, 舍去 \hat{a}_{MAP} 解的负根, 得

$$\hat{a}_{\text{MAP}} = \frac{\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t) dt \pm \sqrt{\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(t) dt\right]^2 + \frac{4N_0 + 8\sigma_a^2}{N_0 \sigma_a^2}}}{\frac{2N_0 + 4\sigma_a^2}{N_0 \sigma_a^2}}$$

下面考查 \hat{a}_{MAP} 的无偏性。

因为信号振幅 a 服从瑞利分布, 所以其均值为

$$E(a) = \int_0^{+\infty} \frac{a^2}{\sigma_a^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}\right) da = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_a$$

信号振幅 a 的最大后验估计量 \hat{a}_{MAP} 的均值为

$$\begin{aligned} E(\hat{a}_{\text{MAP}}) &= \frac{\frac{2}{N_0} E\left\{\int_0^T [as(t) + n(t)]s(t) dt\right\} + E\left\{\sqrt{\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T [as(t) + n(t)]s(t) dt\right]^2 + \frac{4N_0 + 8\sigma_a^2}{N_0 \sigma_a^2}}\right\}}{\frac{2N_0 + 4\sigma_a^2}{N_0 \sigma_a^2}} \\ &= \frac{\frac{2}{N_0} E(a) + E\left\{\sqrt{\left(\frac{2}{N_0} a\right)^2 + \frac{4N_0 + 8\sigma_a^2}{N_0 \sigma_a^2}}\right\}}{\frac{2N_0 + 4\sigma_a^2}{N_0 \sigma_a^2}} = \frac{\sigma_a^2 E(a) + \sigma_a^2 E\left\{\sqrt{a^2 + \frac{n_0^2}{\sigma_a^2} + 2N_0}\right\}}{N_0 + 2\sigma_a^2} \end{aligned}$$

因为

$$E\left[\sqrt{a^2 + \frac{n_0^2}{\sigma_a^2} + 2N_0}\right] \neq E(a) + \frac{N_0}{\sigma_a^2} E(a)$$

所以 $E(\hat{a}_{\text{MAP}}) \neq E(a)$, 即信号振幅 a 的最大后验估计量 \hat{a}_{MAP} 是有偏估计量。

8.4 考虑在均值为零、方差为 σ_n^2 的加性高斯白噪声 n_x 中接收信号 s , 已知信号 s 在 $-s_M$ 与 $+s_M$ 之间均匀分布。单次观测方程为

$$x = s + n_x$$

求 s 的最佳估计。

解: 先求最大后验概率估计 $\hat{s}_{\text{MAP}}(x)$ 。

按给定的条件, 以信号 s 为条件的观测值 x 的概率密度函数, 即似然函数为

$$p(x|s) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(-s)^2}{2\sigma_n^2} \right]$$

而

$$p(s) = \begin{cases} 1/2s_M, & -s_M < s < +s_M \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以在 $-s_M < s < +s_M$ 范围内, 由

$$\left[\frac{\partial \ln p(x|s)}{\partial s} + \frac{\partial \ln p(s)}{\partial s} \right]_{s=\hat{s}_{\text{MAP}}(x)} = 0$$

得

$$\hat{s}_{\text{MAP}}(x) = x$$

由于信号 s 的最小值是 $-s_M$, 最大值为 $+s_M$, 观测噪声是零均值的高斯噪声, 所以当观测值 $x < -s_M$ 和 $x > +s_M$ 时, 信号分别取 $-s_M$ 和 $+s_M$ 的概率最大。这样

$$\hat{s}_{\text{MAP}}(x) = \begin{cases} -s_M, & x \leq -s_M \\ x, & -s_M < x < +s_M \\ +s_M, & x \geq +s_M \end{cases}$$

下面再来求最小均方误差估计 $\hat{s}_{\text{MS}}(x)$ 。 $\hat{s}_{\text{MS}}(x)$ 由被估计参量的条件均值决定, 即

$$\begin{aligned} \hat{s}_{\text{MAP}}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s p(s|x) ds = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} s p(x|s) p(s) ds}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x|s) p(s) ds} \\ &= \frac{\int_{-s_M}^{+s_M} s \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(-s)^2}{2\sigma_n^2} \right] \frac{1}{2s_M} ds}{\int_{-s_M}^{+s_M} s \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(-s)^2}{2\sigma_n^2} \right] \frac{1}{2s_M} ds} \\ &= \frac{\int_{s_M+x}^{s_M-x} (x-z) \exp \left[-\frac{z^2}{2\sigma_n^2} \right] dz}{\int_{s_M+x}^{s_M-x} \exp \left[-\frac{z^2}{2\sigma_n^2} \right] dz} = x - \frac{\sigma_n^2 \int_{(d+u)^2/2}^{(d-u)^2/2} \exp[-u] du}{\int_{d+u}^{d-u} \exp \left[-\frac{u^2}{2} \right] du} \end{aligned}$$

式中, $z = x - s$, $d = s_M/\sigma_n$, 代表信噪比, $u = x/\sigma_n$, 代表观测值对噪声均方差的归一化值。继续对上式进行计算, 得

$$\hat{s}_{\text{MS}}(x) = x - \frac{\sigma_n \left[-(d-u)^2/2 - -(d+u)^2/2 \right]}{\sqrt{2\pi} [\Phi(d-u) - \Phi(d+u)]}$$

式中, 函数 $\Phi(v)$ 代表

$$\Phi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^v \exp \left[-\frac{u^2}{2} \right] du$$

称为正态概率积分。

将 $\hat{s}_{\text{MAP}}(x)$ 和 $\hat{s}_{\text{MS}}(x)$ 对 x 的关系绘成曲线, 如图 8.13 所示。可见 $\hat{s}_{\text{MAP}}(x)$ 与 $\hat{s}_{\text{MS}}(x)$, 都是非线性估计, 即估计量 $\hat{s}(x)$ 是 x 的非线性函数, 但两者不相同。

8.5 设正弦信号为

$$s(t; a, \varphi) = a \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

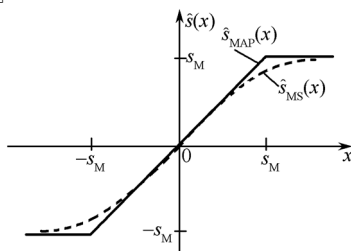


图 8.13 高斯噪声中均匀分布信号的估计

式中,频率 ω_0 已知;则可通过 n 次观测的数据 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 来估计信号的振幅 a 和相位 φ ,其中 $a>0, -\pi \leq \varphi \leq \pi$ 。

解:假定第一次观测在 $t=0$ 时刻进行,后续的 $k-1$ 次观测等时间间隔进行。由于没有任何先验知识可供利用,所以我们采用最小二乘估计的方法来求得振幅 a 和相位 φ 的估计量,即通过使

$$J(\hat{a}, \hat{\varphi}) = \sum_{k=1}^n \{x_k - \hat{a} \sin[\omega_0(k-1) + \hat{\varphi}]\}^2$$

最小来获得 $\hat{\alpha}_{LS}$ 和 $\hat{\varphi}_{LS}$ 。这是一个非线性最小二乘估计问题。因为正弦信号 $s(t; a, \varphi)$ 可以展开表示为

$$s(t; a, \varphi) = a \cos \varphi \cos \omega_0 t - a \sin \varphi \sin \omega_0 t$$

所以如果令 $\alpha = g(\theta)$ 为

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a \cos \varphi, a > 0 \\ \alpha_2 &= -a \sin \varphi, a > 0 \end{aligned} \quad (-\pi \leq \varphi \leq \pi)$$

这里

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} a \\ \varphi \end{bmatrix}$$

则离散观测后的信号模型为

$$s(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \cos \omega_0(k-1) + \alpha_2 \sin \omega_0(k-1), k=1, 2, \cdots, n$$

写成矩阵形式,表示为

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= H\alpha \\ H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \omega_0 & \sin \omega_0 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \omega_0(n-1) & \sin \omega_0(n-1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

现在,信号模型 $s(\alpha) = H\alpha$ 呈线性关系,所以, α 的线性最小二乘估计矢量 $\hat{\alpha}_{LS}$ 为

$$\hat{\alpha}_{LS} = (H^T H)^{-1} H^T x$$

由参量变换关系 $\alpha = g(\theta)$,可以求出其反变换 $\theta = g^{-1}(\alpha)$ 为

$$\begin{aligned} a &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}, \quad a > 0 \\ \varphi &= \arctan(-\alpha_2 / \alpha_1), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \end{aligned}$$

于是,振幅 a 和相位 φ 的最小二乘估计量为

$$\theta_{LS} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{LS} \\ \hat{\varphi}_{LS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{\alpha}_{1LS}^2 + \hat{\alpha}_{2LS}^2)^{1/2} \\ \arctan(-\hat{\alpha}_{2LS} / \hat{\alpha}_{1LS}) \end{bmatrix}$$

8.6 高斯(正态)分布是一种重要的分布,广泛应用在信号处理系统中。现根据高斯分布的 n 个统计独立的样本 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$,估计其均值 m 和方差 σ^2 。

(1) 如果方差 σ^2 已知,求均值 m 的最大似然估计量 \hat{m}_{ML} ,并考查其主要性质;

如果均值 m 已知,求方差 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_{ML}^2$,并考查其主要性质;

均值 m 和方差 σ^2 均未知,同时求均值 m 和方差 σ^2 的最大似然估计量 \hat{m}_{ML} 和 $\hat{\sigma}_{ML}^2$,分别考查它们的主要性质。

(2) 如果样本数 n 足够大,使 $(n-1)/n \approx 1$,从而允许我们认为 $(n-1)/n = 1$ 。在这种条件下,研究同时获得的估计量 \hat{m}_{ML} 和 $\hat{\sigma}_{ML}^2$ 的无偏性、克拉默-拉奥界限和优效性。

解:(1) n 个独立高斯样本 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 构成的 n 维高斯随机矢量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,其 n 维联合概率密度函数为

$$p(x | m, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - m)^2}{2\sigma^2} \right]$$

其参量 m 和方差 σ^2 的最大似然估计量由最大似然方程解得。

当方差 σ^2 已知时,均值 m 的最大似然估计量 \hat{m}_{ML} 由最大似然方程

$$\frac{\partial \ln p(x | m, \sigma^2)}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{k=1}^n x_k - nm \right]_{m=\hat{m}_{ML}} = 0$$

解得

$$\hat{m}_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

\hat{m}_{ML} 是无偏、优效估计量, 其均方误差为

$$E[(m - \hat{m}_{ML})^2] = \sigma^2 / n$$

当均值 m 已知时, 方差 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_{ML}^2$ 由最大似然方程

$$\frac{\partial \ln p(x | m, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - m)^2}{2\sigma^4} \Big|_{\sigma^2 = \hat{\sigma}_{ML}^2} = 0$$

解得

$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2$$

因为

$$E(\hat{\sigma}_{ML}^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E[(x_k - m)^2] = \sigma^2$$

所以, $\hat{\sigma}_{ML}^2$ 是无偏估计量。

又因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(x | m, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - m)^2}{2\sigma^4} \\ &= \left[\sigma^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 \right] \left(-\frac{n}{2\sigma^4} \right) = (\sigma^2 - \hat{\sigma}_{ML}^2) \end{aligned}$$

式中 $k = (-n/2\sigma^4)$, 所以, $\hat{\sigma}_{ML}^2$ 也是优效估计量。

这样, $\hat{\sigma}_{ML}^2$ 是无偏、优效估计量, 其均方误差取克拉默-拉奥界限, 为

$$E[(\sigma^2 - \hat{\sigma}_{ML}^2)^2] = \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(x | m, \sigma^2)}{\partial (\sigma^2)^2}\right]} = \frac{2}{n} \sigma^4$$

当均值 m 和方差 σ^2 需要同时估计时, 根据最大似然估计原理求解的联立方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln p(x | m, \sigma^2)}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{k=1}^n x_k - nm \right] \Big|_{\substack{m=\hat{m}_{ML} \\ \sigma^2=\hat{\sigma}_{ML}^2}} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln p(x | m, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - m)^2}{2\sigma^4} \Big|_{\substack{m=\hat{m}_{ML} \\ \sigma^2=\hat{\sigma}_{ML}^2}} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

由方程(1)解得

$$\hat{m}_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

它仍是无偏、优效估计量, 其均方误差为

$$E[(m - \hat{m}_{ML})^2] = \sigma^2 / n$$

将 $m = \hat{m}_{ML}$ 代入方程(2), 解得

$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{m}_{ML})^2$$

因为

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_{ML}^2) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E[(x_k - \hat{m}_{ML})^2] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\{[(x_k - m_x) - (\hat{m}_{ML} - m_x)]^2\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E[(x_k - m_x)^2 - 2(x_k - m_x)(\hat{m}_{ML} - m_x) + (\hat{m}_{ML} - m_x)^2] \\ &= \sigma^2 - 2E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - m_x\right)\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - m_x\right)\right] + \frac{1}{n} \sigma^2 \\ &= \sigma^2 - 2E[(\hat{m}_{ML} - m_x)^2] + \frac{1}{n} \sigma^2 = \sigma^2 - \frac{2}{n} \sigma^2 + \frac{1}{n} \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \end{aligned}$$

所以,同时估计均值 m_x 和方差 σ^2 时,方差 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$ 是有偏估计量,但它是渐近无偏的。

(2) 当 n 足够大时,均值 m_x 的最大似然估计量 $\hat{m}_{x\text{ML}}$ 当然还是无偏、优效估计量。如取 $(n-1)/n=1$,则方差 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$ 的均值为

$$E(\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2) \Big|_{\frac{n-1}{n}=1} = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \Big|_{\frac{n-1}{n}=1} = \sigma^2$$

即 $\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$ 是无偏估计量。且

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(x | \mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - \hat{m}_{x\text{ML}})}{2\sigma^4} \\ &= \left[\sigma^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{m}_{x\text{ML}}) \right] \left(-\frac{n}{2\sigma^4} \right) = (\sigma^2 - \hat{\sigma}_{\text{ML}}^2) k \\ k &= -n/2\sigma^4 \end{aligned}$$

式中

所以, $\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$ 也是优效估计量。这样,估计量 $\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$ 的均方误差取克拉默-拉奥界限为

$$E[(\sigma^2 - \hat{\sigma}_{\text{ML}}^2)^2] = \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(x | m_x, \sigma^2)}{\partial (\sigma^2)^2}\right]} = \frac{2}{n} \sigma^4$$

这说明,虽然对有限的 n 次观测,同时估计均值和方差时,方差 σ^2 的最大似然估计是 $\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$ 是有偏的,但只要 n 足够大, $\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2$ 就近似为无偏、优效估计量。

8.7 若时变线性观测方程为

$$x_k = h_k \theta + n_k, \quad k=1, 2, \dots, n$$

其中, θ 是方差为 σ_θ^2 的零均值待估计的高斯随机变量; n_k 是方差为 σ_n^2 的零均值高斯白噪声,且 $E(\theta n_k) = 0$ 。

(1) 求 θ 的最小均方误差估计量 $\hat{\theta}_{\text{MSE}}$ 和最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$, 并考查其主要性质。

(2) 如果 θ 具有瑞利分布, 即

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{\sigma_\theta^2} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}\right), & \theta \geq 0 \\ 0, & \theta < 0 \end{cases}$$

求 θ 的最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 。

解: (1) 为了求得 θ 的最小均方误差估计量 $\hat{\theta}_{\text{MSE}}$ 和最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$, 应先求得 θ 的后验概率密度函数 $p(\theta | \mathbf{x})$ 。

根据题意可得

$$p(\mathbf{x} | \theta) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - h_k\theta)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

和

$$p(\theta) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\theta^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}\right)$$

这样, θ 的后验概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\theta | \mathbf{x}) &= \frac{1}{p(\mathbf{x})} p(\mathbf{x} | \theta) p(\theta) \\ &= \frac{1}{p(\mathbf{x})} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\theta^2} \right)^{1/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - h_k\theta)^2}{2\sigma_n^2} - \frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}\right] \\ &= k_1(\mathbf{x}) \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2 - 2h_k^2 x_k \theta + h_k^2 \theta^2}{\sigma_n^2} + \frac{\theta^2}{\sigma_\theta^2} \right]\right\} \\ &= k_2(\mathbf{x}) \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{\sum_{k=1}^n h_k^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_n^2}{\sigma_\theta^2 \sigma_n^2} \theta^2 - \frac{2 \sum_{k=1}^n h_k x_k}{\sigma_n^2} \theta \right]\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k_2(\mathbf{x}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^n h_k^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_n^2}{\sigma_\theta^2 \sigma_n^2} \left[\theta^2 - 2 \frac{\sigma_\theta^2}{\sum_{k=1}^n h_k^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} \left(\sum_{k=1}^n h_k x_k \right) \theta \right] \right\} \\
&= k_3(\mathbf{x}) \exp \left\{ -\frac{1}{2 \sigma_m^2} \left[\theta - \frac{\sigma_\theta^2}{\sum_{k=1}^n h_k^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} \left(\sum_{k=1}^n h_k x_k \right) \right]^2 \right\}
\end{aligned}$$

它们都是与 θ 无关的项。式中的 σ_m^2 为

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma_\theta^2 \sigma_n^2}{\sum_{k=1}^n h_k^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_n^2}$$

可见, θ 的后验概率密度函数 $p(\theta|\mathbf{x})$ 是 Gaussian 型的, 属于广义 Gaussian 分布。所以, θ 的最小均方误差估计量

$\hat{\theta}_{\text{MSE}}$ 和最大后验估计量 $\hat{\theta}_{\text{MAP}}$ 相同, 都等于 θ 的条件均值, 即

$$\hat{\theta}_B \triangleq \hat{\theta}_{\text{MSE}} = \hat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sum_{k=1}^n h_k^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} \left(\sum_{k=1}^n h_k x_k \right)$$

下面考查 $\hat{\theta}_B$ 的主要性质, 求其均方误差。因为

$$E(\hat{\theta}_B) = E \left[\frac{\sigma_\theta^2}{\sum_{k=1}^n h_k^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} \left(\sum_{k=1}^n h_k x_k \right) \right] = \frac{\sigma_\theta^2}{\sum_{k=1}^n h_k^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^n h_k E(h_k \theta + n_k) \right]$$

所以, $\hat{\theta}_B$ 是无偏估计量。

$$\text{又因为} \quad \frac{\partial \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta} = -\frac{1}{\sigma_m^2} \left[\theta - \frac{\sigma_\theta^2}{\sum_{k=1}^n h_k^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} \left(\sum_{k=1}^n h_k x_k \right) \right] = (\theta - \hat{\theta}_B) k$$

式中

$$k = -1/\sigma_m^2$$

所以, $\hat{\theta}_B$ 也是优效估计量。

这样, $\hat{\theta}_B$ 是无偏优效估计量, 所以, 其均方误差取克拉默-拉奥界限, 为

$$E[(\theta - \hat{\theta}_B)^2] = \frac{1}{-E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\theta | \mathbf{x})}{\partial \theta^2} \right]} = \sigma_m^2 = \frac{\sigma_\theta^2}{\sum_{k=1}^n h_k^2 \sigma_\theta^2 + \sigma_n^2}$$

(2) 如果被估计量 θ 服从瑞利分布, 则

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x} | \theta) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right)^{n/2} \exp \left[-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - h_k \theta)^2}{2\sigma_n^2} \right] \\
p(\theta) &= \begin{cases} \frac{\theta}{\sigma_\theta^2} \exp \left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2} \right), & \theta \geq 0 \\ 0, & \theta < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

于是, 由最大后验方程, 得

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} | \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - h_k \theta) h_k}{\sigma_n^2} + \frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{\sigma_\theta^2} \bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{\text{MAP}}} = 0$$

整理为

$$\left(\sum_{k=1}^n h_k^2 + \frac{1}{\sigma_\theta^2} \right) \theta^2 - \sum_{k=1}^n \frac{h_k x_k}{\sigma_n^2} \theta - 1 \bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{\text{MAP}}} = 0$$

由该方程解得

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{h_k x_k}{\sigma_n^2} \pm \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n \frac{h_k x_k}{\sigma_n^2}\right)^2 + 4\left(\sum_{k=1}^n h_k^2 + \frac{1}{\sigma_\theta^2}\right)}}{2\left(\sum_{k=1}^n h_k^2 + \frac{1}{\sigma_\theta^2}\right)}$$

因为

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^n \frac{h_k x_k}{\sigma_n^2}\right)^2 + 4\left(\sum_{k=1}^n h_k^2 + \frac{1}{\sigma_\theta^2}\right)} > \sum_{k=1}^n \frac{h_k x_k}{\sigma_n^2}$$

而 $\theta \geq 0$, 所以

$$\hat{\theta}_{\text{MAP}} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{h_k x_k}{\sigma_n^2} \pm \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n \frac{h_k x_k}{\sigma_n^2}\right)^2 + 4\left(\sum_{k=1}^n h_k^2 + \frac{1}{\sigma_\theta^2}\right)}}{2\left(\sum_{k=1}^n h_k^2 + \frac{1}{\sigma_\theta^2}\right)}$$

8.8 假定信号 $s(t; \theta)$ 是由两个独立的高斯随机变量 a 和 b 同时对一个正弦波的频率和振幅进行调制而产生的, 即

$$s(t; \theta) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} b \sin(\omega_0 t + \beta a t)$$

设 a 和 b 分别服从 $a \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$, $b \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$; 观测是在功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的零均值加性高斯白噪声 $n(t)$ 中完成的, 即

$$x(t) = s(t; \theta) + n(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} b \sin(\omega_0 t + \beta a t) + n(t), \quad (0 \leq t \leq T)$$

求同时估计 a 和 b 时的均方误差下界。

解: 首先对观测信号 $x(t)$ 进行正交级数展开表示, 其展开系数为 $x_k (k=1, 2, \dots)$ 。先取前 n 个展开系数, 并表示如下矢量形式

$$\mathbf{x}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

其中

$$x_k = s_{k|\theta} + n_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

而 $s_{k|\theta}$ 是以某 θ 为条件的信号 $s(t; \theta)$ 的第 k 个展开系数。

由于 $n(t)$ 是均值为零、功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声, 所以 x_k 服从高斯分布, 其均值为 $s_{k|\theta}$, 方差为 $N_0/2$, 且相互统计独立, 于是有

$$p(\mathbf{x}_n | \theta) = \prod_{k=1}^n p(x_k | \theta) = \left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{n/2} \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - s_{k|\theta})^2}{N_0}\right]$$

上式两边取自然对数, 然后对 θ_i 求偏导, 则得

$$\frac{d \ln p(\mathbf{x} | \theta)}{d \theta_i} = \frac{2}{N_0} \sum_{k=1}^n (x_k - s_{k|\theta}) \frac{\partial s_{k|\theta}}{\partial \theta_i}$$

对上式取 $n \rightarrow \infty$ 的极限, 得

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} | \theta)}{\partial \theta_i} = \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(t; \theta)] \frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta_i} dt$$

现在分别求数据信息矩阵 J_D 和先验信息矩阵 J_P 。因为数据信息矩阵 J_D 的元素为

$$J_{D_{ij}} = -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x} | \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right] = E\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} | \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x} | \theta)}{\partial \theta_j}\right]$$

又因为 $x(t) - s(t; \theta) = n(t)$, 而 $n(t)$ 为高斯白噪声, 与信息 $s(t; \theta)$ 不相关, 所以

$$J_{D_{ij}} = \frac{4}{N_0^2} \int_0^T \int_0^T E[n(t)n(u)] E\left[\frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial s(u; \theta)}{\partial \theta_j}\right] dt du$$

由于 $n(t)$ 是功率谱密度为 $G_n(\omega) = N_0/2$ 的高斯白噪声, 所以

$$E[n(t)n(u)] = \frac{N_0}{2} \delta(t-u)$$

这样, $J_{D_{ij}}$ 为

$$J_{D_{ij}} = \frac{2}{N_0} E\left[\int_0^T \frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta_j} dt\right]$$

而 $J_{D_{ij}}$ 为

$$J_{D_{ij}} = \frac{2}{N_0} E \left[\int_0^T \left(\frac{\partial s(t; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right)^2 dt \right]$$

结合本题,令

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

并将 $s(t; \boldsymbol{\theta}) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} b \sin(\omega_0 t + \beta a t)$ 代入 $J_{D_{ij}}$ 式,则得

$$\begin{aligned} J_{D_{11}} &= \frac{2}{N_0} E \left[\int_0^T \frac{2E_s}{T} b^2 \beta^2 t^2 \cos^2(\omega_0 t + \beta a t) dt \right] \\ &= \frac{2}{N_0} E \left\{ \int_0^T \frac{2E_s}{T} b^2 \beta^2 t^2 \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \beta a t)] dt \right\} \\ &\approx \frac{2E_s}{N_0} \beta^2 \frac{T^2}{3} \sigma_b^2 = \frac{2T^2 E_s}{3N_0} \beta^2 \sigma_b^2 \\ J_{D_{22}} &= \frac{2}{N_0} E \left[\int_0^T \frac{2E_s}{T} \sin^2(\omega_0 t + \beta a t) dt \right] \\ &= \frac{2}{N_0} E \left\{ \int_0^T \frac{2E_s}{T} \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \beta a t)] dt \right\} \approx \frac{2E_s}{N_0} \\ J_{D_{12}} = J_{D_{21}} &= \frac{2}{N_0} E \left[\int_0^T \frac{2E_s}{T} b \beta t \cos(\omega_0 t + \beta a t) \sin(\omega_0 t + \beta a t) dt \right] \approx 0 \end{aligned}$$

这样,数据信息矩阵 \mathbf{J}_D 为

$$\mathbf{J}_D = \begin{bmatrix} \frac{2T^2 E_s}{3N_0} \beta^2 \sigma_b^2 & 0 \\ 0 & \frac{2E_s}{N_0} \end{bmatrix}$$

再来求先验信息矩阵 \mathbf{J}_P 。因为 a 和 b 是相互统计独立的高斯随机变量,所以 a 和 b 的联合概率密度函数为

$$p(a, b) = \left(\frac{1}{4\pi^2 \sigma_a^2 \sigma_b^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{a^2}{2\sigma_a^2} - \frac{b^2}{2\sigma_b^2} \right)$$

这样,先验信息矩阵 \mathbf{J}_P 的元素为

$$\begin{aligned} J_{P_{11}} &= -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(a, b)}{\partial a^2} \right] = 1/\sigma_a^2 \\ J_{P_{22}} &= -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(a, b)}{\partial b^2} \right] = 1/\sigma_b^2 \\ J_{P_{12}} = J_{P_{21}} &= -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(a, b)}{\partial a \partial b} \right] = 0 \end{aligned}$$

于是,先验信息矩阵 \mathbf{J}_P 为

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} 1/\sigma_a^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_b^2 \end{bmatrix}$$

这样,同时估计 a 和 b 的信息矩阵 \mathbf{J}_T 为

$$\mathbf{J}_T = \mathbf{J}_D + \mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} \frac{2T^2 E_s}{3N_0} \beta^2 \sigma_b^2 + \frac{1}{\sigma_a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2E_s}{N_0} + \frac{1}{\sigma_b^2} \end{bmatrix}$$

其逆矩阵 $\boldsymbol{\Psi}_T$ 为

$$\boldsymbol{\Psi}_T = \mathbf{J}_T^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2T^2 E_s}{3N_0} \beta^2 \sigma_b^2 + \frac{1}{\sigma_a^2} \right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{2E_s}{N_0} + \frac{1}{\sigma_b^2} \right)^{-1} \end{bmatrix}$$

于是,同时估计 a 和 b ,其估计量 \hat{a} 和 \hat{b} 若分别是 a 和 b 的任意无偏估计量,则估计量的均方误差分别满足

$$E[(a - \hat{a})^2] \geq \phi_{r_{11}} = \left(\frac{2T^2 E_s}{3N_0} \beta^2 \sigma_b^2 + \frac{1}{\sigma_a^2} \right)^{-1}$$

$$E[(b - \hat{b})^2] \geq \phi_{r_{22}} = \left(\frac{2E_s}{N_0} + \frac{1}{\sigma_b^2} \right)^{-1}$$

其中, $\phi_{r_{11}}$ 和 $\phi_{r_{22}}$ 是同时估计 a 和 b 时的估计量的均方误差下界。

8.9 设 \mathbf{x} 为一测量数据矢量,它服从下面的观测方程:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{w}$$

式中, \mathbf{H} 为观测矩阵, \mathbf{s} 代表不可观测的状态矢量,而 \mathbf{w} 是加性观测噪声矢量。假定观测噪声矢量服从高斯分布

$$p(\mathbf{w}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\mathbf{R}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{w}\right)$$

式中, \mathbf{R} 是观测噪声矢量的协方差矩阵,则 $|\mathbf{R}|$ 为行列式。求未知状态矢量 \mathbf{x} 的最大似然估计 $\hat{\mathbf{x}}$ 和估计误差矢量 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ 的协方差矩阵 \mathbf{P}_e 。这一问题称为线性高斯测量情况下的最大似然估计。

解:将 $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}$ 代入已知条件,可以将观测噪声矢量的概率密度函数改写为

$$p(\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\mathbf{R}|}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s})\right]$$

它实质上是给定未知参数 \mathbf{s} 时观测数据矢量 \mathbf{x} 的似然函数,即

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{s}) = p(\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\mathbf{R}|}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s})\right]$$

显然,使这一似然函数最大化等价为使代价函数

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s})$$

最小化。求代价函数关于 \mathbf{s} 的偏导数,并令结果为零,则有

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}) = 0$$

从上式可直接得到未知参数矢量 \mathbf{s} 的最大似然估计

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} \quad (\text{I})$$

很显然,为了得到最大似然估计,观测矩阵 \mathbf{H} 必须满列秩。

计算估计误差矢量,得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}} = \mathbf{s} - (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{w}) \\ &= -(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (\text{II})$$

于是,估计误差的协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_e &\triangleq E\{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T\} = E\{(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{w} \mathbf{w}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1}\} \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} E\{\mathbf{w} \mathbf{w}^T\} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \end{aligned}$$

注意到 $E\{\mathbf{w} \mathbf{w}^T\} = \mathbf{R}$,故上式简化为

$$\mathbf{P}_e = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \quad (\text{III})$$

将式(III)代入式(I),则有线性高斯测量情况下的最大似然估计 $\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}}$ 为

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}} = \mathbf{P}_e \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} \quad (\text{IV})$$

8.10 一观测方程由下式描述:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{s} + \mathbf{w}$$

式中, \mathbf{s} 为一确定性的未知参数, 而观测噪声矢量 \mathbf{w} 服从正态分布:

$$\mathbf{w} \sim_n \left(0, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \right)$$

求 \mathbf{s} 的最大似然估计。

解: 由题意知, 观测矩阵 \mathbf{H} 变为矢量:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

而观测噪声矢量的协方差矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

将式(1)和式(2)代入题 8.9 的式(3)知, 估计误差的协方差矩阵退化为一标量, 即有

$$\mathbf{P}_e = (\mathbf{h}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h})^{-1} = \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} \right)^{-1} \quad (3)$$

而 H_0 的最大似然估计

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{ML}} = \mathbf{P}_e \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} = \frac{x_1 \sigma_1^{-2} + x_2 \sigma_2^{-2} + x_3 \sigma_3^{-2}}{\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2} + \sigma_3^{-2}} \quad (4)$$

式中 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ 为观测数据矢量, 其中 x_1, x_2, x_3 为随机观测值。

8.11 考虑使用 n 个随机变量观测值 s_1, s_2, \dots, s_n 估计一随机变量 \mathbf{x} 的一般情况。若随机变量为复变量, 并且 \mathbf{x} 的估计取作

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{w}^H \mathbf{s} + b$$

式中 $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$ 为观测数据矢量。求使均方误差为最小的最优滤波器 $\mathbf{w} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T$ 和最小均方误差的表达式。

解: 均方误差定义为

$$\epsilon_{\text{MSE}} = E\{|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|^2\} \quad (1)$$

由于要使均方误差最小化, \mathbf{x} 的估计首先必须是无偏估计, 即要求

$$E\{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\} = 0$$

由于 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{w}^H \mathbf{s} + b$, 所以上式意味着,

$$b = m_x - \omega^H m_s \quad (2)$$

式中, $m_x = E[\mathbf{x}]$ 和 m_s 分别表示随机变量 \mathbf{x} 的均值和观测数据矢量 \mathbf{s} 的均值矢量。将式(2)代入, 得

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{w}^H \mathbf{s} + b = \mathbf{w}^H (\mathbf{s} - m_s) + m_x \quad (3)$$

将式(3)代入式(1), 可得到均方误差的表达式:

$$\epsilon_{\text{MSE}} = E\{|\mathbf{x} - m_x - \omega^H (\mathbf{s} - m_s)|^2\} \quad (4)$$

展开后为

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{MSE}} &= E\{[(\mathbf{x} - m_x) - \omega^H (\mathbf{s} - m_s)][(\mathbf{x} - m_x) - \omega^H (\mathbf{s} - m_s)]^*\} \\ &= E\{|\mathbf{x} - m_x|^2 - (\mathbf{x} - m_x)^H (\mathbf{s} - m_s) \omega - \omega^H (\mathbf{s} - m_s) (\mathbf{x} - m_x)^* + \\ &\quad \omega^H (\mathbf{s} - m_s) (\mathbf{s} - m_s)^H \omega\} \end{aligned} \quad (5)$$

定义自协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_s = E\{(\mathbf{s} - m_s)(\mathbf{s} - m_s)^H\} \quad (6)$$

和互协方差矢量为

$$\mathbf{R}_{sx} = E\{(\mathbf{s} - m_s)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^* \} \quad (7)$$

则式(5)可简化为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{MSE}} = \sigma_x^2 - \mathbf{R}_{sx}^H \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{sx} + \mathbf{w}^H \mathbf{R}_s \mathbf{w} \quad (8)$$

式中, $\sigma_x^2 = E\{|\mathbf{x} - m_x|^2\}$ 为随机变量 \mathbf{x} 的方差

$$\text{由} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{MSE}}}{\partial \mathbf{w}^*} = -\mathbf{R}_{sx} + \mathbf{R}_s \mathbf{w} = 0$$

得到

$$\mathbf{R}_s \mathbf{w} = \mathbf{R}_{sx} \quad (9)$$

由于协方差矩阵 \mathbf{R}_s 一般为非奇异的, 故使均方误差最小化的最优滤波器为

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{R}_{sx} \quad (10)$$

将式(9)代入式(8), 并化简, 得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{MSE}} = \sigma_x^2 - \mathbf{R}_{sx}^H \mathbf{w} \quad (11)$$

将式(10)代入上式, 便得到均方误差的完整表达式

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{MSE}} = \sigma_x^2 - \mathbf{R}_{sx}^H \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{R}_{sx} \quad (12)$$

由此可得, 使均方误差最小化的最优滤波器最大权值和为最小均方误差为

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{R}_{sx}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{MSE}} = \sigma_x^2 - \mathbf{R}_{sx}^H \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{R}_{sx}$$

8.12 研究在加性噪声中随机参量 θ 的估计问题。线性观测方程为

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\theta + \mathbf{n}$$

式中, 观测信号矢量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; 观测矩阵 $\mathbf{H} = (1, 1, \dots, 1)^T$; 观测噪声矢量 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_n)^T$, 其每个分量 n_k 是均值为零、方差为 σ_n^2 的高斯白噪声; θ 是被估计的单随机参量, 其先验概率密度函数的均值为 m_θ , 方差为 σ_θ^2 , 且是高斯分布的。求 θ 的贝叶斯估计量 $\hat{\theta}_B$, 并考查其主要性质。

解: 根据题意, 后验概率密度函数 $p(\theta|\mathbf{x})$ 是高斯的, 所以 θ 的贝叶斯估计量 $\hat{\theta}_B$ 为

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_B &= m_\theta + \sigma_\theta^2 \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \sigma_\theta^2 \mathbf{H}^T + \sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{H} m_\theta) \\ &= m_\theta + (\sigma_\theta^2 / \sigma_n^2) \mathbf{H}^T [\mathbf{H} (\sigma_\theta^2 / \sigma_n^2) \mathbf{H}^T + \mathbf{I}]^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{H} m_\theta) \end{aligned}$$

利用矩阵求逆引理, $\hat{\theta}_B$ 中的矩阵求逆项为

$$[\mathbf{H} (\sigma_\theta^2 / \sigma_n^2) \mathbf{H}^T + \mathbf{I}]^{-1} = \mathbf{I}^{-1} - \mathbf{I}^{-1} \mathbf{H} [\mathbf{H}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{H} + (\sigma_n^2 / \sigma_\theta^2)]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{I}^{-1}$$

单位矩阵 \mathbf{I} 的逆矩阵 $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$, $\mathbf{H} = (1, 1, \dots, 1)^T$ 是 n 维单位矢量, 所以

$$[\mathbf{H} (\sigma_\theta^2 / \sigma_n^2) \mathbf{H}^T + \mathbf{I}]^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{H} [n + (\sigma_n^2 / \sigma_\theta^2)]^{-1} \mathbf{H}^T = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}^T}{n + (\sigma_n^2 / \sigma_\theta^2)}$$

这样, 则有

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_B &= m_\theta + \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2} \mathbf{H}^T \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}^T}{n + (\sigma_n^2 / \sigma_\theta^2)} \right] (\mathbf{x} - \mathbf{H} m_\theta) \\ &= m_\theta + \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2} \left[\mathbf{H}^T - \frac{\mathbf{H}^T \mathbf{H}}{n + (\sigma_n^2 / \sigma_\theta^2)} \right] (\mathbf{x} - \mathbf{H} m_\theta) = m_\theta + \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2} \left[1 - \frac{n}{n + (\sigma_n^2 / \sigma_\theta^2)} \right] (\mathbf{H}^T \mathbf{x} - \mathbf{H}^T \mathbf{H} m_\theta) \\ &= m_\theta + \frac{n}{n + (\sigma_n^2 / \sigma_\theta^2)} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - m_\theta \right) = m_\theta + \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + (\sigma_n^2 / n)} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - m_\theta \right) \end{aligned}$$

估计量 $\hat{\theta}_B$ 的均值为

$$E(\hat{\theta}_B) = m_\theta = E(\theta)$$

所以, $\hat{\theta}_B$ 是无偏估计量。

因为概率密度函数 $p(x|\theta)$ 和 $p(\theta)$ 分别为

$$\begin{aligned} p(x|\theta) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\sigma_n^2 \mathbf{I}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\theta)^T (\sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\theta) \right] \\ p(\theta) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\theta^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(\theta - m_\theta)^2}{2\sigma_\theta^2} \right] \end{aligned}$$

所以,它们分别取自然对数后对 θ 求偏导,它们的和为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} | \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta} &= \mathbf{H}^T (\sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\theta) - \frac{\theta - m_\theta}{\sigma_\theta^2} = \frac{\mathbf{H}^T \mathbf{x} - \mathbf{H}^T \mathbf{H}\theta}{\sigma_n^2} - \frac{\theta - m_\theta}{\sigma_\theta^2} \\&= \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sigma_n^2} - \frac{n\theta}{\sigma_n^2} - \frac{\theta}{\sigma_\theta^2} + \frac{m_\theta}{\sigma_\theta^2} = -\frac{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2}{\sigma_\theta^2 \sigma_n^2} \theta + \frac{\sigma_\theta^2 \sum_{k=1}^n x_k + \sigma_n^2 m_\theta}{\sigma_\theta^2 \sigma_n^2} \\&= \left[\theta - \left(\frac{\sigma_\theta^2}{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k + \frac{\sigma_n^2}{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} m_\theta \right) \right] \left(-\frac{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2}{\sigma_\theta^2 \sigma_n^2} \right)\end{aligned}$$

因为贝叶斯估计量 $\hat{\theta}_B$ 可以变形表示为

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_B &= m_\theta + \frac{\sigma_\theta}{\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2/n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - m_\theta \right) \\&= \frac{\sigma_\theta^2}{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k + \frac{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2}{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} m_\theta - \frac{n\sigma_\theta^2}{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} m_\theta \\&= \frac{\sigma_\theta^2}{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} \sum_{k=1}^n x_k + \frac{\sigma_n^2}{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2} m_\theta\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x} | \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta} = (\theta - \hat{\theta}_B) k$$

式中

$$k = -\frac{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2}{\sigma_\theta^2 \sigma_n^2}$$

这表明, θ 的贝叶斯估计量 $\hat{\theta}_B$ 是优效估计量。

由于 θ 的贝叶斯估计量 $\hat{\theta}_B$ 是无偏的优效估计量,所以对估计量 $\hat{\theta}_B$ 的均方误差取克拉默-拉奥界限,即有

$$\begin{aligned}\epsilon_{\hat{\theta}_B}^2 &= E[(\theta - \hat{\theta}_B)^2] = \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x} | \theta)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \ln p(\theta)}{\partial \theta^2}\right]} \\&= \frac{1}{-E[-(n/\sigma_n^2) - (1/\sigma_\theta^2)]} = \frac{\sigma_\theta^2 \sigma_n^2}{n\sigma_\theta^2 + \sigma_n^2}\end{aligned}$$

习 题 九

9.1 设 $s(t)$ 是均值为零的平稳随机过程,请用 $s(t)$ 及其导数 $\dot{s}(t)$ 对 $s(t+\alpha)$, $\alpha > 0$ 进行预测。

解: 现有两个观测信号(数据) $s(t)$ 及 $\dot{s}(t)$, 故 $\hat{s}(t+\alpha)$ ($\alpha > 0$) 可构造为

$$\hat{s}(t+\alpha) = as(t) + b\dot{s}(t)$$

利用线性最小均方误差估计的正交性原理,有

$$\begin{cases} E\{[s(t+\alpha) - as(t) - b\dot{s}(t)]s(t)\} = 0 \\ E\{[s(t+\alpha) - as(t) - b\dot{s}(t)]\dot{s}(t)\} = 0 \end{cases}$$

由于 $R_{\dot{s}s}(\alpha) = -R_{s\dot{s}}(\alpha)$, 因此有

$$\begin{cases} R_s(\alpha) - aR_s(0) + bR_{\dot{s}s}(0) = 0 \\ -R_{\dot{s}s}(\alpha) + aR_{\dot{s}s}(0) + bR_{\dot{s}\dot{s}}(0) = 0 \end{cases}$$

考虑到, $R_{\dot{s}s}(\alpha)|_{\alpha=0} = 0$, 所以可解得

$$a = R_s(\alpha)/R_s(0), \quad b = R_{\dot{s}s}(\alpha)/R_{\dot{s}s}(0)$$

于是有

$$\hat{s}(t+\alpha) = [R_s(\alpha)/R_s(0)]s(t) + [R_{\dot{s}s}(\alpha)/R_{\dot{s}s}(0)]\dot{s}(t)$$

估计误差的方差为

$$\begin{aligned}\text{Var}\{\hat{s}(t+\alpha)\} &= E\{[s(t+\alpha) - [R_s(\alpha)/R_s(0)]s(t) - [R_{\dot{s}s}(\alpha)/R_{\dot{s}s}(0)]\dot{s}(t)]s(t+\alpha)\} \\&= R_s(0) - [R_s^2(\alpha)/R_s(0)] + [S_{\dot{s}s}^2(\alpha)/S_{\dot{s}s}(0)]\end{aligned}$$

9.2 考虑平滑问题,已知观测波形在两个端点的数据 $s(0)$ 和 $s(T)$,估计 $(0, T)$ 区间内任意时刻 t 的信号 $s(t)$ 。

解: 现已知 $s(0)$ 和 $s(T)$, 所以 $s(t)$ 的估计 $\hat{s}(t)$ 应为

$$\hat{s}(t) = as(0) + bs(T), \quad t \in (0, T)$$

根据线性最小均方误差估计的正交性原理,有

$$\begin{cases} E\{[s(t) - as(0) - bs(T)]s(0)\} = 0 \\ E\{[s(t) - as(0) - bs(T)]s(T)\} = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} R_s(t) - aR_s(0) - bR_s(T) = 0 \\ R_s(T-t) - aR_s(0) - bR_s(T) = 0 \end{cases}$$

解联立方程,得

$$a = \frac{R_s(0)R_s(t) - R_s(T)R_s(T-t)}{R_s^2(0) - R_s^2(T)}, \quad b = \frac{R_s(0)R_s(T-t) - R_s(t)R_s(T)}{R_s^2(0) - R_s^2(T)}$$

将 a, b 代入 $\hat{s}(t) = as(0) + bs(T)$ 式,就得到平滑估计 $\hat{s}(t)$ 的结果,估计误差的方差为

$$\text{Var}\{\bar{s}(t)\} = E\{[s(t) - as(0) - bs(T)]s(t)\} = R_s(0) - aR_s(t) - bR_s(T-t)$$

式中,系数 a, b 如前。

9.3 考虑维纳滤波预测与平滑问题。设输入信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 都是均值为零的平稳随机过程,两者互不相关,自相关函数分别为

$$R_s(\tau) = \frac{7}{12}e^{-|\tau|/2}, \quad R_n(\tau) = \frac{5}{6}e^{-|\tau|}$$

试求估计 $\hat{s}(t+\alpha)$ 及估计的均方误差。

解: 由 $s(t)$ 和 $n(t)$ 的自相关函数 $R_s(\tau)$ 和 $R_n(\tau)$, 取双边拉普拉斯变换,得 $s(t)$ 和 $n(t)$ 功率谱分别为

$$\begin{aligned} G_s(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_s(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \frac{7}{12} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\tau/2} e^{-s\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-\tau/2} e^{-s\tau} d\tau \right) \\ &= \frac{7}{12} \left[\frac{1}{(1/2) - s} + \frac{1}{(1/2) + s} \right] = \frac{7/3}{-4s^2 + 1} \\ G_n(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_n(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \frac{5}{6} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\tau} e^{-s\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-\tau} e^{-s\tau} d\tau \right) \\ &= \frac{5}{6} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} \right) = \frac{5/3}{-s^2 + 1} \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} G(s) &= G_s(s) + G_n(s) = \frac{7/3}{-4s^2 + 1} + \frac{5/3}{-s^2 + 1} = \frac{-9s^2 + 1}{(-4s^2 + 1)(-s^2 + 1)} \\ &= \frac{(3s+2)}{(2s+1)(s+1)} \times \frac{(-3s+2)}{(-2s+1)(-s+1)} \end{aligned}$$

又有

$$R_{gx}(\tau) = E[g(t+\tau)x(t)] = E[s(t+\tau+\alpha)x(t)] = R_s(\tau+\alpha)$$

经拉普拉斯变换,得

$$G_{gx}(s) = G_{sx}(s)e^{\alpha s} = G_s(s)e^{\alpha s}$$

利用上面 $G_s(s), G_g(s), G_{gx}(s)$ 的结果,可得最佳线性滤波器的传输函数 $H(s)$ 为

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{G_s^+(s)} \left[\frac{G_{gx}(s)}{G_x^-(s)} \right] = \frac{(3s+1)(s+1)}{3s+2} \left[\frac{(-2s+1)(-s+1)}{(-3s+2)} \frac{7/3}{-4s^2+1} e^{\alpha s} \right] \\ &= \frac{(3s+1)(s+1)}{3s+2} \left[\left(\frac{1}{2s+1} + \frac{1/3}{-3s+2} \right) e^{\alpha s} \right] \end{aligned}$$

需要进一步求出

$$\left[\left(\frac{1}{2s+1} + \frac{1/3}{-3s+2} \right) e^{\alpha s} \right]$$

令

$$\Phi(s) = \frac{1}{2s+1} + \frac{1/3}{-3s+2}$$

相应地有

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{-t/2}/2, & t \geq 0 \\ e^{2t/3}/9, & t < 0 \end{cases}$$

则 $[\Phi(s)e^{as}]^+$ 便是 $\phi(t+\alpha)$ 的因果可实现部分, 如图 9.24 所示, 这些因果部分等于:

当 $\alpha > 0$ 时

$$\phi(t+\alpha) = e^{-(t+\alpha)/2}/2$$

当 $\alpha < 0$ 时

$$\phi(t+\alpha) = \begin{cases} e^{2(t+\alpha)/3}/9, & 0 \leq t < |\alpha| \\ e^{-(t+\alpha)/2}/2, & t \geq |\alpha| \end{cases}$$

对 $\phi(t+\alpha)$ 取拉普拉斯变换, 得

$$[\Phi(s)e^{as}] = \begin{cases} \frac{e^{-a/2}}{2s+1}, & \alpha > 0 \\ \frac{1}{2s+1}, & \alpha = 0 \\ \frac{1}{3} \times \frac{e^{2a/3} - e^{as}}{3s-2} + \frac{1}{2} \times \frac{e^{as}}{s+(1/2)}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

及

$$H(s) = \frac{(3s+1)(s+1)}{3s+2} [\Phi(s)e^{as}]$$

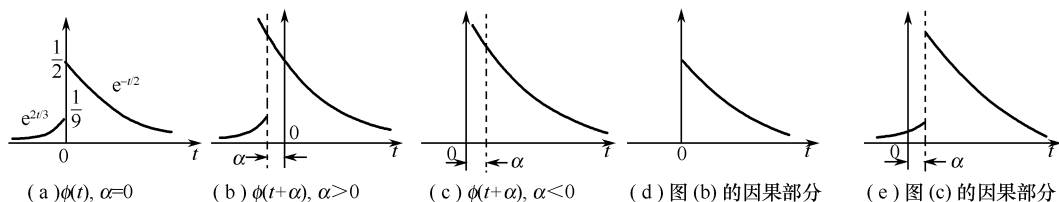


图 9.24 $\phi(t+\alpha)$ 图形其因果部分

下面计算 $s(t+\alpha)$ 波形估计的均方误差。

$$\text{Var}[\bar{s}(t+\alpha)] = R_s(0) - \int_0^{+\infty} \phi^2(t) dt = R_s(0) - F(\alpha)$$

式中

$$R_s(0) = 7/12$$

$$F(\alpha) = \int_a^{+\infty} \phi^2(t) dt = \begin{cases} e^{-\alpha}/4, & \alpha > 0 \\ 1/4, & \alpha = 0 \\ (1 - e^{-4\alpha/3})/108 + 1/4, & \alpha < 0 \end{cases}$$

故得

$$\text{Var}[\bar{s}(t+\alpha)] = (7/12) - F(\alpha) = \begin{cases} 7/12 - e^{-\alpha}/4, & \alpha > 0 \\ 1/3, & \alpha = 0 \\ (1/3) - (1 - e^{-4\alpha/3})/108, & \alpha < 0 \end{cases}$$

可见, 当时 $\alpha > 0$ 时, α 越大 (即预测时间越长) 则误差越大; 当 $\alpha < 0$ 时, $|\alpha|$ 越大 (即平滑时间越长), 则误差越小, 最小误差由 $\alpha = -\infty$ 时求得。误差随 α 变化的曲线如图 9.25 所示。

波形 $s(t+\alpha)$ 的预测和平滑, 其均方误差都有极限值。

当 $\alpha = -\infty$ 时, 有

$$\text{Var}[\bar{s}(t+\alpha)] = 35/108$$

当 $\alpha = 0$ 时, 有

$$\text{Var}[\bar{s}(t)] = 1/3$$

当 $\alpha = \infty$ 时, 有

$$\text{Var}[\bar{s}(t+\alpha)] = 7/12$$

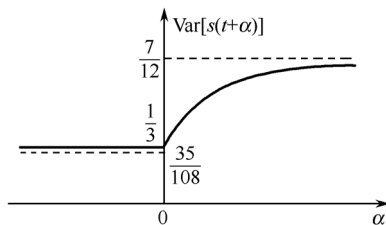


图 9.25 $\text{Var}[\bar{s}(t+\alpha)]$

与 α 的关系曲线

9.4 设维纳滤波器的输入序列为

$$x(n) = \begin{cases} 1/2, & n=0 \\ -1/2, & n=1 \end{cases}$$

希望滤波器的输出为

$$s(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n=1, 2, \dots \end{cases}$$

求维纳滤波器的脉冲响应

$$h(n) = \begin{cases} a, & n=0 \\ b, & n=1 \end{cases}$$

及相应的输出 $\hat{s}(n)$ 和均方误差 $E\{[s(n) - \hat{s}(n)]^2\}$ 。

解: 这是用长度为 2 的 (即二阶) FIR 滤波器来逼近维纳滤波器。即二阶 FIR 滤波器来逼近维纳滤波器的问题。由所给条件可以算出 $x_n (n=0, 1)$ 的自相关矩阵的元素为

$$R_x(0) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 x(n)x(n) = 1/4$$

$$R_x(1) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 x(n)x(n+1) = -1/8$$

$$R_{sx}(0) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^1 s(n)x(n) = 1/4$$

$$R_{sx}(1) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 s(n)x(n+1) = 0$$

故联立方程为

$$\begin{cases} h(0)/4 - h(1)/8 = 1/4 \\ -h(0)/8 + h(1)/4 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} h(0) = a = 4/3 \\ h(1) = b = 2/3 \end{cases}$$

维纳滤波器的输出为

$$\hat{s}(n) = h(n) * x(n) = \begin{cases} 2/3, & n=0 \\ -1/3, & n=1 \\ -1/3, & n=2 \end{cases}$$

估计的均方误差为

$$\begin{aligned} E\{[s(n) - \hat{s}(n)]^2\} &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^2 [s(n) - \hat{s}(n)]^2 \\ &= \frac{1}{3} \{[1 - (2/3)]^2 + [0 + (1/3)]^2 + [0 + (1/3)]^2\} = 1/9 \end{aligned}$$

读者可以自己检验, 如果取其他的 $h(0)$ 和 $h(1)$ 值, 估计序列的均方误差将大于 $1/9$; 如果增加单位脉冲响应的长度, 如 $h(0), h(1), h(2)$, 估计结果的均方误差将会减小。

9.5 设已知 $x(n) = s(n) + v(n)$, 以及

$$\Phi_{ss}(z) = \frac{0.38}{(1 - 0.6z^{-1})(1 - 0.6z)}$$

$$\Phi_{vv}(z) = 1, \quad (\text{白噪声})$$

$$\Phi_{sv}(z) = 0, \quad (s(n) \text{ 与 } v(n) \text{ 不相关})$$

式中, $s(n)$ 为希望得到的信号, $v(n)$ 为加性白噪声, 试求物理可实现与物理不可实现的两种情况时的 $H_{ML}(z)$ 与相应的 $E[e^2(n)]_{\min}$ 。

解: 由于 $\Phi_{sv}(z) = 0$, 所以

$$\begin{aligned}\Phi_{xx}(z) &= \Phi_{ss}(z) + \Phi_{vv}(z) = \frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)} + 1 \\ &= 1.5 \times \frac{(1-0.4z^{-1})(1-0.4z)}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}\end{aligned}$$

又因为 $\Phi_{xx}(z) = \sigma_w^2 B(z)B(z^{-1})$, 其中 $B(z)$ 由单位圆内的零、极点, $B(z^{-1})$ 由单位圆外的零、极点组成, 同上面的公式相比较, 可得

$$\sigma_w^2 = 1.5, \quad B(z) = \frac{1-0.4z^{-1}}{1-0.6z^{-1}}, \quad B(z^{-1}) = \frac{1-0.4z}{1-0.6z}$$

对于物理可实现情况

$$\begin{aligned}H_{\text{opt}}(z) &= \frac{1}{\sigma_w^2 B(z)} \left[\frac{\Phi_{xs}(z)}{b(z^{-1})} \right]_+ = \frac{1}{\sigma_w^2 B(z)} \left[\frac{\Phi_{ss}(z)}{B(z^{-1})} \right]_+ \\ &= \frac{1-0.6z^{-1}}{1.5(1-0.4z^{-1})} \left[\frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.4z)} \right] \\ \text{由于} \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.4z)} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-0.6z^{-1}} + \frac{0.4z}{1-0.4z} \right) \right] \\ &= \underbrace{(0.6)^n / 2}_{(n \geq 0 \text{ 时})} - \underbrace{(2.5)^n / 2}_{(n \geq 0 \text{ 时})}\end{aligned}$$

因为讨论的是物理可实现情况, 所以应取 $n \geq 0$ 之项, 并有

$$\left[\frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.4z)} \right]_+ = \frac{1/2}{1-0.6z^{-1}}$$

因此

$$H_{\text{opt}}(z) = \frac{1-0.6z^{-1}}{1.5(1-0.4z^{-1})} \frac{1/2}{1-0.6z^{-1}} = \frac{1/3}{1-0.4z^{-1}}$$

考虑到这里的 $\Phi_{xs}(z) = \Phi_{ss}(z) = \Phi_{ss}(z^{-1}) = \Phi_{ss}(z^{-1})$, 可得

$$\begin{aligned}E[e^2(n)]_{\min} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C [\Phi_{ss}(z) - H_{\text{opt}}(z)\Phi_{ss}(z^{-1})] z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left[\frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)} - \frac{1/3}{1-0.4z^{-1}} \frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)} \right] z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{-\frac{0.76}{3 \times 0.6} z + \frac{0.152}{0.6}}{(z-0.4)(z-0.6)[z-(1/0.6)]} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{-\frac{19}{45}(z-0.6)}{(z-0.4)(z-0.6)[z-(1/0.6)]} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{-19/45}{(z-0.4)[z-(1/0.6)]} dz\end{aligned}$$

取单位圆作积分围线, 上式应为单位圆内极点(0.4)的留数, 即有

$$E[e^2(n)]_{\min} = \frac{-19/45}{[0.4-(1/0.6)]} = 1/3$$

而未经该滤波器时的均方误差

$$E[e^2(n)] = E\{[x(n) - s(n)]^2\} = E[v^2(n)] = \phi_{vv}(0) = 1$$

这意味着通过维纳滤波器后均方误差下降了三倍。

对于非物理可实现情况

$$\begin{aligned}H_{\text{opt}}(z) &= \frac{\Phi_{xs}(z)}{\Phi_{xx}(z)} = \frac{\Phi_{ss}(z)}{\Phi_{ss}(z) + \Phi_{vv}(z)} = \frac{\frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}}{\frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)} + 1} = \frac{0.38}{1.74 - 0.6z - 0.6z^{-1}} \\ &= \frac{(1.16/1.74 \times 0.38)}{(1.16/1.74)(1.74 - 0.6z - 0.6z^{-1})} = \frac{0.253}{1.16 - 0.4z - 0.4z^{-1}} \\ &= \frac{0.253}{(1-4z^{-1})(1-0.4z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[e^2(n)]_{\min} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C [\Phi_{ss}(z) - H_{\text{opt}}(z)\Phi_{xs}(z^{-1})]z^{-1}dz \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left\{ \frac{0.38}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)} \times \left[1 - \frac{0.253}{(1-0.4z^{-1})(1-0.4z)} \right] \right\} z^{-1}dz \\
&= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1.583z(0.907-0.4z-0.4z^{-1})}{(z-0.6)[z-(1/0.6)](z-0.4)[z-(1/0.4)]} dz
\end{aligned}$$

取单位圆作积分围线,在单位圆内有两个极点($z=0.6, z=0.4$),因而上式等于这两个极点的留数和,即

$$\begin{aligned}
E[e^2(n)]_{\min} &= \frac{1.583 \times 0.6[0.907-0.4 \times 0.6-0.4 \times (1/0.6)]}{[0.6-(1/0.6)](0.6-0.4)[0.6-(1/0.4)]} \\
&\quad + \frac{1.583 \times 0.4(0.907-0.4 \times 0.4-0.4 \times \frac{1}{0.4})}{(0.4-0.6)[0.4-(1/0.6)][0.4-(1/0.4)]} = 0.302
\end{aligned}$$

前面求得的物理可实现的 $E[e^2(n)]_{\min}=1/3$,在此例中非物理可实现的均方误差略小于(或者说稍好于)物理可实现的情况。事实上,可以证明物理可实现条件下的最小均方误不会小于非物理可实现的情况。

9.6 设 x_k 与 v_k 为实离散时间随机过程,具有功率谱密度

$$\begin{aligned}
\Phi_{xx}(z) &= \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} \\
\Phi_{vv}(z) &= 1, \Phi_{vx}(z) = 0
\end{aligned}$$

并已知 $\hat{x}_{-1}=0, P_0=\text{Var}[x_0]=1$,在 $k=0$ 时开始观测信号 y_k , ($y_k=x_k+v_k$),试用卡尔曼滤波公式求 \hat{x}_k 。

解:由给定的 $\Phi_{xx}(z)$ 求出 x_k 的状态方程。 $\Phi_{xx}(z)$ 可表示为

$$\Phi_{xx}(z) = 0.36 \frac{1}{(1-0.8z^{-1})} \cdot \frac{1}{(1-0.8z)}$$

因为 $\Phi_{xx}(z) = \sigma_w^2 B(z)B(z^{-1})$, 将其与上式比较,可得

$$B(z) = \frac{1}{1-0.8z^{-1}} = \frac{z}{z-0.8}$$

又因为 $B(z)=X(z)/W(z)$, 于是

$$zX(z) = 0.8X(z) = W(z)$$

变换到时域

$$\begin{aligned}
x_k &= 0.8x_{k-1} + w_{k-1} \\
A_k &= 0.8
\end{aligned}$$

根据 $y_k = x_k + v_k$, 以及

$$\Phi_{xx}(z) = \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}$$

所以

$$\mathbf{C}_k = 1, \quad \mathbf{Q}_k = 0.36, \quad \mathbf{R}_k = \text{Var}[v_k] = \Phi_{vv}(0) = 1$$

将以上结果代入式(9-134)、式(9-150)、式(9-147)及式(9-148)得

$$\hat{\mathbf{x}}_k = 0.8 \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{H}_k(\mathbf{y}_k - 0.8 \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{P}'_k(\mathbf{P}'_k + 1)^{-1} \quad (2)$$

$$\mathbf{P}'_k = 0.64\mathbf{P}_{k-1} + 0.36 \quad (3)$$

$$\mathbf{P}_k = (1 - \mathbf{H}_k)\mathbf{P}'_k \quad (4)$$

将式(2)代入式(3)得

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_k &= (1 - \mathbf{H}_k)\mathbf{P}'_k = [1 - \mathbf{P}'_k(\mathbf{P}'_k + 1)^{-1}]\mathbf{P}'_k \\
&= \mathbf{P}'_k - \mathbf{P}'_k^2(\mathbf{P}'_k + 1)^{-1} = \frac{\mathbf{P}'_k(\mathbf{P}'_k + 1) - \mathbf{P}'_k^2}{\mathbf{P}'_k + 1} \\
&= \mathbf{P}'_k(\mathbf{P}'_k + 1)^{-1} = \mathbf{H}_k
\end{aligned} \quad (5)$$

从式(3)与式(4)中消去 \mathbf{P}'_k , 得

$$\mathbf{P}_k = \frac{0.64\mathbf{P}_{k-1} + 0.36}{0.64\mathbf{P}_{k-1} + 1.36} \quad (6)$$

求稳态解,将式(4)中的 \mathbf{P}_k 及 \mathbf{P}_{k-1} 用 \mathbf{P}_∞ 代入并简化,得

$$0.64\mathbf{P}_\infty^2 + 0.72\mathbf{P}_\infty - 0.36 = 0$$

所以有

$$\mathbf{P}_\infty = \frac{-0.72 \pm \sqrt{0.72^2 + 4 \times 0.64 \times 0.36}}{2 \times 0.64} = 3/8 \quad (\text{只取正值})$$

$$\mathbf{P}'_k = 0.64\mathbf{P}_{k-1} + 0.36 = 0.6$$

$$\mathbf{H}_k = \frac{\mathbf{P}'_k}{\mathbf{P}'_k + 1} = \frac{0.6}{1.6} = 3/8$$

$$\mathbf{P}_k = (1 - \mathbf{H}_k)\mathbf{P}'_k = \mathbf{H}_k = 3/8$$

所以

$$\hat{\mathbf{x}}_k = 0.8\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \frac{3}{8}(\mathbf{y}_k - 0.8\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) = 0.5\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \frac{3}{8}\mathbf{y}_k \quad (3-48)$$

由该例结果可知,已知前一个估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 与当前的测量值 \mathbf{y}_k ,就可以求得当前的估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 。

9.7 设有一维离散动态系统,其动态过程描述为

$$s_k = \alpha s_{k-1} + w_{k-1}$$

式中, α 是未知的非随机参量; w_{k-1} 是扰动噪声。设观测方程为

$$x_k = s_k + n_k \quad (k=1, 2, \dots)$$

其中, n_k 是观测噪声。假设 w_{k-1} ($k \geq 1$) 和 n_k ($k \geq 1$) 是互不相关的,且与系统初始状态 s_0 也不相关的零均值白噪声随机序列,其方差分别为 $\sigma_{w_{k-1}}^2$ 和 $\sigma_{n_k}^2$ 。试通过观测量 x_k ,在进行 s_k 滤波的同时,估计参量 α 。

解:下面用推广的离散卡尔曼滤波来研究这个问题。

为了估计参量 α ,把它视为一个扩充的状态变量,它所满足的方程为

$$\alpha_k = \alpha_{k-1}$$

于是,扩充后的状态矢量为

$$\mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} s_k \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

扩充后的离散状态方程为

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{f}(s_{k-1}, k-1) + \mathbf{g}(s_{k-1}, k-1)w_{k-1}$$

其中

$$\mathbf{f}(s_{k-1}, k-1) = \begin{bmatrix} \alpha_{k-1} s_{k-1} \\ \alpha_{k-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(s_{k-1}, k-1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

观测方程可写成以下形式

$$x_k = \mathbf{h}(s_k, k) + n_k$$

式中

$$\mathbf{h}(s_k, k) = s_k$$

可见,扩维后的离散状态方程是非线性的。下面用推广的离散卡尔曼滤波来求状态矢量 s_k 的估计。

根据推广的离散卡尔曼滤波,在线性化过程中,可以求出

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}(s_{k-1}, k)}{\partial \mathbf{s}_{k-1}^T} \right|_{s_{k-1} = \hat{s}_{k-1}} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{k-1} & \hat{s}_{k-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{h}(s_{k-1}, k)}{\partial \mathbf{s}_{k-1}^T} \right|_{s_{k-1} = \hat{s}_{k-1}} = [1 \quad 0]$$

这样,便可得出推广的离散卡尔曼滤波进行状态矢量 s_k 递推估计的算法公式。如果按各分量写出,结果如下:

一步预测均方误差阵为

$$\mathbf{M}_{k|k-1} = \begin{bmatrix} \epsilon_{\hat{s}_{k|k-1}}^2 & \epsilon_{\hat{s}_{k|k-1} \hat{\alpha}_{k-1}}^2 \\ \epsilon_{\hat{\alpha}_{k-1} \hat{s}_{k|k-1}}^2 & \epsilon_{\hat{\alpha}_{k-1}}^2 \end{bmatrix}$$

各分量分别为

$$\epsilon_{\hat{s}_{k|k-1}}^2 = \hat{\alpha}_{k-1}^2 \epsilon_{\hat{s}_{k-1}}^2 + 2 \hat{\alpha}_{k-1} \hat{s}_{k-1} \epsilon_{\hat{\alpha}_{k-1} \hat{s}_{k-1}}^2 + \hat{s}_{k-1}^2 \epsilon_{\hat{\alpha}_{k-1}}^2 + \sigma_{w_{k-1}}^2$$

$$\epsilon_{\hat{s}_{k|k-1} \hat{\alpha}_{k-1}}^2 = \epsilon_{\hat{\alpha}_{k-1} \hat{s}_{k|k-1}}^2 = \hat{\alpha}_{k-1} \epsilon_{\hat{\alpha}_{k-1} \hat{s}_{k-1}}^2 + \hat{s}_{k-1} \epsilon_{\hat{\alpha}_{k-1}}^2$$

$$\epsilon_{\hat{\alpha}_{k-1}}^2 = \epsilon_{\hat{\alpha}_{k-1}}^2$$

状态滤波增益矩阵为

$$\mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} K_{s_k} \\ K_{a_k} \end{bmatrix}$$

各分量分别为

$$K_{s_k} = \frac{\epsilon_{\tilde{s}_k|k-1}^2}{\epsilon_{\tilde{s}_k|k-1}^2 + \sigma_{n_k}^2}, \quad K_{a_k} = \frac{\epsilon_{a\tilde{s}_k|k-1}^2}{\epsilon_{\tilde{s}_k|k-1}^2 + \sigma_{n_k}^2}$$

各分量分别为

$$\epsilon_{\tilde{s}_k}^2 = \frac{\epsilon_{\tilde{s}_k|k-1}^2 \sigma_{n_k}^2}{\epsilon_{\tilde{s}_k|k-1}^2 + \sigma_{n_k}^2}, \quad \epsilon_{\tilde{s}_k \tilde{a}_k}^2 = \epsilon_{\tilde{a}_k \tilde{s}_k}^2 = \frac{\epsilon_{a\tilde{s}_k|k-1}^2 \sigma_{n_k}^2}{\epsilon_{\tilde{s}_k|k-1}^2 + \sigma_{n_k}^2}, \quad \epsilon_{\tilde{a}_k}^2 = \epsilon_{a\tilde{s}_k|k-1}^2 - \frac{\epsilon_{a\tilde{s}_k|k-1}^2 \epsilon_{\tilde{s}_k|k-1}^2}{\epsilon_{\tilde{s}_k|k-1}^2 + \sigma_{n_k}^2}$$

状态滤波值为

$$\tilde{\mathbf{s}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{s}_k \\ \tilde{a}_k \end{bmatrix}$$

各分量分别为

$$\tilde{s}_k = \hat{\alpha}_{k-1} \hat{s}_{k-1} + K_{s_k} (x_k - \hat{\alpha}_{k-1} \hat{s}_{k-1})$$

$$\hat{\sigma}_k = \hat{\sigma}_{k-1} + K_{a_k} (x_k - \hat{\alpha}_{k-1} \hat{s}_{k-1})$$

状态滤波的初始状态由 s_0 的统计特性和 α 的初值决定。

9.8 设目标以匀加速度 a 从原点开始作直线运动,加速度 a 受到时变扰动;现以等时间间隔 T 对目标的距离 r 进行直接测量。试建立该运动目标的离散状态方程和观测方程。

解:这是一个离散的信号模型。根据目标的运动规律,并考虑到加速度 a 受到时变扰动,可以写出关于目标距离 r 、速度 v 和加速度 a 的方程分别如下:

$$r_k = r_{k-1} + Tv_{k-1} + (T^2/2)a_{k-1}$$

$$v_k = v_{k-1} + Ta_{k-1}, \quad a_k = a_{k-1} + w_{k-1}$$

式中, w_{k-1} 表示在 $k-1$ 时刻目标运动加速度受到的扰动噪声,将上述三个方程写成矩阵形式,则有

$$\begin{bmatrix} r_k \\ v_k \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{k-1} \\ v_{k-1} \\ a_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_{k-1}$$

令 s_k 表示 k 时刻目标运动的三个状态变量 r_k, v_k 和 a_k 构成的三维状态矢量, $\Phi_{k,k-1}$ 表示一步状态转移矩阵, Γ_{k-1} 表示控制矩阵,即

$$\mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} r_k \\ v_k \\ a_k \end{bmatrix}, \quad \Phi_{k,k-1} = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{k-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则有目标运动的状态方程为

$$\mathbf{s}_k = \Phi_{k,k-1} \mathbf{s}_{k-1} + \Gamma_{k-1} w_{k-1}$$

下面再来建立目标运动的观测方程。虽然它是直接测距,但因为已经用状态矢量 \mathbf{s}_k 来表示各状态变量 r_k, v_k 和 a_k ,所以在观测方程中只能用状态矢量 \mathbf{s}_k 。这样,在直接测距情况下的目标运动观测方程为

$$x_k = \mathbf{H}_k \mathbf{s}_k + n_k$$

式中,

$$\mathbf{H}_k = [1 \quad 0 \quad 0]$$

这里, x_k 就是 k 时刻的运动目标距离测量数据; n_k 是测距的观测噪声。

9.9 若飞机相对于雷达作径向匀加速直线运动,现通过对飞机的距离的测量来估计飞机的距离、速度和加速度。如果

(1) 从 $t=2s$ 开始测量,测量时间间隔为 $2s$;

(2) 设飞机到雷达的距离为 $r(t)$,径向速度为 $v(t)(=\dot{r}(t))$,径向加速度为 $a(t)(=\ddot{r}(t))$ 。现已知

$$E(r_0) = 0, \text{Var}(r_0) = \sigma_{r_0}^2 = 8(\text{km}^2)$$

$$E(\dot{r}_0) = E(v_0) = 0, \text{Var}(\dot{r}_0) = \sigma_{v_0}^2 = 10(\text{km/s})^2$$

$$E(\ddot{r}_0) = E(a_0) = 0.2(\text{km/s}^2), \text{Var}(\ddot{r}_0) = \sigma_{a_0}^2 = 5(\text{km/s}^2)^2$$

(3) 忽略扰动噪声 w_{k-1} 对飞机的扰动;

(4) 观测噪声 n_k 是零均值的白噪声随机序列, 已知

$$\text{Cov}(n_j, n_k) = R_{j, n_k} = \sigma_n^2 \delta_{jk} = 0.15 \delta_{jk} (\text{km}^2), j = k$$

(5) 观测噪声 n_k 与 r_0, v_0, a_0 均互不相关。

在获得距离观测值 $x_k(\text{km})$, $(k=1, 2, \dots, 10)$ 为 0.36, 1.56, 3.64, 6.44, 10.5, 14.8, 20.0, 25.2, 32.2, 40.4 的情况下, 求 r_k, v_k 和 a_k 的估计值及其均方误差, 并求状态一步预测值。

解: 本题用离散卡尔曼滤波来解决这一问题。

首先建立离散卡尔曼滤波的信号模型——离散状态方程和观测方程, 以及信号模型的统计特性。离散状态方程为

$$\mathbf{s}_k = \Phi_{k, k-1} \mathbf{s}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} = \Phi \mathbf{s}_{k-1}$$

式中

$$\mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} r_k \\ v_k \\ a_k \end{bmatrix}, \quad \Phi_{k, k-1} = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Big|_{T=1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Phi$$

因为是直测测距, 考虑到测量噪声, 所以离散观测方程为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k = \mathbf{H} \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k$$

式中

$$\mathbf{H} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

根据各状态变量的前二阶矩知识和观测噪声 n_k 的统计特性有, 飞机在初始时刻 ($k=0$) 的状态矢量 s_0 的均均值矢量和协方差矩阵分别为

$$E(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad \text{Var}(\mathbf{s}_0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

所以, 状态滤波的初始条件为 $\hat{\mathbf{x}}_k = E(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{P}_0 = \text{Var}(\mathbf{s}_0)$ 。

另外, $\mathbf{R}_{w_{k-1}} = 0$, $\mathbf{R}_{w_k} = 0.15(\text{km})^2 = \mathbf{R}_w$ 。有关参量的单位已有例题中给出。

这样, 利用如下一组离散卡尔曼滤波递推公式, 可得状态滤波值 $\hat{\mathbf{s}}_k$, 状态一步预测值 $\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}$ 和状态滤波的均方误差阵 \mathbf{P}_k 。这组递推公式为

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \Phi \mathbf{P}_{k-1} \Phi^T \quad (\text{I})$$

$$\mathbf{k}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_n)^{-1} \quad (\text{II})$$

$$\mathbf{P}_k = (1 - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (\text{III})$$

$$\hat{\mathbf{s}}_k = \Phi \hat{\mathbf{s}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{H} \Phi \hat{\mathbf{s}}_{k-1}) \quad (\text{IV})$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k} = \Phi \hat{\mathbf{s}}_k \quad (\text{V})$$

状态滤波的初始状态确定为

$$\hat{\mathbf{s}}_0 = E\{\mathbf{s}_0\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_0 = \text{Var}\{\mathbf{s}_0\} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

根据滤波的初始状态 $\hat{\mathbf{s}}_0$ 和 \mathbf{P}_0 , 对于各次的距离观测值 \mathbf{x}_k , 由状态滤波递推公式进行递推计算, 得到部分结果如下:

$$\hat{\mathbf{s}}_{1|0} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{s}}_1 = \begin{bmatrix} 0.3600 \\ 0.3765 \\ 0.1941 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.1494 & 0.0080 & 0.0221 \\ 0.0880 & 6.5223 & 4.1306 \\ 0.0220 & 4.1306 & 3.5370 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}}_{2|1} &= \begin{bmatrix} 1.5014 \\ 0.7147 \\ 0.1941 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{s}}_2 = \begin{bmatrix} 1.5590 \\ 0.8086 \\ 0.2063 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0.1496 & 0.1056 & 0.0311 \\ 0.1056 & 0.5092 & 0.3922 \\ 0.0311 & 0.3922 & 0.3493 \end{bmatrix} \\ &\dots \\ \hat{\mathbf{s}}_{9|8} &= \begin{bmatrix} 31.9869 \\ 3.4305 \\ 0.1804 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{s}}_9 = \begin{bmatrix} 32.1272 \\ 3.4632 \\ 0.1836 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_9 = \begin{bmatrix} 0.0986 & 0.0230 & 0.0022 \\ 0.0230 & 0.0083 & 0.0010 \\ 0.0020 & 0.0010 & 0.0001 \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{s}}_{10|9} &= \begin{bmatrix} 36.4200 \\ 3.8304 \\ 0.1836 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{s}}_{10} = \begin{bmatrix} 40.0244 \\ 3.9536 \\ 0.1943 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{10} = \begin{bmatrix} 0.0925 & 0.0193 & 0.0017 \\ 0.0193 & 0.0061 & 0.0006 \\ 0.0017 & 0.0006 & 0.00007 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

9.10 设需要递推估计以下动态系统的状态:

$$x(k+1) = \varphi x(k) + gw(k)$$

$$y(k) = hx(k) = v(k)$$

已知: $\varphi=0.6, g=0.8, h=1$ 。随机变量的统计特性如下:

$$E[w(k)] = 0, E[w^2(k)] = r_1(k) = 5$$

$$E[v(k)] = 0, E[v^2(k)] = r_2(k) = 1$$

$$E[x(0)] = 0, E[x^2(0)] = p(0) = 5$$

试计算 $p(k)$ 和 $k(k)$ 的稳定值。

解: 滤波方程 $\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)[y(k) - h\hat{x}(k|k-1)]$ 。

由初始估计 $\hat{x}(0|-1), p(0|-1)$ 开始递推, $\hat{x}(0|-1), p(0|-1)$ 表示在没有开始量测时的初始估计, 由于这时除已知的初始条件 $E[x(0)] = 0, E[x^2(0)] = p(0) = 5$ 外, 并无其他先验知识, 所以取:

$$\hat{x}(0|-1) = E[x(0)] = 0$$

$$p(0|-1) = E[x^2(0)] = p(0) = 5$$

$$K(0) = \frac{p(0|-1)}{p(0|-1) + 1} + 1 = \frac{5}{5+1} = 0.833$$

$$\hat{x}(0|0) = x(0|-1) + K(0)[y(0) - h\hat{x}(0|-1)] = 0.833y(0)$$

其中, $y(0)$ 表示 $k=0$ 时的量测值, $\hat{x}(0|0)$ 表示基于 $y(0)$ 对 $x(0)$ 的估计。

$$\begin{aligned}p(1|0) &= \varphi^2 p(0|0) + g^2 r_2(k) = \varphi^2 [1 - K(0)h] p(0|1) + g^2 r_2(k) \\ &= 0.6^2 [1 - 0.833] \times 5 + 0.8^2 \times 5 = 3.5\end{aligned}$$

$$K(1) = \frac{p(1|0)}{p(1|0) + 1} = 0.777$$

$$\hat{x}(1|1) = \hat{x}(1|0) + K(1)[y(1) - h\hat{x}(1|0)] = \varphi[1 - K(1)h] \hat{x}(0|0)$$

$$+ K(1)y(1) = 0.6 \times 0.222 \hat{x}(0|0) + 0.777y(1)$$

如此重复递推下去直到 $p(k+1|k), K(k)$ 收敛到它们的稳态值 p_{1s} 和 K_s 为止, 当到达稳态后有:

$$p_{1s} = \varphi^2 (1 - K_s h) p_{1s} + g^2 r_1^2$$

$$K_s = \frac{p_{1s} h}{h^2 p_{1s} + r_2^2}$$

消去 K_s , 将具体数据代入得: $p_{1s}^2 - 0.56 p_{1s} - 3.2 = 0$ 。由于 p_{1s} 是方差, 不可能等于负值。所以解上式取正根得: $p_{1s} = 3.48$, 代入并计算得

$$K_s = \frac{3.48}{3.48 + 1} = 0.775$$

设 $x(k)$ 的滤波估计误差方差 $p(k|k)$ 的稳态值为 p_s , 得

$$p_s = (1 - K_s) p_{1s} = (1 - 0.775) \times 3.48 = 0.775$$

系统、滤波器及计算框图如图 9.26 所示。

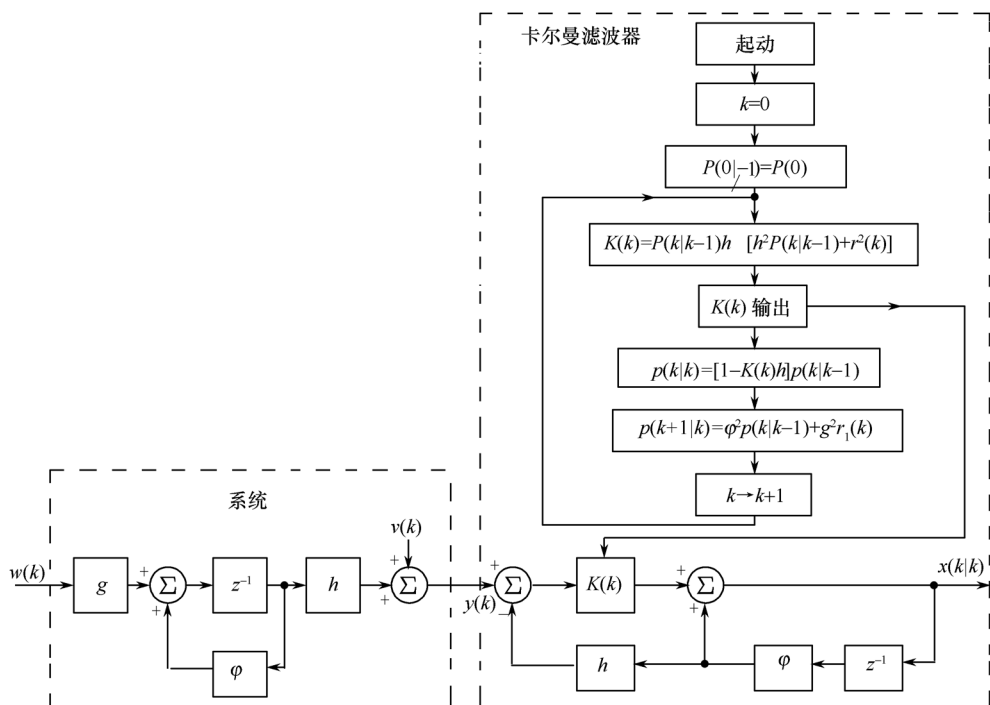


图 9.26 系统及卡尔曼滤波器

9.11 前面曾经指出,离散卡尔曼滤波的增益矩阵 \mathbf{K}_k 有可能离线算出,并与观测噪声矢量的协方差阵 \mathbf{R}_{n_k} 有关系。试通过本例来说明这些问题。设系统信号模型的状态方程和观测方程分别为

$$\mathbf{x}_k = \Phi \mathbf{s}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}$$

$$y_k = \mathbf{H} \mathbf{s}_k + n_k$$

式中,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [1 \ 0]$$

$\{\mathbf{w}_{k-1}\}$ 和 $\{n_k\}$ 都是均值为零的白噪声随机序列,与系统的初始状态矢量 \mathbf{s}_0 无关,且有

$$\text{Var}(\mathbf{w}_{k-1}) = \mathbf{R}_{w_{k-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{Var}(n_k) = \mathbf{R}_{n_k} = 2 + (-1)^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

而系统初始时刻 ($k=0$) 的状态矢量 \mathbf{s}_0 的协方差矩阵为

$$\text{Var}\{\mathbf{x}\} = \mathbf{R}_{x_0} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

求状态滤波的增益矩阵 \mathbf{K}_k 。

解: 状态滤波的增益矩阵 \mathbf{K}_k , 可由离散卡尔曼滤波递推公式求得。下面给出部分计算结果。

取 $\mathbf{P}_0 = \mathbf{R}_{s_0}$, 则

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{s_0} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

当 $k=1$ 时,

$$\begin{aligned}
P_{(1|0)} &= \Phi P_0 \Phi^T + R_{w_0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \\
K_1 &= P_{(1|0)} H_1^T (H_1 P_{(1|0)} H_1^T + R_{n_1})^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.9524 \\ 0.4762 \end{bmatrix} \\
P_1 &= (1 - K_1 H_1) P_{(1|0)} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.9524 \\ 0.4762 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9520 & 0.4760 \\ 0.4800 & 6.2380 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

当 $k=2$ 时,

$$\begin{aligned}
P_{(2|1)} &= \Phi P_1 \Phi^T + R_{w_1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9520 & 0.4760 \\ 0.4800 & 6.2380 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.1460 & 6.7140 \\ 6.7180 & 7.2380 \end{bmatrix} \\
K_2 &= P_{(2|1)} H_2^T (H_2 P_{(2|1)} H_2^T + R_{n_2})^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 8.1460 & 6.7140 \\ 6.7180 & 7.2380 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.1460 & 6.7140 \\ 6.7180 & 7.2380 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7380 \\ 0.6072 \end{bmatrix} \\
p_2 &= (1 - K_2 H_2) P_{(2|1)} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.7380 \\ 0.6072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 8.1460 & 6.7140 \\ 6.7180 & 7.2380 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1928 & 1.8074 \\ 1.8084 & 3.1915 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

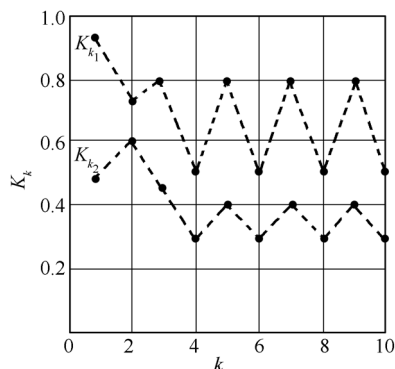


图 9.27 本题的状态滤波增益矩阵

用同样的方法可以算出 $k=3, k=4, \dots$ 时的结果。滤波增益矩阵 K_k 的两个分量 K_{k1} 和 K_{k2} 的计算结果如图 9.27 所示。

图 9.27 表明,当 k 为奇数时,滤波增益较大,这是因为奇次观测的 R_{n_k} 较小,观测量的精度较高,所以对状态一步预测的修正可采用较大的增益;当 k 为偶数时, R_{n_k} 较大, K_k 较小。由图还可以看出,只要经过几次递推运算,状态滤波的增益矩阵就逐步趋于以稳定的周期变化了。所以,如果滤波的初始状态 $E(s_0)$ 和 R_{s_0} 未知,可以把状态滤波的初始状态确定为

$$\begin{aligned}
\hat{s}_0 &= 0 \\
P_0 &= cI \quad (c \gg 1)
\end{aligned}$$

这样选择滤波的初始状态,虽然初期的递推估计结果会存在较大的误差,但一般会很快趋于平稳。

9.12 现考虑边扫描边跟踪的雷达系统跟踪运动目标的问题。

由于雷达系统通过接收到的目标回波信号相对于发射探测脉冲信号的时间延时值来确定目标的径向距离,并根据雷达天线波束指向中心来确定目标的方位,这是二维雷达的情况。在边扫描边跟踪一个运动目标的状态下,无论雷达系统的天线波束是机械扫描还是电扫描,都可以认为,在被跟踪目标的天线波束指向方向,雷达周期地发射一串 n 个探测脉冲信号,重复周期为 T_r (毫秒量级),系统处于跟踪状态,信号处理机输出运动目标的点迹,提供给跟踪计算机。这些点迹数据实际上就是进行离散状态滤波的观测数据。然后,天线波束转向其他方向,雷达系统处于搜索状态。设时间间隔 T 后,雷达系统又回到跟踪该运动目标的状态,以次循环工作。称时间间隔 T 为扫描周期,一般为秒量级。这样,每隔时间间隔 T ,便获得一次被跟踪运动目标的观测数据。如果被跟踪运动目标的速度不是很高,扫描周期 T 也不是较长的条件下,取一阶近似,可以认为在一个扫描周期内,被跟踪的运动目标在径向上和方位上均作匀速直线运动,但要考虑径向上和方位上的随机加速度影响。请在建立被跟踪运动目标信号模型的基础上,研究其径向距离跟踪偏差、径向速度、方位跟踪偏差和方位速度的递推估计问题。

解:下面首先研究被跟踪运动目标信号模型的建立及其统计特性假设,然后研究被跟踪运动目标状态的

递推估计问题。

(1) 信号模型的描述和建立

设在第 k 个扫描周期(以下简称 k 时刻)目标的径向距离为 $R+r_k$, 在时刻 $k+1$, 目标的径向距离为 $R+r_{k+1}$ 。其中, R 代表目标的平均距离; r_k 和 r_{k+1} 分别代表 k 时刻和 $k+1$ 时刻运动目标径向距离相对于平均距离 R 的偏差。通常关心的是这些具有随机特性的偏差, 因为它代表了径向距离的跟踪精度。

设径向距离偏差是零均值的平稳随机序列, 写出径向距离偏差方程为

$$r_{k+1} = r_k + T \dot{r}_k$$

其中, \dot{r}_k 是运动目标的径向速度。

考虑到运动目标会受到随机加速度的影响, 设 v_{r_k} 代表时刻 k 的随机径向加速度, 则径向的速度方程为

$$\dot{r}_{k+1} = \dot{r}_k + T v_{r_k}$$

这里假设 v_{r_k} 是零均值的平稳白噪声序列, 即

$$E(v_{r_k}) = 0, \quad E(v_{r_j} v_{r_k}) = \sigma_{v_r}^2 \delta_{jk}$$

这种随机加速度扰动噪声是由发动机功率短时间的随机起伏及阵风 and 气流等随机因素造成的。

令 $w_{r_k} = T v_{r_k}$ 则 w_{r_k} 也是白噪声序列, 即

$$E(w_{r_k}) = 0, \quad E(w_{r_j} w_{r_k}) = \sigma_{w_r}^2 \delta_{jk}$$

它代表在 T 时间内, 径向速度的变化量。于是距离向的速度方程可写成

$$\dot{r}_{k+1} = \dot{r}_k + W_{r_k}$$

同样地, 在方位上, 令 θ_k 和 θ_{k+1} 分别代表 k 时刻和 $k+1$ 时刻运动目标的方位角相对于平均角度 θ 的具有随机特性的偏差, 采用与径向距离偏差和径向速度类似的分析方法, 则方位偏差和方位角速度的方程分别为

$$\theta_{k+1} = \theta_k + T \dot{\theta}_k \quad \text{和} \quad \dot{\theta}_{k+1} = \dot{\theta}_k + w_{\theta_k}$$

式中, $\dot{\theta}_k$ 代表 k 时刻的运动目标的方位角变化速度; $w_{\theta_k} = T v_{\theta_k}$ 代表在 T 时间内, 方位角速度的变化量, 也假设它是零均值的平稳白噪声序列, 即

$$E(w_{\theta_k}) = 0, \quad E(w_{\theta_j} w_{\theta_k}) = \sigma_{w_\theta}^2 \delta_{jk}$$

而 v_{θ_k} 代表 k 时刻的随机方位角加速度, 仍假设它是零均值的平稳白噪声序列, 即

$$E(v_{\theta_k}) = 0, \quad E(v_{\theta_j} v_{\theta_k}) = \sigma_{v_\theta}^2 \delta_{jk}$$

另外还假设, 距离向的径向速度随机变化量 W_{r_k} 和方位向的方位角速度随机变化量 W_{θ_k} 是互不相关的, 即

$$E(W_{r_j} W_{\theta_k}) = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots)$$

这样, 描述被跟踪运动目标的状态变量为 r_k, \dot{r}_k, θ_k 和 $\dot{\theta}_k$, 令状态矢量 s_k 及扰动矢量 w_k 分别为

$$s_k = \begin{bmatrix} r_k \\ \dot{r}_k \\ \theta_k \\ \dot{\theta}_k \end{bmatrix}, \quad w_k = \begin{bmatrix} 0 \\ w_{r_k} \\ 0 \\ w_{\theta_k} \end{bmatrix}$$

则径向距离偏差方程、径向速度方程、方位角偏差方程和方位角速度方程可以用矢量方程表示, 得信号模型的离散状态方程为

$$s_{k+1} = \Phi s_k + w_k$$

其中, 状态一步转移矩阵 Φ 为

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

下面再来讨论由雷达测量提供的观测方程。雷达系统每隔时间 T 提供关于径向距离偏差 r_k 和方位角偏差 θ_k 的有噪声的测量数据, 这种测量噪声一般是加性的, 于是径向距离偏差和方位角偏差的观测方程分别为

$$x_{r_k} = r_k + n_{r_k} \quad \text{和} \quad x_{\theta_k} = \theta_k + n_{\theta_k}$$

因为状态变量 r_k 和 θ_k 已包含在状态矢量 s_k 中,所以,用矢量及矩阵表示,得信号模型的离散观测方程为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{H} \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k$$

其中,观测数据矢量 \mathbf{x}_k 及观测噪声矢量 \mathbf{n}_k ,分别为

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_{r_k} \\ x_{\theta_k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_k = \begin{bmatrix} n_{r_k} \\ n_{\theta_k} \end{bmatrix}$$

观测矩阵 \mathbf{H} 为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

假设观测噪声 n_{r_k} 和 n_{θ_k} 分别都是零均值的平稳白噪声序列,即

$$E(n_{r_k}) = 0, \quad E(n_{r_j} n_{r_k}) = \sigma_{n_r}^2 \delta_{jk}$$

$$E(n_{\theta_k}) = 0, \quad E(n_{\theta_j} n_{\theta_k}) = \sigma_{n_\theta}^2 \delta_{jk}$$

且认为 n_{r_k} 与 n_{θ_k} 是互不相关的,即

$$E(n_{r_j} n_{\theta_k}) = 0, \quad j, k = 1, 2, \dots$$

这样,就建立了雷达运动目标跟踪信号模型的离散状态方程和观测方程,并对信号模型的统计特性假设进行了统计描述。

(2) 观测噪声矢量 \mathbf{n}_k 和目标扰动矢量 \mathbf{w}_k 的协方差矩阵 \mathbf{R}_{n_k} 和 \mathbf{R}_{w_k}

为了进行卡尔曼滤波的递推计算,还需要确定观测噪声矢量 \mathbf{n}_k 和目标扰动矢量 \mathbf{w}_k 的协方差矩阵。因为观测噪声矢量 \mathbf{n}_k 为

$$\mathbf{n}_k = \begin{bmatrix} n_{r_k} \\ n_{\theta_k} \end{bmatrix}$$

考虑到各分量的统计特性,则有协方差矩阵 \mathbf{R}_{n_k} 为

$$\mathbf{R}_{n_k} = E(\mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^T) = \begin{bmatrix} \sigma_{n_r}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{n_\theta}^2 \end{bmatrix}$$

因为目标扰动矢量 \mathbf{w}_k 为

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ w_{r_k} \\ 0 \\ w_{\theta_k} \end{bmatrix}$$

考虑到各分量的统计特性,我们有协方差矩阵 \mathbf{R}_{w_k} 为

$$\mathbf{R}_{w_k} = (w_k w_k^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{w_r}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{w_\theta}^2 \end{bmatrix}$$

其中, $\sigma_{w_r}^2$ 和 $\sigma_{w_\theta}^2$ 分别是被跟踪雷达目标的 T 倍径向随机加速度的方差和 T 倍方位角随机加速度的方差。为了简化计算,假设在径向和方位上的径向随机加速度和方位角随机加速度都是均匀分布的,如图 9.28 所示,最大值在 $\pm A$ 处,这里 v 代表随机加速度,其概率密度函数为

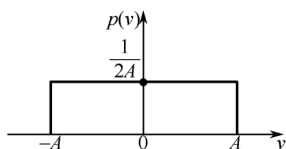


图 9.28 随机加速度 v 的概率密度函数

$$p(v) = \begin{cases} 1/2A, & -A \leq v \leq A \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这样,随机加速度 v 的方差为

$$\sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 p(v) dv = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A v^2 dv = A^2/3$$

于是, $\omega_{r_k} = \omega_r = Tv$; 由于 v 是线加速度, 换成角加速度要除以 R , 即 $\omega_{\theta_k} = \omega_\theta = Tv/R$, 其中 R 是目标的平均距离。这样就有

$$\sigma_{w_r}^2 = T^2 \sigma_v^2 = A^2 T^2 / 3$$

$$\sigma_{w_\theta}^2 = T^2 \sigma_v^2 / R^2 = A^2 T^2 / 3R^2$$

(3) 离散卡尔曼滤波初始状态的确定

因为雷达系统只观测被跟踪目标的径向距离和方位角, 而不具有测速的能力, 所以我们利用前两次的观测矢量 x_1 和 x_2 来确定滤波的初始状态 \hat{s}_2 和 P_2 , 从时刻 $k=3$ 开始递推估计。这样, 取时刻 $k=2$ 的状态滤波为

$$\hat{s}_2 = \begin{bmatrix} \hat{r}_2 \\ \hat{\dot{r}}_2 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\dot{\theta}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{r_2} \\ x_{r_2} - x_{r_1} / T \\ x_{\theta_2} \\ x_{\theta_2} - x_{\theta_1} / T \end{bmatrix}$$

其中, x_{r_1} , x_{r_2} 和 x_{θ_1} , x_{θ_2} 分别是 $k=1$ 和 $k=2$ 时刻的径向距离偏差和方位角偏差的观测数据, 根据观测方程

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{r_k} \\ x_{\theta_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k \\ \dot{r}_k \\ \theta_k \\ \dot{\theta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{r_k} \\ n_{\theta_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_k + n_r \\ \theta_k + n_\theta \end{bmatrix}$$

式中

$$s_k = \begin{bmatrix} r_k \\ \dot{r}_k \\ \theta_k \\ \dot{\theta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_k \\ (r_k - r_{k-1}) / T + \omega_{r_{k-1}} \\ \theta_k \\ (\theta_k - \theta_{k-1}) / T + \omega_{\theta_{k-1}} \end{bmatrix}$$

是被跟踪目标在 k 时刻的状态真值。于是, 在 $k=2$ 时刻估计的误差矢量 \tilde{s}_2 为

$$\tilde{s}_2 = s_2 - \hat{s}_2 = \begin{bmatrix} -n_{r_2} \\ (-n_{r_2} - n_{r_1}) / T + \omega_{r_1} \\ -n_{\theta_2} \\ (-n_{\theta_2} - n_{\theta_1}) / T + \omega_{\theta_1} \end{bmatrix}$$

这样, $k=2$ 时刻的估计误差矢量的均方误差阵 P_2 为

$$P_2 = E[(s_2 - \hat{s}_2)(s_2 - \hat{s}_2)^T] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

式中, $m_{11} = \sigma_{n_r}^2$, $m_{12} = m_{21} = \sigma_{n_r}^2 / T$, $m_{22} = 2\sigma_{n_r}^2 / T^2 + \sigma_{w_r}^2$, $m_{33} = \sigma_{n_\theta}^2$, $m_{34} = m_{43} = \sigma_{n_\theta}^2 / T$, $m_{44} = -2\sigma_{n_\theta}^2 / T^2 + \sigma_{w_\theta}^2$
例如, 若有关参数为

$$R = 160\text{km}, \quad T = 2.0\text{s}, \quad A = 6.0\text{m/s}^2$$

$$\sigma_{n_r} = 30\text{m}, \quad \sigma_{n_\theta} = 3.5 \times 10^{-3}\text{rad}$$

则有

$$\sigma_{w_r}^2 = T^2 A^2 / 3 = 48(\text{m/s})^2$$

$$\sigma_{w_\theta}^2 = T^2 A^2 / 3R^2 = 1.875(\text{rad/s})^2$$

此时, 状态估计的均方误差阵 P_2 为

$$P_2 = \begin{bmatrix} 9 \times 10^2 & 4.5 \times 10^2 & 0 & 0 \\ 4.5 \times 10^2 & 4.98 \times 10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.225 \times 10^{-5} & 6.125 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 6.125 \times 10^{-6} & 6.127 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

这样,就确定了离散卡尔曼滤波的初始状态 $\hat{\mathbf{s}}_2$ 和 \mathbf{P}_2 。

(4) 离散卡尔曼状态滤波和一步预测递推估计

对于上面所描述的边扫描边跟踪雷达系统跟踪运动目标的问题,已经建立了离散卡尔曼滤波的信号模型——离散状态方程和观测方程;给出了扰动噪声矢量 \mathbf{w}_k 和观测噪声矢量 \mathbf{n}_k 的统计特性假设,它们是均为零均值的白噪声随机序列,其协方差矩阵分别为 \mathbf{R}_{w_k} 和 \mathbf{R}_{n_k} ;确定了状态滤波的初始状态 $\hat{\mathbf{s}}_2$ 和 \mathbf{P}_2 。这样,从 $k=3$ 时刻开始就可按卡尔曼状态滤波公式进行递推估计了,即有 $\hat{\mathbf{s}}_{3|2}; \mathbf{P}_{3|2}, \mathbf{K}_3, \hat{\mathbf{s}}_3, \hat{\mathbf{s}}_{4|3}, \mathbf{P}_3; \mathbf{P}_{4|3}, \mathbf{K}_4, \hat{\mathbf{s}}_4, \hat{\mathbf{s}}_{5|4}, \mathbf{P}_4; \dots$ 。

参 考 文 献

- [1] 向敬成,王意青,毛自灿,张明友. 信号检测与估计. 北京:电子工业出版社,1994
- [2] 刘有恒. 信号检测与估计. 北京:人民邮电出版社,1989
- [3] A. D. 惠伦. 噪声中信号的检测. 北京:科学出版社,1977
- [4] 张树京,张思来. 统计信号处理. 北京:机械工业出版社,2003
- [5] 许树声. 信号检测与估计. 北京:国防工业出版社,1985
- [6] 段凤增. 信号检测理论. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2001
- [7] 沈凤麟,叶中付,钱玉美. 信号统计分析处理. 合肥:中国科技大学出版社,2001
- [8] 林茂庸,柯有安. 雷达信号理论. 北京:国防工业出版社,1989
- [9] 景占荣,羊彦. 信号检测与估计. 北京:化学工业出版社,2004
- [10] 赵树杰,赵建勋. 信号检测与估计理论. 北京:清华大学出版社,2005
- [11] 赵建勋. 信号检测与估计理论学习辅导与习题解答. 北京:清华大学出版社,2007
- [12] M. I. Skolnik. 雷达系统导论(第三版). 北京:电子工业出版社,2007
- [13] D. K. Barton. 雷达系统分析与建模. 北京:电子工业出版社,2007
- [14] 张明友,汪学刚. 雷达系统(第二版). 北京:电子工业出版社,2006
- [15] 汪学刚,张明友. 现代信号理论(第二版). 北京:电子工业出版社,2005
- [16] 张明友,吕明. 近代信号处理理论与方法. 北京:国防工业出版社,2005
- [17] 陆光华,彭学愚,张林让,毛用才. 随机信号处理. 西安:西安电子科技大学出版社,2002
- [18] 陆根源,陈孝桢. 信号检测与参数估计. 北京:科学出版社,2004
- [19] 徐宁寿. 随机信号估计与系统控制. 北京:北京工业大学出版社,2001
- [20] 韩曾晋. 自适应控制系统. 北京:机械工业出版社,1983
- [21] Helstrom C. W. Statistical Theory of Signal Detection. Oxford: Pergamon Press, 1960
- [22] Whalen A. D. Detection of Signals in Noise. Academic Press, New York and London, 1971
- [23] Schwartz M. and Shaw L. Signal Processing: Discrete Spectral Analysis, Detection and Estimation. McGraw-Hill, 1975
- [24] Srinath M. D. and Rajasekaran P. K. An Introduction to Statistical Signal Processing with Application, John Wiley & Sons, 1979
- [25] Bozic S. M. Digital and Kalman Filtering. Edward Arnold, 1979
- [26] 鞠德航,林可祥,陈捷. 信号检测理论导论. 北京:科学出版社,1977
- [27] Гуткин Д. С.. Теория оптимальных методов Радаров Радиоприема При Флуктуационных Потехах. Госэнергоиздат, 1961
- [28] Woodward P. M. Probability and Information Theory with Applications to Radar. Pergamon Press Ltd, 1953
- [29] Van Trees H. L. Detection, Estimation and Modulation Theory. Vol. I, II, John Wiley, 1968.
- [30] Middleton D. Introduction to Statistical Communication Theory. McGraw-Hill, 1960
- [31] 克拉默-拉奥. 统计学数学方法. 上海:上海科学技术出版社,1966
- [32] A. 瓦尔特. 统计决策函数. 上海:上海科学技术出版社,1966
- [33] Котельников В. А. Тсории Потенциальной Потенциальной Потехоустойчивости. Госэнергоиздат, 1956

- [34] Davenport W. and Root W. Random Signals and Noise. McGraw-Hill, 1958
- [35] 复旦大学数学系. 概率论与数理统计. 上海:上海科学技术出版社,1960
- [36] 中山大学数学力学系. 概率论与数理统计. 上海:上海科学技术出版社,1980
- [37] Pearson, K. Tables of the Incomplete Gamma Function, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1965
- [38] Marcum, J. I, Swerling, P. A Statistical Theory of Target Detection by Pulsed Radar, IRE Trans. Inform. Theory, April, 1960
- [39] A. H. El-sawy, Y. D. Vandelinde. Robust Detection of Know Signals. IEEE Trans, IF-25, 1979,346
- [40] Wald A. . A Sequential Analysis. Wiley. N. Y. . 1947
- [41] Wald A, Wolfowitz J. Optimum Character of the Sequential Probability Ratio Test. Ann. Math. Stat, 19, 326~339, 1948
- [42] Baghdady. E. J. Communication System Theory, Mcgraw-Mill, New York, 1961
- [43] Sage. A. P, Melsa, J. L, Estimation Theory With Applications to Communication sand Control, McGraw-Hill, 1971
- [44] Turin. G. L, On Optimal Diversity Reception, IRET rans. Inform. Theory, 154~166 (July) 1961
- [45] Kailath. T, The Complex Envelope of White Noise, Correspondence, IEEE Trans. Inform. Theory, 397~398 (July)1966
- [46] 福永圭之介,陶笃纯译. 统计图形识别导论. 北京:科学出版社,1978 年
- [47] Lec. C. C, Thomas, J. B. A Modified Sequential Detection Procedure. IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. IT-30 pp16~22, Jan. 1984
- [48] Ivan Selin, Detection Theory, RAND Corporation Published, 1965
- [49] Haykin. Simon S. Detection and Estimation Applications to Radar. Dowden Hutchinson & Ross Inc. , 1976
- [50] 王欣,王德隽,离散信号的滤波. 北京:电子工业出版社,2002. 6
- [51] Grover Brown. R, Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering, John Wiley & Sons Inc. 1983
- [52] Bozic. S M, Digital and Kalman Filtering, Edward Arnold, 1979
- [53] Scovell. G, A Guided Tour Through the Implementations of a Kalman Filter, Univ. of Birmingham, Bosworth, April 1977
- [54] Mendel. J M, Discrete Techniqies of Parameter Estimation. Dekker, 1973
- [55] Tretter. S A, Introduction to Discrete-Time Signal Processing, John & Sons, 1976
- [56] James Tsui(杨小牛等译). 宽带数字接收机. 北京:电子工业出版社,2002
- [57] 孙仲康. 雷达数据数字处理. 北京:国防工业出版社,1983
- [58] Singer. R A, Behnke. K W, Real Time Tracking Filter Evalation and Selection for Tactical Application, IEEE Trans AES, Vol AES-7, no. 1. pp100~110, Jan1971
- [59] 安德森. B D O, 摩尔. J B, 卢伯英译. 最佳滤波. 北京:国防工业出版社,1983
- [60] 周岩仁,敬忠良,王培德. 机动目标跟踪. 北京:国防工业出版社,1991
- [61] Bar-Shalom Y, Fortmann T. E, Tracking and Data Association, Academic Press, Inc, 1988
- [62] 戴树孙等. 数字技术在雷达中的应用. 北京:国防工业出版社,1981



欢迎登录 **免费** 获取本书教学资源
<http://www.hxedu.com.cn>

信号检测与估计 (第三版)

Signal Detection and Estimation

Third Edition

信号检测与估计是现代信息理论的一个重要分支。本书系统地讲述了信号检测与估计的理论及其应用。本书共分9章, 首先介绍统计接收中信号检测与估计的基本理论; 然后分别讨论高斯白噪声和高斯色噪声中信号的检测; 接着介绍了序列检测、非参量检测和Robust检测, 以及雷达中信号检测的过程; 最后分别讲述了信号参量估计和波形估计, 这些内容均属于现代检测与估计理论的范畴。所附全书的习题解答, 是所述教材内容的补充和扩展。

本书为工科电子信息类专业信号检测与估计的导论性教材, 取材注意结构的完整性和内容的典型性, 注意理论联系实际和新概念、新理论的介绍, 深入浅出, 易于读者学习。

本书可供电子与通信学科各专业的高年级本科生和研究生使用, 也可供从事电子与通信技术的广大科技人员做参考书。



策划编辑: 陈晓莉
责任编辑: 陈晓莉
封面设计: 张 昱

ISBN 978-7-121-14722-7



9 787121 147227 >

定价: 45.00 元